

## ГОРЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ (ОБЗОР)

Б. В. Новожилов

Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, 119991 Москва, nboris@intercaf.ru

В обзоре представлен итог многолетнего теоретического изучения процесса горения газифицирующихся конденсированных систем при периодически меняющемся давлением. В большинстве случаев результаты получены в рамках теории Зельдовича — Новожилова. Обсуждаются основные свойства линейной функции отклика скорости горения на гармонически меняющееся давление. Введено понятие нелинейных функций отклика, которое проиллюстрировано явным видом ряда функций отклика второго порядка. Описано новое явление — бифуркации функций отклика при изменении амплитуды или частоты колебаний давления. Для простейшей модели пороха, содержащей лишь три параметра, исследована последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний скорости горения, которая в конечном счете приводит к хаотическому режиму горения. Указано на аналитическую связь между линейными функциями отклика на гармонически меняющееся давление и на осциллирующий радиационный тепловой поток. Приведен пример вычисления функции отклика при учете тепловой инерционности газовой фазы.

Ключевые слова: порох, нестационарное горение, переменное давление, функция отклика, бифуркация удвоения периода, инерционность газовой фазы.

### ВВЕДЕНИЕ

Тема обзора обусловлена тем, что сорокалетний юбилей журнала «Физика горения и взрыва» совершенно случайно совпал с важной для автора другой датой. А именно, примерно в то же самое время, когда был основан журнал, теория нестационарного горения пороха, разработанная Я. Б. Зельдовичем [1], была существенно обобщена в работах автора [2, 3]. Сразу же отметим, что в дальнейшем газифицирующиеся при горении конденсированные энергетические материалы будут именоваться традиционным для отечественной литературы термином — порох.

В настоящее время теория, развитая на основе работ [1–3], носит название теории Зельдовича — Новожилова, в дальнейшем изложении будет использоваться сокращение «ЗН-теория».

Первый обзор этой теории появился в журнале «Физика горения и взрыва» в 1968 г. [4]. В статье были изложены основные результаты теории, полученные к тому времени: устойчивость горения при постоянном давлении, линейные колебательные режимы горения, акустическая проводимость поверхности горящего

пороха, устойчивость горения в полузамкнутом объеме, нелинейные колебания скорости горения, переходные режимы горения и потухание пороха. Позже появились монографии [5, 6] и написанный специально для зарубежных читателей обзор [7].

Вначале казалось (в том числе и автору), что ЗН-теория вскоре сменится более совершенным подходом к теории нестационарного горения пороха. Он мог бы заключаться, естественно, в рассмотрении (конечно, численными методами) полной и непротиворечивой с точки зрения макроскопической химической физики системы дифференциальных уравнений, описывающих данную конкретную проблему. По-видимому, так оно в конце концов и произойдет. Однако процесс выхода за рамки ЗН-теории идет очень медленно, что связано с большой сложностью механизма горения пороха (даже для гомогенных систем), и прежде всего фазового перехода конденсированной фазы в газообразную, осложненного химическим превращением.

Из всего многообразия нестационарных явлений в обзоре рассматривается лишь горение пороха в условиях периодически изменяющегося давления. Интерес к этим процессам связан с необходимостью понять причины, по которым на фоне расчетного стационарного режима работы твердоотопливного ракетного двига-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 05-03-33093).

теля возникают различного рода нестационарные эффекты, например, мягкое или жесткое (триггеринг) возбуждение колебаний скорости горения и давления. Широкое применение двигателей на твердом топливе свидетельствует о том, что, по-видимому, у конструкторов есть достаточно эффективные эмпирические методы борьбы с этими чаще всего нежелательными явлениями, которые обычно возникают уже на стадии проектирования. Несколько статей в сборнике [8] посвящено именно этому аспекту проблемы неустойчивости работы твердотопливного двигателя. Там же указывается, что успехи в понимании проблемы и теоретическом объяснении различных нестационарных явлений, наблюдаемых в лабораторных исследованиях и при практическом применении порохов, гораздо скромнее. Основная трудность связана с правильным описанием взаимодействия горения и акустики. Именно эта проблема и обсуждается в настоящем обзоре.

Сразу же отметим, что, строго говоря, все изложенное ниже относится только к гомогенным порохам. Теория горения смесевых систем находится в зачаточном состоянии, и можно лишь надеяться, что некоторые результаты, полученные для гомогенных порохов, будут качественно применимы и для смесевых систем (например, резонансный отклик скорости горения на периодическое изменение давления).

К настоящему времени большинство результатов, относящихся к теории нестационарного горения пороха, получено в рамках ЗН-теории. Краткому ее изложению посвящен § 1.

В § 2 проблема взаимодействия горения и акустики рассматривается в линейном приближении, когда амплитуда скорости горения пропорциональна амплитуде давления. Приводится аналитическое выражение для функции отклика скорости горения на осциллирующее давление, обсуждаются ее важнейшие свойства и связь с важнейшей характеристикой поверхности горящего пороха — акустической проводимостью.

Параграфы 3 и 4 посвящены относительно новым результатам, часть которых представлена к публикации впервые. Прежде всего, вводится понятие функций отклика высших порядков по амплитуде давления. Очевидно, что они найдут применение при исследовании установившихся и переходных процессов с конечными значениями амплитуд скорости и давления. В § 4 представлено новое явление — би-

фуркации функций отклика при изменении амплитуды или частоты колебаний давления. Бифуркации удвоения периода колебаний скорости горения происходят при увеличении амплитуды давления или изменения его частоты. Для модели пороха, нестационарные законы горения которой содержат минимальное число параметров, исследована последовательность бифуркаций, которая в конечном счете приводит к хаотическому режиму горения.

В § 5 дана сводка результатов исследования процесса горения в условиях переменного давления. На плоскости «частота давления — амплитуда» указаны области, где осуществляются все усложняющиеся режимы горения.

В § 6, 7 рассмотрены еще две задачи, непосредственно связанные с рассматриваемой проблемой. Во-первых, указано на аналитическую связь между линейными функциями отклика на гармонически меняющееся давление и на осциллирующий радиационный тепловой поток. Вполне возможно, что эта связь окажется полезной для получения экспериментальных сведений о функции отклика на переменное давление. Во-вторых, представлен пример вычисления функции отклика при учете тепловой инерционности газовой фазы, который показывает, что в некоторых случаях выход за рамки ЗН-теории может привести к существенным поправкам к функции отклика.

## 1. ТЕОРИЯ ЗЕЛЬДОВИЧА — НОВОЖИЛОВА

В основе теории нестационарных явлений при горении гомогенных систем лежит красивая идея, принадлежащая Я. Б. Зельдовичу [1], — привлечение стационарной зависимости скорости горения пороха от давления и начальной температуры к рассмотрению нестационарных процессов. Было показано, что это возможно, если пренебречь химической реакцией в конденсированной фазе и временем релаксации газовых процессов по сравнению со временем релаксации распределения тепла в конденсированной фазе и предположить постоянство температуры поверхности пороха. Упомянутая выше идея сформулирована в [1] следующим образом: «Поскольку время релаксации горения в газе очень мало, мы имеем право считать, что горение в газе в каждый момент определяется тепловым состоянием ближайшего к поверхности раздела тонкого слоя к-фазы: распределение температуры в более глубоко лежащих слоях прямого влияния на процесс, происходящий

у поверхности, не оказывает. Условия в газе должны полностью определяться мгновенным значением температуры поверхности и градиента температуры в  $k$ -фазе у поверхности; температуру поверхности считаем постоянной».

Таким образом, нестационарная теория горения пороха была сведена к рассмотрению сравнительно медленного изменения профиля температуры в порохе, что осуществляется путем решения уравнения теплопроводности с известной зависимостью скорости горения от мгновенных значений давления и градиента температуры в конденсированной фазе у поверхности пороха. Последняя может быть получена из стационарной зависимости (теоретической или полученной в эксперименте) скорости горения от давления и начальной температуры.

Теория, предложенная в [1], была обобщена и приведена к современному виду в [2, 3]. При этом в теорию была введена еще одна функция, характеризующая стационарный режим горения, а именно зависимость температуры поверхности пороха от давления и начальной температуры. Суть этого обобщения может быть оценена по цитате из диссертации О. И. Лейпунского «К вопросу о физических основах внутренней баллистики реактивных снарядов» [9]: «Расчетный аппарат теории теплового слоя основан на приближении, которое, как заметил сам Зельдович, слишком упрощено. Величина  $k$ , которая должна быть меньше 1, на самом деле больше 1 ( $k$ -трудность). Успех в смысле создания количественной теории явления возможен лишь при усовершенствовании теории горения пороха, а именно в преодолении  $k$ -трудности, выступающей как в общей теории горения пороха, так и в теории нестационарного горения, и в теории аномального горения и связанной, вероятно, с иным, чем предполагалось, распределением температуры в тепловом слое». Эта диссертация была опубликована лишь в 1982 г. в сборнике [10], где сообщалось также, что  $k$ -трудность преодолена автором настоящего обзора. Необходимое пояснение: параметр  $k$  есть произведение температурного коэффициента скорости горения на разность температуры поверхности и начальной температуры пороха.

В рамках ЗН-теории нестационарный процесс горения пороха исследуется путем решения уравнения теплопроводности в конденсированной фазе

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u \frac{\partial T}{\partial x}, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$x = 0: \quad T = T_s(t), \quad x \rightarrow -\infty: \quad T = T_a. \quad (1.2)$$

Здесь  $T(x, t)$ ,  $t$  и  $x$  — температура, время и пространственная координата;  $T_a$  и  $T_s(t)$  — начальная температура и температура поверхности раздела фаз;  $u(t)$  — линейная скорость горения;  $\varkappa$  — температуропроводность конденсированной фазы. Система координат связана с границей раздела фаз.

Необходимым элементом теории являются стационарные зависимости скорости горения и температуры поверхности от давления  $p$  и начальной температуры. Запишем эти зависимости, отметив нулевым верхним индексом стационарные величины:

$$u^0 = F_u(T_a, p^0), \quad T_s^0 = F_s(T_a, p^0). \quad (1.3)$$

Эти зависимости могут быть найдены из опытов по стационарному горению или из рассмотрения какой-либо теоретической модели пороха.

Стационарные законы горения (1.3) можно перевести в нестационарные при помощи михельсоновского выражения для стационарного распределения температур в конденсированной фазе

$$T^0(x) = T_a + (T_s^0 - T_a) \exp(u^0 x / \varkappa)$$

и вытекающего из него значения градиента температуры непосредственно у границы раздела фаз

$$f = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad f^0 = \frac{u^0}{\varkappa} (T_s^0 - T_a).$$

Последнее выражение позволяет представить стационарные законы горения в виде

$$u^0 = F_u \left( T_s^0 - \varkappa \frac{f^0}{u^0}, p^0 \right),$$

$$T_s^0 = F_s \left( T_s^0 - \varkappa \frac{f^0}{u^0}, p^0 \right).$$

Согласно основной идее рассматриваемой теории, такой вид стационарных зависимостей имеет силу и при нестационарном горении. Опуская индекс стационарности, получаем в результате нестационарные законы горения

$$u = F_u \left( T_s - \frac{f}{u}, p \right), \quad T_s = F_s \left( T_s - \frac{f}{u}, p \right), \quad (1.4)$$

которые вместе с начальным условием и заданной зависимостью давления от времени

$$T(x, 0) = T_i(x), \quad p = P(t) \quad (1.5)$$

замыкают систему (1.1), (1.2).

В дальнейшем используются следующие переменные:

$$\tau = \frac{(u^0)^2 t}{\varkappa}, \quad \xi = \frac{u^0 x}{\varkappa}, \quad v = \frac{u}{u^0}, \quad \eta = \frac{p}{p^0},$$

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_s^0 - T_a}, \quad \vartheta = \frac{T_s - T_a}{T_s^0 - T_a}, \quad \varphi = \frac{f}{f^0},$$

где  $p^0$  — некоторое базовое давление, которое выбирается исходя из особенностей рассматриваемой конкретной проблемы.

Уравнение теплопроводности (1.1), граничные условия (1.2), нестационарные законы горения (1.4) и условия (1.5) в этих переменных принимают вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - v \theta \right),$$

$$-\infty < \xi \leq 0,$$

$$\xi = 0: \quad \theta = \vartheta(\tau), \quad \xi \rightarrow \infty: \quad \theta = 0, \quad (1.6)$$

$$v = \Phi_u(\vartheta, \eta), \quad \varphi = \Phi_s(\vartheta, \eta),$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_i(\xi), \quad \eta = \Pi(\tau).$$

В стационарном режиме ( $\eta^0 = 1$ ) имеем

$$\theta^0 = e^{-\xi}, \quad \varphi^0 = 1, \quad v^0 = 1, \quad \vartheta^0 = 1. \quad (1.7)$$

Теория непротиворечива с математической точки зрения. Ее обоснование дано в [7].

## 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Система (1.6) нелинейна. В уравнении теплопроводности содержится нелинейный член — конвективный поток тепла, являющийся производением скорости горения и градиента температуры. Кроме того, стационарные и нестационарные законы горения в общем случае также нелинейны. При небольших отклонениях от стационарного режима (1.7) отклик скорости горения на осциллирующее давление может

быть найден аналитически в линейном приближении ЗН-теории.

Дадим, прежде всего, определение линейного отклика. Если давление вблизи поверхности горящего пороха осциллирует с малой амплитудой

$$p = p^0 + p_1 \cos \Omega t, \quad p_1 \ll p^0,$$

то линейная скорость горения пороха будет изменяться с той же частотой, но с некоторым фазовым сдвигом по отношению к давлению:

$$u = u^0 + u_1 \cos(\Omega t + \psi), \quad u_1 \ll u^0.$$

Комплексная величина

$$U(\Omega) = \frac{u_1/u^0}{p_1/p^0} \exp(i\psi) \quad (2.1)$$

называется линейной функцией отклика скорости горения на осциллирующее давление.

В линейном приближении удобно использовать метод безразмерных комплексных амплитуд. При этом

$$\eta = 1 + [\eta_1 \exp(i\omega\tau) + \text{с.с.}], \quad (2.2)$$

$$v = 1 + [v_1 \exp(i\omega\tau) + \text{с.с.}],$$

где  $\eta_1 = \frac{p_1}{2p^0}$ ,  $v_1 = \frac{u_1}{2u^0} \exp(i\psi)$ , а с.с. означает комплексное сопряжение. В этих переменных функция отклика имеет вид

$$U(\omega) = v_1/\eta_1. \quad (2.3)$$

В линейном приближении в условиях постоянного давления система (1.6) была изучена в [2], а функция отклика найдена в [3].

Представим все меняющиеся во времени величины в виде, аналогичном (2.2), т. е. как сумму стационарного значения и малого гармонического возмущения. Подстановка этих разложений в уравнение теплопроводности и граничные условия приводит к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению, решение которого устанавливает связь между амплитудами скорости горения  $v_1$ , температуры поверхности  $\vartheta_1$  и ее градиента  $\varphi_1$ :

$$z\vartheta_1 - \varphi_1 + v_1/z = 0,$$

где  $z = (1 + \sqrt{1 + 4i\omega})/2$ ,  $\omega = \varkappa\Omega/(u^0)^2$ .

Линеаризация нестационарных законов горения дает еще два соотношения между указанными выше амплитудами и амплитудой давления:

$$v_1 = \frac{k\varphi_1 + (\delta - \nu)\eta_1}{k + r - 1}, \quad \vartheta_1 = \frac{r\varphi_1 - (\delta + \mu)\eta_1}{k + r - 1}, \quad (2.4)$$

куда входят первые производные скорости горения и температуры поверхности в стационарном режиме от начальной температуры и давления, а также образованный ими якобиан  $\delta$ :

$$k = (T_s^0 - T_a) \left( \frac{\partial \ln F_u}{\partial T_a} \right)_{p^0}, \quad r = \left( \frac{\partial F_s}{\partial T_a} \right)_{p^0},$$

$$\nu = \left( \frac{\partial \ln F_u}{\partial \ln p^0} \right)_{T_a}, \quad \mu = \frac{1}{T_s^0 - T_a} \left( \frac{\partial F_s}{\partial \ln p^0} \right)_{T_a}, \quad (2.5)$$

$$\delta = \nu r - \mu k.$$

В случае постоянного давления система (2.3), (2.4) приводит к характеристическому уравнению для частоты

$$1 + (r - k/z)(z - 1) = 0, \quad (2.6)$$

из которого следует, что в некоторой области изменения параметров  $k$  и  $r$  порох представляет собой колебательную систему. При приближении к стационарному состоянию скорость горения и температура во всем пространстве, занятом конденсированной фазой, испытывают затухающие колебания с определенными частотой и декрементом затухания. В линейном приближении при  $r = 0$  стационарный режим устойчив всегда, если  $k < 1$ . При  $k > 1$  стационарный режим устойчив только при условии, что

$$r \geq (k - 1)^2 / (k + 1) \quad (2.7)$$

или

$$k \leq 1 + r/2 + \sqrt{2r + r^2/4}. \quad (2.8)$$

Знак равенства в этих выражениях соответствует границе устойчивости, на которой малые возмущения скорости горения или любой другой переменной не затухают со временем. Вблизи границы устойчивости асимптотическое (при больших временах) выражение для скорости горения имеет вид

$$v(\tau) = 1 + v_1 \exp(-\lambda\tau) \cos(\omega_n\tau + \psi),$$

где  $v_1$  и  $\psi$  — амплитуда и фаза, определяемые начальным условием, а собственная частота  $\omega_n$

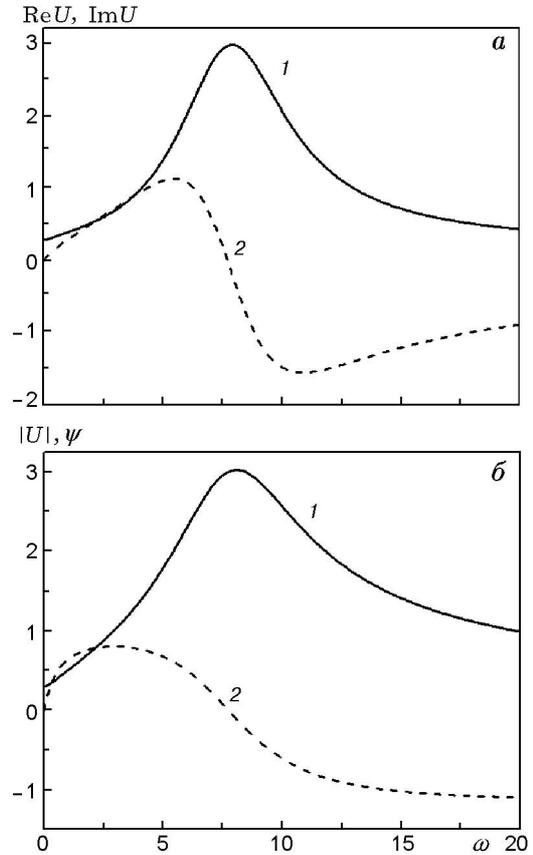


Рис. 1. Линейная функция отклика скорости горения ( $k = 1.5$ ,  $r = 0.15$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\delta = 0$ ):

а: 1 — реальная часть, 2 — мнимая часть, б: 1 — модуль, 2 — аргумент

и декремент затухания  $\lambda$  даются выражениями

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{r^2} - \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{r(k + 1) - (k - 1)^2}{2r^2}. \quad (2.9)$$

Линейная функция отклика скорости горения на осциллирующее давление, вытекающая из системы (2.3), (2.4), имеет вид

$$U = \frac{\nu + \delta(z - 1)}{1 + (z - 1)(r - k/z)}. \quad (2.10)$$

Отметим важное обстоятельство. В функцию отклика входят только характеристики стационарного режима горения пороха, которые могут быть найдены экспериментально. Это позволяет рассчитать реакцию пороха на меняющееся давление, не рассматривая деталей химических превращений и процессов переноса во фронте горения.

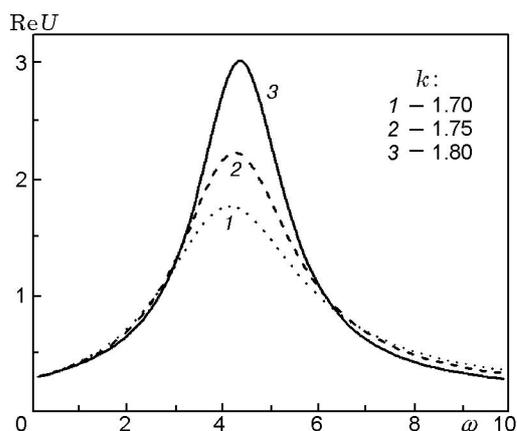


Рис. 2. Влияние вариации параметра  $k$  на реальную часть функции отклика скорости горения при  $\nu = 0.3, r = 0.3, \delta = 0$

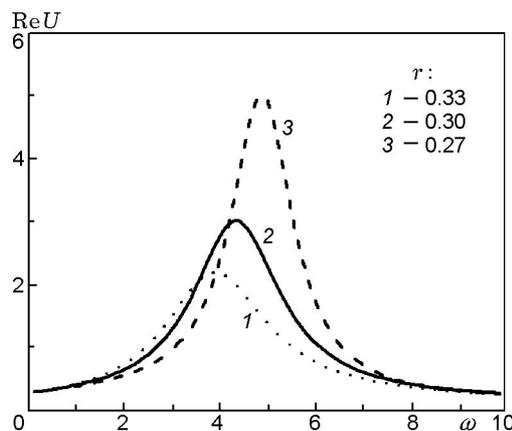


Рис. 3. Влияние вариации параметра  $r$  на реальную часть функции отклика скорости горения при  $\nu = 0.3, k = 1.8, \delta = 0$

Для вполне реального набора параметров стационарного режима реальная и мнимая части функции отклика изображены на рис. 1, а, а ее модуль и аргумент — на рис. 1, б. Прежде всего, следует отметить резонансный характер функции отклика. Максимальное значение вещественной части достигается при частоте, близкой к собственной частоте пороха (2.9), причем резонанс в несколько раз превышает стационарный отклик  $U(0)$ . Резонансный характер функции  $U(\omega)$  определяется ее знаменателем, зависящим только от параметров  $k$  и  $r$ , которые определяют границу устойчивости стационарного режима (2.7). По каким-то еще не выясненным причинам для большинства газифицирующихся при горении конденсированных систем стационарный режим осуществляется вблизи границы его устойчивости. Поэтому при типичных значениях параметров  $k$  и  $r$  абсолютная величина знаменателя функции отклика много меньше единицы, что и приводит к резонансу.

Рассмотрим теперь важный вопрос о влиянии ошибок измерения указанных выше стационарных параметров пороха на точность вычисления функции отклика [11]. Ее резонансный характер обуславливает сильную зависимость функции отклика от параметров  $k$  и  $r$ : малые изменения этих параметров приводят к большому изменению знаменателя и, следовательно, к большому изменению функции отклика. Действительно, представим эту функцию в виде

$$U = N/D, \quad N = \nu + \delta(z - 1),$$

$$D = 1 + (r - k/z)(z - 1).$$

Относительная ошибка ее вычисления

$$\Delta U/U = \Delta N/N + \Delta D/D$$

определяется, вследствие малости знаменателя, в основном вторым членом. Для иллюстрации положим  $\Delta k = 0$ , тогда

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{r(z - 1)}{D} \frac{\Delta r}{r},$$

и при достаточно малой ошибке параметра  $r$ , например,  $\Delta r/r = 10\%$ , получаем вблизи резонанса относительную ошибку функции отклика в несколько раз больше. Это иллюстрируют рис. 2 и 3.

Остановимся кратко на экспериментальных ошибках стационарных параметров горения пороха. К сожалению, данному вопросу не уделяется должного внимания в публикациях, посвященных измерению этих величин. Ошибка измерения параметра  $k = \beta(T_s^0 - T_a)$  определяется в основном ошибкой измерения температурной чувствительности скорости горения пороха

$$\beta = \left( \frac{\partial \ln u^0}{\partial T_a} \right)_{p^0}.$$

По порядку величины  $\beta \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , а ее экспериментальное определение базируется на измерениях скорости горения пороха при различных начальных температурах  $T_{a,1}$  и  $T_{a,2}$ :

$$\beta = (\ln u_2^0 - \ln u_1^0) / (T_{a,2} - T_{a,1}).$$

Абсолютная ошибка этого метода связана в основном с относительной ошибкой измерения температурной чувствительности скорости горения пороха:

$$\Delta\beta = \frac{2}{T_{a,2} - T_{a,1}} \frac{\Delta u^0}{u^0}.$$

При обычной точности измерений, когда  $\Delta u^0/u^0 = 5\%$  и  $T_{a,2} - T_{a,1} = 100$  К, имеем  $\Delta\beta = 10^{-3}$  К<sup>-1</sup>, что по порядку величины сравнимо с самой температурной чувствительностью скорости горения пороха. Относительная ошибка  $\Delta k/k$  достигает двух-трех десятков процентов. Даже при существенном улучшении точности измерения скорости горения относительная ошибка в определении  $k$  довольно велика. Так, даже при  $\Delta u^0/u^0 = 1\%$  оценка дает  $\Delta k/k = 5 \div 7\%$ .

Определение второго важного параметра  $r$ , характеризующего зависимость температуры поверхности от начальной температуры в стационарных условиях, основано, как правило, на термопарных измерениях температуры поверхности с последующим дифференцированием экспериментальной зависимости  $T_s^0(T_a)$ . Если толщина термопары  $h$ , то при градиенте температуры на поверхности пороха  $f^0 = u^0(T_s^0 - T_a)$  ошибка измерения температуры поверхности составляет  $\Delta T_s^0 = hf$ . При высоких давлениях, когда  $u^0 \approx 10^{-2}$  м/с, даже при предельно малой толщине термопары ( $\approx 5$  мкм) относительная ошибка измерения температуры поверхности составляет приблизительно 20%. При более низких давлениях ошибка, конечно, меньше, однако следует учитывать также дополнительную погрешность, связанную с дифференцированием экспериментальной зависимости  $T_s^0(T_a)$ . Таким образом, в лучшем случае относительная ошибка в измерении  $r$ , по видимому, никак не меньше десяти процентов.

Все сказанное свидетельствует о том, что при современной точности измерений функции отклика определяются с довольно большой, порядка нескольких десятков процентов, ошибкой.

Естественно, что погрешность в функциях отклика влечет за собой неточность тех результатов теории нестационарного горения, где они применяются. Прежде всего, это касается других функций отклика, которые используются во внутренней баллистике твердотопливных двигателей.

При решении акустических задач с граничными условиями на поверхностях, ограничивающих акустическую полость, должна быть задана функция отклика скорости оттекающих от поверхности газов на осциллирующее давление:

$$G(\omega) = g_1/\eta_1,$$

где  $g_1$  — безразмерная комплексная амплитуда колебаний скорости оттекающих от поверхности газов. Эту величину называют акустической проводимостью рассматриваемой поверхности (это может быть поверхность пороха, критическое сечение сопла или просто нейтральная поверхность).

В рамках ЗН-теории акустическую проводимость можно легко связать с функцией отклика скорости горения пороха и функцией отклика, описывающей изменение температуры оттекающих газов [4, 12]:

$$\Theta(\omega) = \frac{\theta_{b1}}{\eta_1},$$

где  $\theta_{b1}$  — безразмерная комплексная амплитуда колебаний температуры горения. При пренебрежении инерционностью газовой фазы температура горения полностью определяется начальной температурой и скоростью горения. Это позволяет вычислить отклик температуры горения через отклик скорости горения:

$$\Theta = (r_b/k)(U - \nu) + \mu_b.$$

При этом должны быть известны первые производные от температуры горения  $T_b^0$  по начальной температуре и давлению:

$$r_b = \frac{T_s^0 - T_a}{T_b^0} \left( \frac{\partial T_b^0}{\partial T_a} \right)_{p^0},$$

$$\mu_b = \frac{1}{T_b^0} \left( \frac{\partial T_b^0}{\partial \ln p^0} \right)_{T_a}.$$

Упомянутая выше связь имеет вид

$$G = U + \Theta - 1. \quad (2.11)$$

В заключение этого параграфа обратимся к результатам зарубежных авторов. Попытки построить теорию нестационарных процессов в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя продолжают уже в течение пятидесяти лет. Большинство публикаций принадлежит исследователям из США. Для описания

взаимодействия акустики и горения американские авторы используют эмпирическую формулу Кьюлика [13]

$$U = \frac{nAB}{z + A/z - (1 - A) + AB}, \quad (2.12)$$

которая получена на основе обобщения результатов работ других авторов, рассматривавших конкретные модели горения (наиболее известная из них — [14]). Физический смысл эмпирических констант в [13] выяснен не был. Легко установить, что (2.12) является частным случаем формулы (2.10), если положить

$$n = \nu, \quad A = \frac{k}{r}, \quad B = \frac{1}{k}, \quad \delta = 0.$$

Подход, изложенный в работе [13], имеет ряд недостатков.

Константы  $A$  и  $B$  не могут быть вычислены, даже если сформулирована модель горения пороха. Их зависимость от давления и начальной температуры пороха не определена.

При формулировке граничных условий необходимо знать нестационарную температуру оттекающих от поверхности газов. В рамках подхода [13] не удастся определить соответствующую функцию отклика (2.11).

При рассмотрении процессов в камере сгорания исследуется нелинейное приближение для акустики и линейное — для отклика скорости горения на изменяющееся давление. Это явное противоречие: отклик скорости горения носит резонансный характер и основные нелинейные эффекты в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя связаны с «нелинейностью» горения.

Используя указанный подход, можно рассматривать только линейное взаимодействие давления и скорости горения топлива. Таким образом, все результаты, полученные в рамках такого подхода (см., например, [15]), не позволяют не только провести какое-либо количественное сопоставление с опытом, но даже дать качественное описание явления.

В отличие от подхода [13] ЗН-теория дает возможность выйти за рамки линейного приближения. Укажем здесь работы [16, 17], где исследовалось явление нелинейного резонанса при горении порохов. Систематическому исследованию нелинейных явлений посвящены следующие три параграфа обзора.

### 3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

Рассмотренный в предыдущем параграфе линейный анализ проблемы взаимодействия процесса горения пороха с акустическим полем может быть использован (в совокупности с приближением линейной акустики) для выяснения условий устойчивости стационарного режима горения в камере сгорания. Однако для исследования процессов с конечной амплитудой давления (установившиеся колебания, триггеринг) необходимо выйти за рамки линейного приближения.

Аналитическое исследование нелинейных явлений при взаимодействии акустики и горения в камере сгорания, естественно, возможно лишь в низших (квадратичном или, в лучшем случае, в третьем порядке по амплитуде колебаний) приближениях. В большинстве исследований (см., например, [15]) нелинейность вводилась лишь для акустики. Функция отклика скорости горения на изменяющееся давление входила в расчеты в линейном приближении. В работе автора [18] впервые была предпринята попытка ввести в рассмотрение нелинейное взаимодействие между акустической волной и процессом горения твердого топлива. При этом использовалось понятие квадратичных функций отклика различных характеристик горения (скорости горения, температуры горения, скорости оттекающих из зоны горения продуктов горения), введенное в [19].

В настоящем параграфе в квадратичном по амплитуде давления приближении проанализирована функция отклика скорости горения пороха на гармонически меняющееся давление. Очевидно, что результаты такого подхода позволят также оценить границы применимости линейного приближения.

Как правило, периодическое акустическое поле в камере сгорания содержит много гармоник. В квадратичном приближении нелинейные эффекты возникают как при взаимодействии двух различных гармоник, так и при самовзаимодействии какой-либо отдельной гармоники.

В связи с ограниченностью объема обзора ниже рассматриваются только примеры, относящиеся к низшим гармоникам — основной и первой акустическим модам.

Введем, прежде всего, понятие квадратичных функций отклика скорости горения пороха на периодическое изменение давления.

Пусть акустическое поле содержит две

гармоники:

$$\eta = 1 + [\eta_1 \exp(i\omega\tau) + \eta_2 \exp(2i\omega\tau) + \text{c.c.}]. \quad (3.1)$$

Скорость горения пороха в квадратичном приближении может быть представлена в виде

$$v = 1 + v_{1,-1} + v_{2,-2} + [(v_1 + v_{2,-1}) \exp(i\omega\tau) + (v_2 + v_{1,1}) \exp(2i\omega\tau) + \text{c.c.}]. \quad (3.2)$$

Смысл введенных обозначений легко понять. Постоянная составляющая скорости горения есть сумма трех слагаемых: первое (единица) отвечает стационарной скорости горения, два остальных соответствуют самовзаимодействию первой или второй гармоники (соответственно  $v_{1,-1}$  и  $v_{2,-2}$ ). Первая гармоника скорости горения состоит из линейной части  $v_1$  и слагаемого  $v_{2,-1}$ , которое возникает из-за взаимодействия второй и первой гармоник. Наконец, вторая гармоника скорости горения содержит линейный член  $v_2$  и нелинейную составляющую  $v_{1,1}$ , соответствующую самовзаимодействию первой гармоники. Заметим, что нижний индекс для нелинейных составляющих показывает, какие гармоники взаимодействуют, а сумма двух нижних индексов дает номер возникающей гармоники скорости горения.

Нелинейные функции отклика второго порядка определяются следующими выражениями:

$$U_{1,1} = \frac{v_{1,1}}{\eta_1^2}, \quad U_{1,-1} = \frac{v_{1,-1}}{|\eta_1|^2}, \quad U_{2,-1} = \frac{v_{2,-1}}{\eta_2 \bar{\eta}_1}. \quad (3.3)$$

Функции отклика высших порядков могут быть введены аналогичным образом. Например, функция отклика  $U_{3,2,-1} = v_{3,2,-1}/\eta_3 \eta_2 \bar{\eta}_1$  позволяет найти амплитуду скорости четвертой гармоники, возникающую при взаимодействии третьего порядка между первой, второй и третьей гармониками давления.

Для вычисления функций отклика высших порядков необходимо в рамках теории возмущений найти решение уравнения теплопроводности вплоть до членов рассматриваемого порядка. С такой же точностью необходимо разложить в ряд по степеням амплитуды давления и нестационарные законы горения. В общем случае эта процедура довольно трудоемка и приводит к очень сложным выражениям для функций отклика. Однако для функций второго порядка она вполне реализуема [18, 19].

Ниже приведены результаты для некоторых функций второго порядка для конкретной модели пороха. Она выбрана так, чтобы задача содержала минимальное число параметров. Простейшая модель, удовлетворяющая этому условию, определяется стационарными зависимостями

$$u^0 = A(p^0)^\nu \exp(\beta T_a), \quad u^0 = B \exp(\beta_s T_s^0), \quad (3.4)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\beta$  и  $\beta_s$  — константы. Параметры чувствительности скорости горения и температуры поверхности к изменению начальной температуры имеют вид

$$k = \beta(T_s^0 - T_a), \quad r = \beta/\beta_s.$$

Используя метод перехода к нестационарным зависимостям, описанный в предыдущем параграфе, получаем безразмерный вид нестационарных законов горения:

$$v = \eta^\nu \exp \left[ k \left( \vartheta - \frac{\varphi}{v} \right) \right], \quad v = \exp \left[ \frac{k}{r} (\vartheta - 1) \right]. \quad (3.5)$$

Следовательно, изучаемая система характеризуется всего тремя параметрами:  $k$ ,  $r$  и  $\nu$ .

Отсылая читателя к работам [18, 19], где можно найти детальное описание вычислений, приведем лишь окончательные результаты для нескольких функций отклика второго порядка:

$$U_{1,-1} = -|U_1|^2 + \nu(2\text{Re}U_1 - 1),$$

$$U_{2,-2} = -|U_2|^2 + \nu(2\text{Re}U_2 - 1),$$

$$U_{1,1} = \frac{U_1^2 U_2}{\nu} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{k(z_2 - 1)}{2\omega^2} (2z_1 - z_2 - 1) + \frac{r}{2} \left( z_2 - \frac{4z_1}{z_2} + 3 \right) \right] + U_2 \left( U_1 - \frac{1}{2} \right), \quad (3.6)$$

$$U_{2,-1} = \frac{|U_1|^2 U_2}{\nu} \left[ -1 + \frac{k(z_1 - 1)}{2\omega^2} (z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + 1) + r \left( z_1 + \frac{z_2}{z_1} - \frac{\bar{z}_1}{2z_1} - \frac{3}{2} \right) \right] + U_1 (\bar{U}_1 + U_2 - 1),$$

где

$$U_1 = \frac{\nu + \delta(z_1 - 1)}{1 + (z_1 - 1)(r - k/z_1)},$$

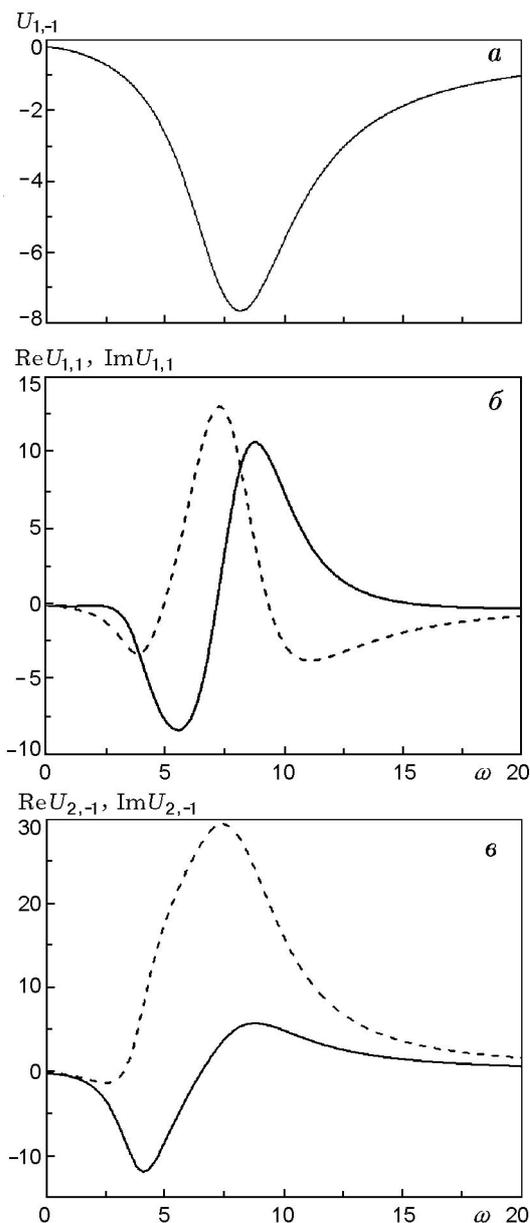


Рис. 4. Нелинейные функции отклика скоростей горения  $U_{1,-1}$  (а),  $U_{1,1}$  (б),  $U_{2,-1}$  (в):  $r = 0.15$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\delta = 0$ ; сплошные кривые — вещественная часть, штриховые — мнимая

$$U_2 = \frac{\nu + \delta(z_2 - 1)}{1 + (z_2 - 1)(r - k/z_2)},$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4i\omega}), \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8i\omega}).$$

Частотные зависимости вещественных и мнимых частей нелинейных функций отклика приведены на рис. 4. Обращают на себя внимание достаточно большие значения этих функ-

ций, особенно вблизи собственной частоты пороха. Это обстоятельство является следствием резонансного характера функций отклика первого порядка  $U_1$  и  $U_2$ . Квадратичные же функции отклика содержат произведения функций первого порядка.

Теперь можно оценить область применимости линейного приближения. Для этой цели следует сравнить амплитуды скорости горения, полученные в первом и втором порядке теории возмущений.

Предположим, что зависимость давления от времени содержит только первую гармонику. Очевидно, что линейное приближение применимо только при условиях

$$|v_{1,1}| \ll |v_1|, \quad |v_{1,-1}| \ll |v_1|$$

или, согласно (2.3) и (3.3),

$$|\eta_1| \ll |U_1|/|U_{1,1}|, \quad |\eta_1| \ll |U_1|/|U_{1,-1}|.$$

#### 4. БИФУРКАЦИИ ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА

В двух предыдущих параграфах анализировались линейные и квадратичные функции отклика скорости горения пороха при гармонически меняющемся давлении. И в том и другом случае период колебаний скорости горения  $T$  совпадал с периодом колебаний давления. Такие режимы горения будем в дальнейшем именовать  $T$ -режимами или  $T$ -решениями. Естественно, что при достаточно сильно выраженной нелинейности  $T$ -решения содержат не только основную гармонику, частота которой совпадает с частотой изменения давления, но и моды с более высокими частотами, кратными частоте основной гармоники. Что произойдет при дальнейшем продвижении в область нелинейности, т. е. при увеличении амплитуды колебаний давления? Рассмотрению этого вопроса и посвящен настоящий параграф.

Можно ожидать, что при сильной нелинейности процесс горения пороха будет проявлять свойства, характерные для нелинейных динамических систем, которые интенсивно исследуются последние десятилетия (см., например, [20, 21]).

В недавней работе автора [22] путем численного моделирования были исследованы нестационарные моды горения пороха при постоянном давлении за границей устойчивости стационарного режима. Рассмотрение проводилось в рамках ЗН-теории. Использовалась

простейшая модель пороха, содержащая всего лишь два характеризующих систему параметра —  $k$  и  $r$ . При фиксированном значении параметра  $r$  второй играет роль бифуркационного параметра. Оказалось, что при изменении бифуркационного параметра исследованная система переходит от стационарного режима горения к хаотическому по сценарию Фейгенбаума, т. е. путем последовательности бифуркаций удвоения периода колебаний скорости горения, которая в конечном счете и приводит к хаотическому режиму горения. Аналогичные результаты для модели Беляева — Зельдовича с учетом инерционности газовой фазы и реакционного слоя в конденсированной фазе были получены в [23].

Ниже излагаются результаты численного исследования поведения пороха при больших амплитудах гармонически меняющегося давления. Стационарные законы горения приняты такими же, как и в § 3, т. е. в форме (3.4).

Приведем, прежде всего, математическую постановку задачи. Решается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v\theta \right), \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$\xi = 0: \quad \theta = \vartheta(\tau), \quad \xi \rightarrow \infty: \quad \theta = 0. \quad (4.2)$$

Кроме того, заданы нестационарные законы горения

$$v = \eta^\nu \exp\left[k\left(\vartheta - \frac{\varphi}{v}\right)\right], \quad v = \exp\left[\frac{k}{r}(\vartheta - 1)\right], \quad (4.3)$$

$$\varphi = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$$

и зависимость давления от времени

$$\eta = 1 + \eta_1 \cos(\omega\tau). \quad (4.4)$$

В качестве начального условия взято стационарное решение

$$\theta^0(\xi, \tau_i) = e^{-\xi} \quad \text{при} \quad \tau_i = \pi/2\omega. \quad (4.5)$$

В начальный момент времени имеем также

$$\eta^0(\tau_i) = 1, \quad \varphi^0(\tau_i) = 1, \quad v^0(\tau_i) = 1, \quad \vartheta^0(\tau_i) = 1. \quad (4.6)$$

Отметим, что исследуемая система является одной из простейших динамических систем с

распределенными параметрами. Она описывается всего одним дифференциальным уравнением в частных производных (уравнение теплопроводности) и двумя в общем случае нелинейными связями между скоростью горения, температурой поверхности пороха и ее градиентом на границе конденсированной фазы. Естественно, что полное решение этой нелинейной задачи возможно только численными методами.

Система (4.1)–(4.6) содержит пять параметров. При численных расчетах значения четырех из них были фиксированы:

$$k = 1.5, \quad r = 0.15, \quad \nu = 0.3, \quad \omega = 2\pi,$$

так что  $T = 1$ . Изменение поведения системы исследовалось путем постепенного увеличения амплитуды давления  $\eta_1$ .

Точность численного моделирования была проверена в случае малых амплитуд, для которого известно аналитическое решение. Так, например, при  $\eta_1 = 0.01$  численное решение дает значение безразмерной амплитуды скорости горения  $v_1 = 0.0238$ , что соответствует модулю функции  $|U| = 2.38$ . Эта величина с точностью до 3 % совпадает с аналитическим результатом  $|U| = 2.45$ , вытекающим из (2.10).

Рис. 5–9 иллюстрируют поведение системы при изменении амплитуды давления  $\eta_1$ . На части *a* каждого из этих рисунков показано изменение скорости горения во времени, на части *b* — двумерная проекция фазовой траектории системы на плоскость  $(\mu, y_0)$ , где

$$y_0(\tau) = \int_0^\infty \theta(\xi, \tau) d\xi \quad (4.7)$$

— запас тепла в конденсированной фазе, представляемый нулевым моментом температурного распределения в ней. Подписи к рисункам содержат количественные характеристики режимов — значения параметра  $k$  и периода колебаний.

При малых амплитудах давления  $\eta_1$  скорость горения и давление осциллируют с одинаковым периодом  $T$  ( $T$ -режим, рис. 5, *a*). Предельный цикл (см. рис. 5, *b*) достаточно сильно отличается от эллипса, поэтому этот режим можно назвать нелинейным  $T$ -решением. Напомним, что при линейных колебаниях предельный цикл в общем случае имеет форму эллипса, который может вырождаться в прямую или окружность.

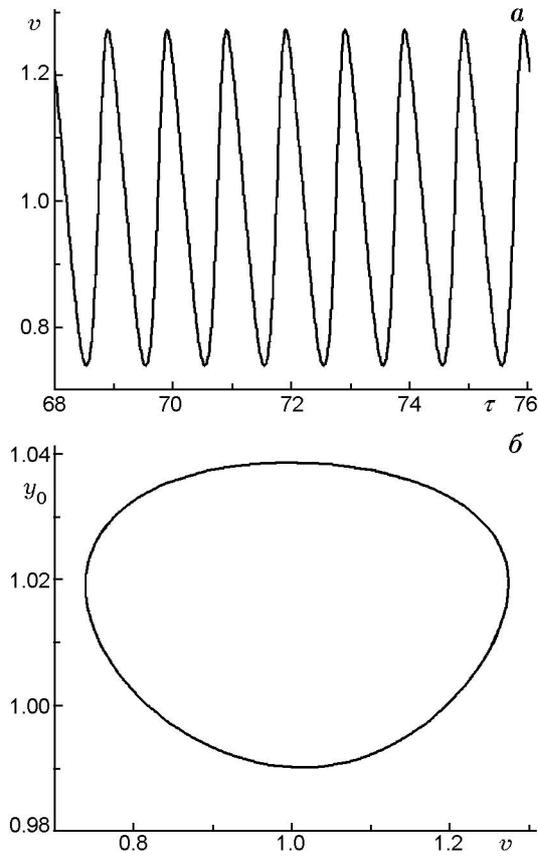


Рис. 5.  $T$ -режим ( $\eta_1 < \eta_1^{(1)}$ ,  $\eta_1 = 0.1$ )

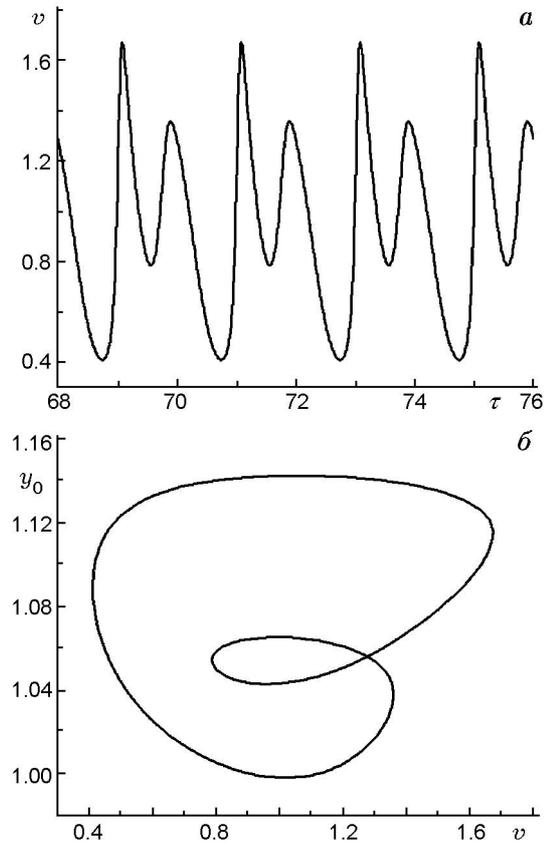


Рис. 6.  $2T$ -режим ( $\eta_1^{(1)} < \eta_1 < \eta_1^{(2)}$ ,  $\eta_1 = 0.177$ )

При достижении критического значения  $\eta_1^{(1)} = 0.16565$  система испытывает бифуркацию от  $T$ -режима к  $2T$ -режиму. На рис. 6, *a* видно, что период колебаний скорости горения становится равным удвоенному периоду изменения давления. Соответственно усложняется и предельный цикл (рис. 6, *б*). Увеличение бифуркационного параметра  $\eta_1$  приводит к каскаду бифуркаций, при каждой из которых происходит удвоение периода. Ошибки численного счета не позволяют установить бесконечную последовательность бифуркаций. Последовательные бифуркации удвоения периода колебаний происходят при

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)} &= 0.16565, & \eta_1^{(2)} &= 0.18095, \\ \eta_1^{(3)} &= 0.18275, & \eta_1^{(4)} &= 0.18320. \end{aligned} \quad (4.8)$$

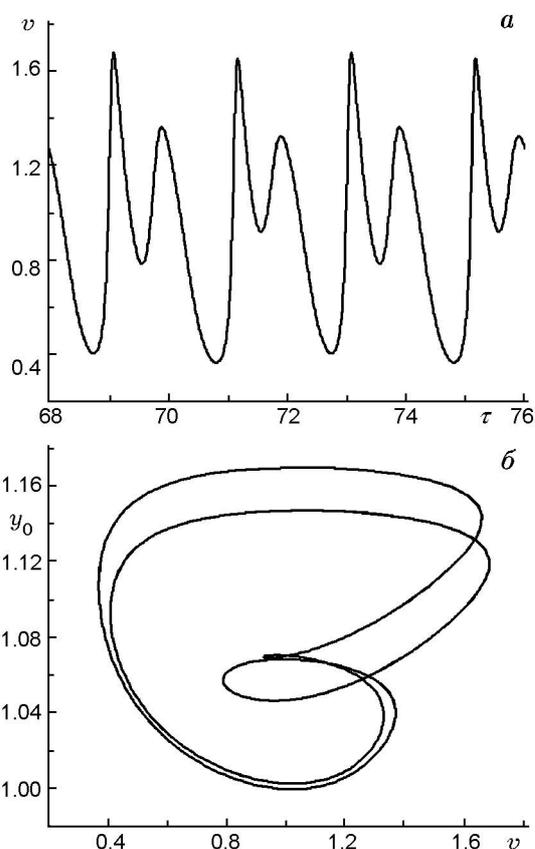
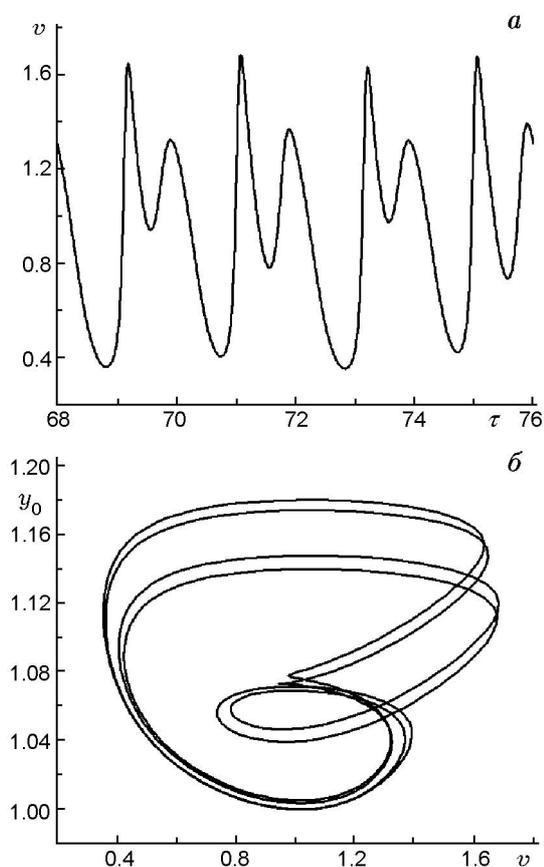
После четвертой бифуркации при небольшом изменении бифуркационного параметра наблюдается хаотический режим горения: фазовая

траектория практически равномерно заполняет некоторую область фазовой плоскости (рис. 9, *б*).

Проведенные численные расчеты свидетельствуют, что при переходе от устойчивого стационарного режима горения к хаотическому реализуется сценарий, основанный на каскаде бифуркаций Фейгенбаума [20, 21]. В этом сценарии последовательность бифуркационных значений  $\eta_1^{(m)}$  удовлетворяет простому закону:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = \delta, \quad \delta_m = \frac{\eta_1^{(m)} - \eta_1^{(m-1)}}{\eta_1^{(m+1)} - \eta_1^{(m)}}, \quad (4.9)$$

где  $\delta = 4.669\dots$  — универсальная постоянная Фейгенбаума. Из приведенных выше бифуркационных значений параметра  $\eta_1^{(m)}$  (4.8) можно определить  $\delta_2 = 8.5 \pm 0.5$  и  $\delta_3 = 4 \pm 1$ . Таким образом, последовательность  $\delta_m$ , как это неоднократно отмечалось, сходится к пределу очень быстро. Большая величина относитель-

Рис. 7. 4T-режим ( $\eta_1^{(2)} < \eta_1 < \eta_1^{(3)}$ ,  $\eta_1 = 0.182$ )Рис. 8. 8T-режим ( $\eta_1^{(3)} < \eta_1 < \eta_1^{(4)}$ ,  $\eta_1 = 0.183$ )

ной ошибки связана, во-первых, с наличием в (4.9) разностей между бифуркационными значениями и, во-вторых, ошибками численного счета.

## 5. ДИАГРАММА ЧАСТОТА — АМПЛИТУДА

Приведем вкратце результаты исследования взаимодействия переменного давления с процессом горения пороха, изложенные в § 2–4. Множество параметров, определяющих задачу, разделим на два класса. К первому отнесем характеристики, связанные с самим порохом. В рассмотренных выше примерах использовалась простейшая модель пороха, которая содержала только три параметра —  $k$ ,  $r$  и  $\nu$ . В общем случае их может быть, конечно, больше. Периодически меняющееся давление определяется частотой основной гармоники, числом гармоник и их амплитудами. Эти параметры отнесем ко второму классу.

Проанализируем отклик скорости горения на переменное давление в простейшем случае.

Зафиксируем параметры первого класса, т. е. рассмотрим некоторую конкретную модель пороха. Кроме того, предположим, что переменное давление содержит только одну гармонику. Тогда остаются только два параметра —  $\omega$  и  $\eta_1$ , что позволяет изучать поведение системы на плоскости с координатами  $\omega$ ,  $\eta_1$ . Назовем эту плоскость диаграммой частота — амплитуда (рис. 10).

Линия  $B$  отделяет область бифуркаций скорости горения (выше кривой) от режимов, где скорость горения колеблется с той же частотой, что и давление. Эту часть плоскости можно условно разделить на две. При малых амплитудах давления (ниже кривой  $L$ ) можно применять линейное приближение и пользоваться понятием функций отклика первого порядка. Эта область отмечена символом  $T_1$ . При высоких значениях амплитуды давления скорость горения содержит высшие гармоники. В этом случае линейное приближение не работает и необходимо вводить функции откли-

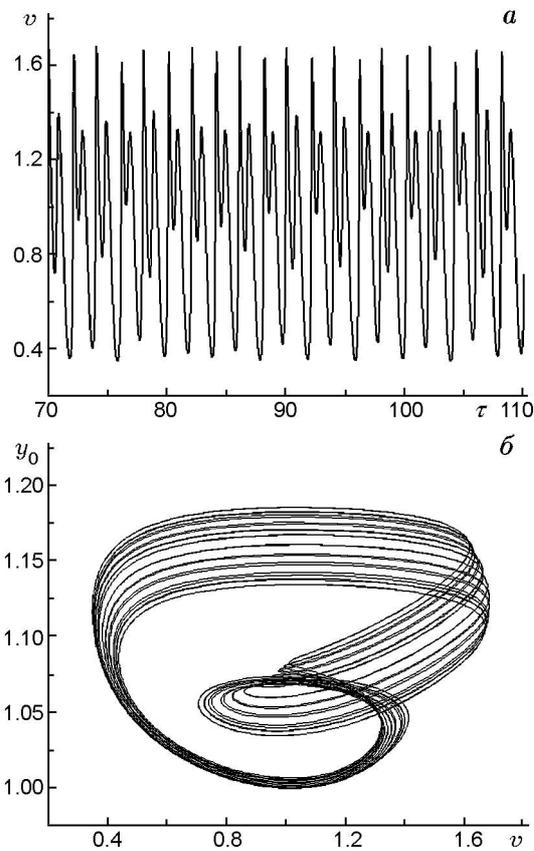


Рис. 9. Хаотический режим горения ( $\eta_1 > \eta_1^{(4)}$ ,  $\eta_1 = 0.1835$ )

ка высших порядков (область  $T_n$ ). Положение кривой  $L$ , которая разделяет линейные и нелинейные  $T$ -режимы, зависит, конечно, от критерия применимости линейного приближения (заранее определенной точности, с которой можно не рассматривать высшие гармоники).

Кривые  $B$  и  $L$  (как, впрочем, и все остальные, изображенные на рис. 10) проходят через минимум при частотах, близких к собственной частоте пороха. В этой области наиболее резко выражен резонанс, поэтому с ростом амплитуды давления раньше всего проявляется нелинейность системы и быстрее возникают бифуркации. Выше линии  $B$  изображены границы, разделяющие различные  $2^m T$ -режимы, т. е. линии последовательных бифуркаций. При росте амплитуды давления они сгущаются, поскольку разности между бифуркационными значениями параметра  $\eta_1$  быстро уменьшаются с номером бифуркации. Кривая  $M$  включает в себя бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, которая, по-видимому,

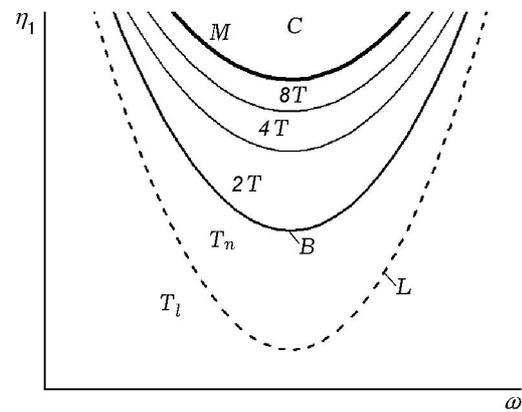


Рис. 10. Диаграмма частота — амплитуда

завершается возникновением хаотического режима горения (область  $C$ ).

При вариации параметров, относящихся к пороху, рассмотренная диаграмма качественно не изменится. С очевидностью можно предвидеть, что при более резко выраженном резонансе (например, при уменьшении разности  $r - r^*$ ) все изображенные кривые сместятся вниз — нелинейные и бифуркационные явления будут выражены резче.

Такова общая картина взаимодействия процесса горения пороха с одномодовой вариацией давления. Очевидно, что картина резко усложнится при наличии многих гармоник. Кроме того, ясно, что совместное рассмотрение акустической полости (камера сгорания двигателя) и процесса горения приведет к новым, пока еще непредсказуемым трудностям, как при постановке задачи, так и при ее даже качественном исследовании.

## 6. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОТКЛИКАМИ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА НА ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИЕСЯ ДАВЛЕНИЕ И РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Много усилий было потрачено на создание методик экспериментального определения функции отклика скорости горения пороха на гармонически меняющееся давление. Такая методика была создана в виде так называемых  $T$ -камер. Однако ее несовершенство (большая относительная ошибка измерения) заставило искать новые пути получения экспериментальных данных об этой функции. Со временем появилась идея применить функции отклика скорости горения пороха на осциллирующий ради-

ационный тепловой поток для получения сведений о функции отклика на меняющееся давление. Она была высказана около тридцати лет назад [24]. С тех пор предпринято несколько попыток аналитически связать эти две функции (см., например, [25–27]), однако заметных успехов в этом направлении достигнуто не было. Выражение одной функции через другую было получено либо для тривиального случая (в пределе очень малой интенсивности излучения и при нулевой длине свободного пробега излучения в конденсированной среде [25, 26]), либо для существенно ограниченного класса возможных топлив [27].

Причина этих неудач довольно очевидна. Постоянная составляющая радиационного теплового потока изменяет стационарный профиль температуры в конденсированной фазе. При этом стационарные значения скорости горения и температуры поверхности больше, чем в отсутствие радиационного потока. Таким образом, процесс осцилляций скорости горения под действием переменной составляющей радиационного потока осуществляется на ином стационарном фоне по сравнению с процессом колебаний скорости горения под действием переменного давления.

Формально при математическом исследовании задачи это обстоятельство проявляется в том, что найденные при одинаковых значениях базового давления и начальной температуры функции отклика на меняющиеся давление и радиационный тепловой поток оказываются зависящими от разных параметров. В § 1 было показано, что в линейном приближении ЗН-теории любой нестационарный процесс характеризуется четырьмя первыми частными производными от стационарных законов горения для скорости горения и температуры поверхности пороха по давлению и начальной температуре. В отсутствие радиационного потока производные по начальной температуре вычисляются при истинном значении начальной температуры. При наличии теплового потока излучения эти производные, как показано в [28], должны быть найдены при более высокой начальной температуре, зависящей от величины постоянной составляющей потока излучения и нового значения стационарной скорости горения. Вследствие этого в линейную теорию любого нестационарного эффекта при наличии теплового эффекта входят параметры пороха, которые отличаются от определяющих

задачу параметров в отсутствие внешнего потока излучения. Очевидно, что в общем случае невозможно получить аналитическую связь между двумя функциями, зависящими от разных аргументов и характеризующихся различными параметрами.

В работах [29, 30] показано, что можно найти функцию отклика на меняющееся давление при заданных значениях начальной температуры  $T_a$  и давления по функции отклика на осциллирующий радиационный поток, определенной при том же давлении, но более низкой начальной температуре  $T_e$ . Значение этой новой начальной температуры должно быть выбрано так, чтобы стационарная скорость горения при этой начальной температуре и наличии постоянного теплового потока равнялась стационарной скорости горения в отсутствие теплового потока при температуре  $T_a$ . В этом случае функция отклика на изменяющийся радиационный тепловой поток, определенная при температуре  $T_e$ , зависит от тех же параметров, что и функция отклика на меняющееся давление, найденная при более высокой начальной температуре  $T_a$ . Естественно, эти две функции могут быть аналитически связаны друг с другом.

В этом параграфе полезно слегка изменить обозначение начальной температуры. В предыдущем изложении символ  $T_a$  нес двойную нагрузку. Это, во-первых, аргумент в стационарных законах горения, по которому можно проводить дифференцирование, и, во-вторых, это значение начальной температуры, при которой и рассматривались исследуемые процессы. Поскольку в настоящем параграфе будут сравниваться режимы горения при разных начальных температурах, введем для аргумента, соответствующего начальной температуре в стационарных законах горения, обозначение  $T_\alpha$ , по которому и будет проводиться дифференцирование. Для различных значений начальных температур будем использовать обозначения  $T_a$  и  $T_e$ . Соответственно этому введем верхний индекс для указания, к какой начальной температуре относится рассматриваемая величина.

Таким образом, линейная функция отклика скорости горения пороха на осциллирующее давление (2.10), найденная при начальной температуре  $T_a$ , примет следующий вид:

$$U^{(a)} = \frac{\nu + \delta^{(a)}(z^{(a)} - 1)}{1 + (z^{(a)} - 1)(r^{(a)} - k^{(a)}/z^{(a)})}, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 k^{(a)} &= ((T_s^{(a)})^0 - T_a) \left( \frac{\partial \ln F_u}{\partial T_\alpha} \right)_{p^0} \Big|_{T_\alpha=T_a}, \\
 \delta^{(a)} &= \nu^{(a)} r^{(a)} - \mu^{(a)} k^{(a)}, \\
 r^{(a)} &= \left( \frac{\partial F_s}{\partial T_\alpha} \right)_{p^0} \Big|_{T_\alpha=T_a}, \\
 \nu^{(a)} &= \left( \frac{\partial \ln F_u}{\partial \ln p^0} \right)_{T_\alpha} \Big|_{T_\alpha=T_a}, \\
 \mu^{(a)} &= \frac{1}{T_s^0 - T_a} \left( \frac{\partial F_s}{\partial \ln p^0} \right)_{T_\alpha} \Big|_{T_\alpha=T_a}, \quad (6.2) \\
 z^{(a)} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4i\omega^{(a)}} \right), \\
 \omega^{(a)} &= \frac{\alpha\Omega}{[(u^{(a)})^0]^2}.
 \end{aligned}$$

Функция отклика скорости на гармонически меняющийся радиационный тепловой поток

$$I = I^0 + I_1 \cos \Omega t, \quad I_1 \ll I^0,$$

определяется следующим образом. Запишем скорость горения в виде

$$u_r = u_r^0 + u_{r1} \cos(\Omega t + \psi_r), \quad u_{r1} \ll u_r^0,$$

где индекс  $r$  указывает на отличие скоростей горения в отсутствие и при наличии радиационного потока. Применяя метод комплексных амплитуд, имеем

$$I = I^0 + \left[ \frac{I_1}{2} \exp(i\Omega t) + \text{c.c.} \right],$$

$$\nu_r = 1 + [\nu_{r1} \exp(i\Omega t) + \text{c.c.}],$$

$$\nu_{r1} = \frac{u_{r1}}{2u_r^0} \exp(i\psi_r).$$

Функцией отклика скорости горения пороха на гармонически меняющийся радиационный тепловой поток называется комплексная величина

$$U_r = \frac{\nu_{r1}}{I_1/2I^0}, \quad (6.3)$$

которая в рамках ЗН-теории была найдена в [26, 31]. Результаты этих работ имеют очень

сложный вид, что связано с неудачно выбранным способом обезразмеривания входящих в задачу параметров. Как показано в [29], их можно привести к более простому виду:

$$U_r^{(a)} = \frac{k^{(I)} S^{(I)}}{[1 + l^{(I)}(z^{(I)} - 1)] D^{(I)} + k^{(I)} S^{(I)}/z^{(I)}}, \quad (6.4)$$

где

$$D^{(I)} = 1 + (z^{(I)} - 1) \left( r^{(I)} - \frac{k^{(I)}}{z^{(I)}} \right),$$

$$z^{(I)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4i\omega^{(I)}} \right),$$

$$k^{(I)} = ((T_s^{(I)})^0 - T_\alpha) \left( \frac{\partial \ln F_u}{\partial T_\alpha} \right)_{p^0} \Big|_{T_\alpha=T_I},$$

$$r^{(I)} = \left( \frac{\partial F_s}{\partial T_\alpha} \right)_{p^0} \Big|_{T_\alpha=T_I}, \quad (6.5)$$

$$S^{(I)} = \frac{I^0}{\rho c (u_r^{(I)})^0 ((T_{sr}^{(I)})^0 - T_I)},$$

$$l^{(I)} = \frac{(u_r^{(I)})^0}{\alpha \alpha},$$

$$\omega^{(I)} = \frac{\alpha\Omega}{[(u_r^{(I)})^0]^2}.$$

Здесь  $\rho$  и  $c$  — плотность и удельная теплоемкость конденсированной фазы,  $\alpha$  — коэффициент поглощения излучения в толще пороха.

Сравнивая (6.1) и (6.4) заключаем, что определенные выше функции отклика зависят от разных параметров, характеризующих горящий порох, а именно:

— функция  $U^{(a)}$  определяется параметрами  $k^{(a)}$  и  $r^{(a)}$  и зависит от безразмерной частоты  $\omega^{(a)}$ ;

— функция  $U_r^{(a)}$  определяется параметрами  $k^{(I)}$  и  $r^{(I)}$  и зависит от безразмерной частоты  $\omega^{(I)}$ .

Очевидно, что в общем случае невозможно получить аналитическую связь между двумя функциями, зависящими от разных аргументов и характеризующихся различными параметрами. Однако можно найти аналитическую

зависимость между функцией отклика на меняющееся давление  $U^{(a)}$ , измеренной при начальной температуре  $T_a$ , и функцией отклика на осциллирующий радиационный поток  $U_r^{(e)}$ , определенной при более низкой начальной температуре  $T_e$ .

Выберем новую начальную температуру  $T_e$  таким образом, чтобы стационарная скорость горения при этой начальной температуре и при наличии постоянного теплового потока  $I^0$  равнялась стационарной скорости горения при начальной температуре  $T_a$  в отсутствие теплового потока, т. е.

$$u_r^0(p, T_e, I^0) = u^0(p, T_a). \quad (6.6)$$

Это равенство будет выполнено, если

$$T_e = T_a - I^0 / \rho c u^0. \quad (6.7)$$

Одновременно выполняется равенство между температурами поверхности в рассматриваемых режимах

$$T_{rs}^0(p, T_e, I^0) = T_s^0(p, T_a).$$

Кроме того, из сравнения (6.2) и (6.5) следует, что

$$k^{(e)} = k^{(a)}, \quad r^{(e)} = r^{(a)}, \quad \omega^{(e)} = \omega^{(a)}.$$

Таким образом, отклик скорости горения на радиационный тепловой поток, измеренный при температуре (6.7), выражается через те же параметры, что и отклик скорости горения на осциллирующее давление, измеренный при температуре  $T_a$ , а именно

$$U_r^{(e)} = \frac{\beta \Delta}{[1 + l^{(a)}(z^{(a)} - 1)]D^{(a)} + \beta \Delta / z^{(a)}}. \quad (6.8)$$

Здесь произведение  $k^{(a)}S^{(a)}$  выражено через температурный коэффициент скорости горения при температуре  $T_a$  и разность начальных температур  $\Delta = T_a - T_e$ .

Сравнивая (6.1) и (6.8), можно выразить отклик на меняющееся давление через отклик на переменный радиационный тепловой поток:

$$U_p^{(a)} = \frac{[\nu + \delta^{(a)}(z^{(a)} - 1)][1 + l^{(a)}(z^{(a)} - 1)]}{\beta \Delta (1/U_r^{(e)} - 1/z^{(a)})}. \quad (6.9)$$

Отметим, что применение этого соотношения требует предварительного определения длины

свободного пробега излучения в конденсированной фазе, ее коэффициента температуропроводности, параметров стационарного горения пороха  $\nu$  и  $\delta$ , а также температурного коэффициента скорости горения  $\beta$ .

Разность начальных температур должна задаваться в эксперименте исходя из возможностей установки. Наиболее простой путь выбора этой величины включает следующие этапы:

— при заданных давлении  $p^0$  и начальной температуре  $T_a$  найти стационарную скорость горения в отсутствие излучения  $u^0$ ,

— при том же давлении понизить температуру образца до некоторой, выбранной исследователем, новой начальной температуры  $T_e$ ,

— измерить скорость горения при этой начальной температуре при наличии постоянно внешнего радиационного потока  $u_r^0$  и подобрать согласно (6.6) интенсивность источника так, чтобы выполнялось равенство  $u_r^0 = u^0$ .

Применяемые в настоящее время источники излучения имеют мощность порядка мегаватта на квадратный метр. В зависимости от давления при обычных значениях плотности и теплоемкости пороха разность начальных температур при проведении измерений составляет от десятков до двух сотен градусов.

## 7. УЧЕТ ИНЕРЦИОННОСТИ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

В предыдущем изложении отклик скорости горения на осциллирующее давление исследовался в рамках ЗН-теории, в которой учитывается только тепловая инерционность зоны подогрева конденсированной фазы ( $t_c$ -приближение). Критериями применимости теории обычно считаются неравенства

$$t_c \gg t_l, \quad t_p \gg t_l, \quad (7.1)$$

где  $t_c$  и  $t_l$  — времена релаксации соответственно зоны прогрева конденсированной фазы и всех остальных малоинерционных зон, влияющих на зону горения;  $t_p$  — характерное время изменения давления. Напомним, что

$$t_c \sim \alpha / (u^0)^2. \quad (7.2)$$

Выход за рамки ЗН-теории необходим по крайней мере по трем причинам.

Во-первых, акустический резонанс, как правило, выражен довольно ярко. Следствием этого является, как показано в § 2, сильная зависимость функции отклика от малых изменений определяющих эту функцию параметров.

Можно ожидать, что учет малоинерционных зон также приведет к существенным поправкам.

Во-вторых, при малых значениях параметра  $r$  безразмерная частота собственных колебаний  $\omega_n$  оказывается величиной много большей единицы. Это означает, что характерное время тепловой перестройки конденсированной фазы оказывается гораздо меньше  $t_c$ . В рассматриваемом случае оно равно  $t_c/\omega_n$  и соответственно первое неравенство (7.1) должно быть заменено более жестким:

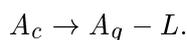
$$t_c/\omega_n \gg t_l. \quad (7.3)$$

Третья причина носит чисто математический характер. Пренебрежение инерционностью малоинерционных зон означает, что в нестационарных уравнениях, описывающих релаксацию этих зон, не учитываются частные производные по времени, поскольку они входят в уравнения с относительно малым весом, определяемым множителем  $t_l/t_c$ . Такая операция не является математически корректной и должна каждый раз подвергаться тщательному анализу.

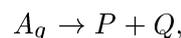
Очевидно, что теория, учитывающая тепловую и кинетическую инерционность газовой фазы и зоны превращения в конденсированном веществе, может привести к существенным поправкам к результатам, полученным в  $t_c$ -приближении.

Во введении уже говорилось, что большая сложность механизма горения пороха не позволяет математически корректно сформулировать какую-либо модель, в которой бы достаточно точно описывались малоинерционные зоны. Попытки учета инерционности реакционного слоя конденсированной и газовой фаз были предприняты в [31–35]. В этих работах, естественно, применялся ряд приближений, справедливость которых проконтролировать трудно.

Наиболее простой и, по-видимому, пока единственной, физически обоснованной моделью горения газифицирующихся конденсированных систем является модель А. Ф. Беляева [36, 37]. Она предполагает нагрев конденсированного вещества  $A_c$  до некоторой температуры поверхности и его последующее испарение (или сублимацию) с тепловым эффектом  $L$ :



Индексы  $s$  и  $g$  относятся соответственно к конденсированной и газовой фазам. Продукт реакции  $P$  получается в результате газовой фазной реакции химического превращения первого порядка:



где  $Q$  — тепловой эффект этого процесса.

Численное исследование функции отклика с учетом инерционности газовой фазы в рамках этой модели было проведено в [38]. В дальнейшем оказалось, что модель поддается и аналитическому подходу, естественно при введении некоторых упрощающих предположений [39, 40]. Главное из них — пренебрежение толщиной зоны реакции в газовой фазе. Это обычная процедура в теории горения. Она хорошо обоснована при большой энергии активации газовой фазной реакции. Возможность аналитического рассмотрения поставленной задачи связана с физически разумными предположениями о независимости от температуры теплофизических характеристик конденсированной фазы и комплекса  $D_g \rho_g^2$ , где  $D_g$ ,  $\rho_g$  — коэффициент диффузии и плотность газа. В этом случае переход к лагранжевым координатам позволяет свести задачу к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отсылая читателя за деталями к оригинальным работам, укажем здесь лишь новые безразмерные параметры, которые характеризуют инерционность газовой фазы. Это, прежде всего, отношение  $t_g/t_c$ , которое может быть записано в виде

$$\sigma = D_g \rho_g^2 / \alpha \rho_c^2.$$

Эта величина пропорциональна давлению и при нормальных условиях составляет примерно  $10^{-3}$ . Зона прогрева газовой фазы характеризуется ее безразмерной шириной и относительным перепадом температур:

$$b = \exp \xi_f^0, \quad g = (T_b^0 - T_s^0) / (T_s^0 - T_a).$$

Здесь  $\xi_f^0$  — массовая координата фронта химического превращения в газовой фазе, отсчитанная от поверхности конденсированной фазы,  $T_b^0$  — температура горения в стационарном режиме. Теплофизические свойства газа определены параметром  $\Gamma = \gamma / (\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — постоянная адиабаты.

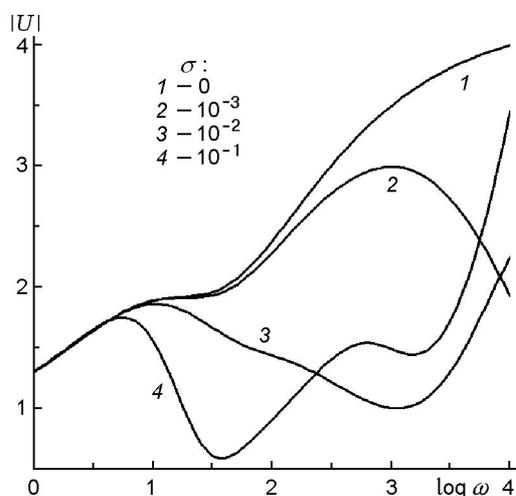


Рис. 11. Влияние параметра  $\sigma$  на модуль функции отклика ( $k = 0.85$ ,  $r = 0.0429$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 2.28$ ,  $g = 6.15$ ,  $\Gamma = 8.94$ )

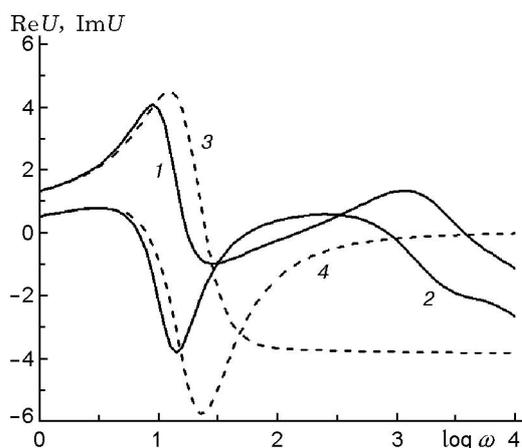


Рис. 12. Вещественная (1, 3) и мнимая (2, 4) части функции отклика ( $k = 1.15$ ,  $r = 0.0578$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 2.11$ ,  $g = 4.03$ ,  $\Gamma = 8.94$ ):

1, 2 —  $p = 4 \cdot 10^6$  Па,  $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ , 3, 4 —  $\sigma = 0$

Рис. 11 иллюстрирует влияние инерционности газовой фазы на модуль отклика скорости горения. Видно, что инерционность газовой фазы проявляется, естественно, при высоких частотах, причем тем сильнее, чем выше значение параметра  $\sigma$ .

На рис. 12 показаны вещественная и мнимая части отклика скорости горения для системы, теплофизические и кинетические параметры которой приведены в работе [38]. Кривые 1 и 2 — соответственно  $\text{Re}U$  и  $\text{Im}U$  при давлении  $4 \cdot 10^6$  Па ( $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ ), кривые 3 и 4 — те же величины в приближении  $\sigma = 0$ . Детальное

описание расчета границы устойчивости стационарного режима горения, функции отклика и акустической проводимости при учете тепловой инерционности газовой фазы можно найти в [39–41].

## ВЫВОДЫ

Представленные в обзоре теоретические результаты исследования горения газифицирующихся конденсированных систем в условиях переменного давления приводят к следующим основным выводам:

- явление очень сложное и даже в простейшей постановке (ЗН-теория) характеризуется многообразием возможных режимов,
- последовательное рассмотрение установившихся колебательных и переходных режимов в камере сгорания ракетного двигателя возможно только при учете нелинейности отклика скорости горения на меняющееся давление.

Можно указать несколько направлений продолжения исследований в этой области теории горения, например:

- разработка моделей горения газифицирующихся конденсированных систем с физически обоснованным подходом к фазовому переходу, осложненному химическим превращением,
- выход за рамки ЗН-теории,
- исследование линейных и нелинейных функций отклика на переменный тангенциальный поток продуктов сгорания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ // Журн. эксперим. и теор. физики. 1942. Т. 12, вып. 11/12. С. 498–524.
2. Новожилов Б. В. Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 4. С. 157–160.
3. Новожилов Б. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 141–144.
4. Новожилов Б. В. Теория нестационарного горения гомогенных порохов // Физика горения и взрыва. 1968. Т. 4, № 4. С. 482–493.
5. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. (Перевод: AFSC FTD-MD-24-317-74).

6. **Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б.** Теория нестационарного горения пороха. М.: Наука, 1975.
7. **Novozhilov B. V.** Theory of nonsteady burning and combustion stability of solid propellants by the Zeldovich — Novozhilov method // *Combustion Stability of Solid-Propellant* / L. De Luca, E. W. Price, M. Summerfield (Eds). (Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 143). Washington: AIAA, 1992. P. 601–641.
8. **Combustion Stability of Solid-Propellant** / L. De Luca, E. W. Price, M. Summerfield (Eds). (Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 143). Washington: AIAA, 1992.
9. **Лейпунский О. И.** К вопросу о физических основах внутренней баллистики реактивных снарядов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1945.
10. **Теория горения порохов и взрывчатых веществ** / Под ред. О. И. Лейпунского и Ю. В. Фролова. М.: Наука, 1982.
11. **Новожилов Б. В.** Об акустическом резонансе при горении порохов // *Физика горения и взрыва*. 2000. Т. 36, № 1. С. 5–11.
12. **Гостинцев Ю. А., Похил П. Ф., Суханов Л. А.** Полная система уравнений для нестационарных процессов при горении пороха в ползатмкнutom объеме // *Докл. АН СССР*. 1970. Т. 195, № 1. С. 137–139.
13. **Culick F. E. C.** A review of calculations for unsteady burning of solid propellant // *AIAA Journal*. 1968. V. 6. P. 2241–2255.
14. **Denison M. R., Baum E.** A simplified model of unstable burning in solid propellants // *ARS Journal*. 1961. V. 31. P. 1112–1122.
15. **Culick F. E. C., Yang V.** Prediction of the stability of unsteady motions in solid-propellant rocket motors // *Combustion Stability of Solid-Propellant* / L. De Luca, E. W. Price, M. Summerfield (Eds). (Progress in Astronautics and Aeronautics, V. 143). Washington: AIAA, 1992. P. 719–780.
16. **Новожилов Б. В.** Нелинейные колебания скорости горения // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. 1966. № 5. С. 31–41.
17. **Novozhilov B. V.** Second harmonic nonlinear resonance in propellant combustion // *Twenty-Fourth Symp. (Intern.) on Combustion*. Pittsburgh, PA: The Combustion Inst., 1992. P. 1939–1945.
18. **Novozhilov B. V.** Nonlinear combustion in solid propellant rocket motors // *Combustion of Energetic Materials* / K. K. Kuo, L. T. De Luca (Eds). New York, Wallingford (UK): Begel House, 2002. P. 793–802.
19. **Novozhilov B. V., Kohno M., Maruizumi H., Shimada T.** Solid propellant burning rate response functions of higher orders // *Proc. of the Twentieth Intern. Symp. on Space Technology and Science*. Gifu, 1996. V. 1. P. 7–12.
20. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
21. **Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.** Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
22. **Новожилов Б. В.** Хаотизация нестационарной скорости горения пороха // *Хим. физика*. 2004. Т. 23, № 5. С. 68–74.
23. **Беляев А. А., Каганова З. И., Новожилов Б. В.** Горение летучих конденсированных систем за границей устойчивости стационарного режима // *Физика горения и взрыва*. 2004. Т. 40, № 4. С. 60–66.
24. **Mihlfeith C. M., Baer A. D., Ryan N. W.** Propellant combustion instability as measured by combustion recoil // *AIAA Journal*. 1972. V. 10, N 10. P. 1280–1285.
25. **De Luca L.** Solid propellant ignition and other unsteady combustion phenomena induced by radiation: Ph. D. Thesis. Princeton, NJ, 1976.
26. **Son S. F., Brewster M. Q.** Linear burning rate dynamics of solid subjected to pressure or external radiant heat flux oscillations // *J. Propulsion and Power*. 1992. V. 9, N 2. P. 222–2321.
27. **Кискин А. Б.** Способ определения отклика скорости горения топлива на изменение давления с помощью излучения // *Физика горения и взрыва*. 1993. Т. 29, № 3. С. 41–43.
28. **Ассовский И. Г., Истратов А. Г.** Горение порохов при световом облучении // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. 1971. № 6. С. 70–77.
29. **Новожилов Б. В., Коно М., Морита Т.** Связь между откликами скорости горения пороха на гармонически меняющиеся давление и радиационный тепловой поток // *Физика горения и взрыва*. 2003. Т. 39, № 1. С. 79–86.
30. **Novozhilov B. V., Kohno M., Morita T.** Relationship between pressure- and radiant-driven propellant burning rate response // *Rocket Propulsion: Present and Future* / L. T. De Luca (Ed.). Pozzuoli, Italy, 2002. Paper 23.
31. **Вилюнов В. Н., Руднев А. П.** Влияние реакций конденсированной фазы пороха на устойчивость стационарного режима горения // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. 1973. № 5. С. 102–111.
32. **Романов О. Я.** О нестационарной скорости горения пороха // *Физика горения и взрыва*. 1975. Т. 11, № 2. С. 188–198.
33. **T'ien J. S.** Oscillatory burning of solid propellants including gas phase time lag // *Combust. Sci. Technol.* 1972. V. 5, N 2. P. 47–54.
34. **Clavin P., Lasimi D.** Theoretical analysis of oscillatory burning of homogeneous solid propellant including non-steady gas effects // *Combust. Sci. Technol.* 1992. V. 83, N 1. P. 1–32.
35. **Zebrowski M., Brewster M. Q.** Theory of nonsteady combustion of solids: investigation of quasisteady // *J. Propulsion and Power*. 1996. V. 12, N 3. P. 564–573.

36. **Беляев А. Ф.** О горении взрывчатых веществ // Журн. физ. хим. 1938. Т. 12, № 1. С. 93–99.
37. **Беляев А. Ф.** О горении нитрогликоля // Журн. физ. хим. 1940. Т. 14, № 8. С. 1009–1025.
38. **Allison C. B., Feath G. M.** Open-loop response of a burning liquid monopropellant // AIAA Journal. 1975. V. 13, N 10. P. 1287–1294.
39. **Новожилов Б. В.** Влияние инерционности газовой фазы на устойчивость горения летучих конденсированных систем // Хим. физика. 1988. Т. 7, № 3. С. 388–396.
40. **Новожилов Б. В.** Акустическая проводимость поверхности горящего конденсированного вещества // Хим. физика. 1991. Т. 10, № 11. С. 1518–1532.
41. **Новожилов Б. В.** Горение летучих конденсированных систем при гармонически меняющемся давлении // Хим. физика. 1989. Т. 8, № 1. С. 102–112.

*Поступила в редакцию 22/II 2005 г.*

---