

## АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ПРИМЕНИМОСТИ ОБРАТНЫХ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ

В. А. Архипов, Д. А. Зимин

НИИ прикладной математики и механики при ТГУ, 634050 Томск

Представлены результаты анализа условий применимости обратных методов восстановления нестационарной скорости горения твердых топлив, проведенного на основе исследования чувствительности давления в камере сгорания к вариациям скорости горения. Рассмотрены термодинамическое и одномерное газодинамическое приближения. Показано, что термодинамическая постановка обратной задачи применима для исследования процессов с характерными временами не менее 0,2 времени релаксации свободного объема камеры сгорания. Учет одномерных эффектов возможен и целесообразен при обработке экспериментов по торцевому горению быстрогорящих топлив.

### ВВЕДЕНИЕ

При конструировании твердотопливных энергоустановок с глубоким регулированием модуля тяги (в том числе и двигателей многократного включения) необходимо точное прогнозирование мгновенного газоприхода в условиях сильных возмущений внешних параметров. В настоящее время для расчета нестационарной скорости горения существует целый ряд подходов: применение квазистационарной зависимости [1], различных аппроксимаций (типа формулы Von Elbe) [2], использование феноменологической теории Зельдовича — Новожилова (ZN-модель) [3] или одной из многочисленных моделей пламени (FM-модели) [4].

Для практической реализации этих подходов необходимы выбор адекватной модели пламени (от бесконечно тонкой газовой зоны до приближения камеры идеального смешения), корректный учет инерционности газовой фазы и информация о значениях целого набора физико-химических констант. Уже само разнообразие подходов красноречиво свидетельствует о том, что, несмотря на существенный прогресс в целом, теория нестационарного горения далека от своего завершения, в частности для новых смесевых топливных композиций. До настоящего времени в практике используются эмпирические зависимости для критерия гашения при сбросе давления. Поэтому понятен интерес к экспериментальным методам измерения нестационарной скорости горения.

При реализации метода решения обратной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ-метода) нестационарный газоприход определяется по давлению, измеренному в камере сгорания, на основе термодинамической (нульмерной) модели процесса [5]. В связи с отработкой методики измерений и возможностью последующего решения обратной задачи важным вопросом является определение степени чувствительности давления к изменению газоприхода. Для разрешимости обратной задачи необходимо, чтобы уровень вариаций давления в ответ на изменение газоприхода был достаточным для регистрации давления с малой погрешностью. Динамика изменения давления существенно зависит от характеристик камеры, которая выступает промежуточным звеном между поверхностью горения и датчиком давления и может ослаблять, демпфировать или, напротив, усиливать воздействие горения на давление в точке измерения. Временное разрешение ОЗВБ-метода, таким образом, связано не только с собственной частотой датчика, но и с характерным временем камеры, соответствующим принятой постановке ОЗВБ. В случае нульмерной модели — это время релаксации свободного объема камеры сгорания ( $t_V$ ), в одномерной постановке — время распространения возмущений ( $t_g$ ). Очевидно, что чувствительность давления к скорости горения зависит также от характерного времени ее изменения. Поэтому для анализа возможности использования ОЗВБ-метода и установления границ его

применимости представляет интерес исследование его амплитудно-частотных характеристик.

В настоящей работе рассматривается функция отклика давления на возмущение скорости горения

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p/p}{\Delta u/u} \quad (1)$$

в зависимости от частоты и амплитуды возмущающих колебаний и от параметров камеры. Анализируются термодинамическое (нульмерное) и одномерное газодинамическое приближения. Внимание акцентируется на процессах, происходящих в камере сгорания, колебания газоприхода считаются заданными, а обратное воздействие давления на скорость горения, в том числе резонансные эффекты нестационарного горения, не рассматриваются. Аналогично в большинстве работ по исследованию нестационарного горения определяют функцию отклика скорости горения по давлению, задавая внешнее возмущение давления и не рассматривая обратное влияние горения [6].

### ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим полужамкнутый объем, в котором горит образец твердого топлива. Давление, плотность и температуру считаем постоянными по объему. Дополнительно предположим, что процесс адиабатический. Анализ результатов численного решения с учетом уравнения сохранения энергии показал справедливость данного допущения (расхождение в рассчитанных значениях давления не превышает 4%). В этом случае связь скорости горения с давлением задается одним уравнением сохранения массы:

$$V \frac{d\rho}{dt} = \rho_p S u - \varphi \Gamma(k) F_* \rho \sqrt{RT},$$

где  $t$  — время;  $V$  — свободный объем камеры сгорания, изменение которого в переходном процессе не учитывается;  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  — давление, плотность и температура продуктов сгорания, осредненные по объему камеры;  $S$  — площадь поверхности горения;  $\rho_p$ ,  $u$  — плотность и линейная скорость горения твердого топлива;  $k$ ,  $R$  — показатель адиабаты и газовая постоянная продуктов сгорания;  $\varphi$  — коэффициент расхода сопла;  $\Gamma(k) = \sqrt{k} [2/(k+1)]^{(k+1)/2(k-1)}$ ;  $F_*$  — площадь критического сечения сопла. Перейдем к безразмерным переменным  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\bar{u} = u/u_0$ ,  $\bar{T} = T/T_0$ ,  $\tau = t/t_V$ . Здесь  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,

$u_0$  — параметры стационарного режима,  $t_V = V/\varphi \Gamma(k) F_* \sqrt{RT_0}$  — время релаксации свободного объема камеры сгорания. Имеем

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\tau} = \bar{u} - \bar{\rho} \sqrt{\bar{T}}. \quad (2)$$

Внесем возмущение  $\Delta \bar{u}$  в скорость горения, и перепишем уравнение (2) для величин  $\bar{\rho} = 1 + \Delta \bar{\rho}$  и  $\bar{T} = 1 + \Delta \bar{T}$ :

$$\frac{d\Delta \bar{\rho}}{d\tau} = 1 + \Delta \bar{u} - (1 + \Delta \bar{\rho}) \sqrt{(1 + \Delta \bar{T})}. \quad (3)$$

Учитывая предположение об адиабатичности процесса, запишем соотношения, связывающие плотность с температурой и давлением:

$1 + \Delta \bar{\rho} = (1 + \Delta \bar{T})^{1/(k-1)}$ ,  $1 + \Delta \bar{p} = (1 + \Delta \bar{\rho})^k$ , где  $\bar{p}$  — безразмерное давление (отнесенное к его стационарному значению). Разлагая их правые части в степенной ряд и ограничиваясь первыми его членами, получим

$$\Delta \bar{T} \simeq (k-1) \Delta \bar{\rho}, \quad \Delta \bar{p} \simeq k \Delta \bar{\rho}. \quad (4)$$

Исключим из (3)  $\Delta \bar{T}$ , разложив радикал в ряд, ограничившись первым членом разложения и используя соотношения (4):

$$(1 + \Delta \bar{T})^{1/2} \simeq 1 + \frac{\Delta \bar{T}}{2} \simeq 1 + \frac{k-1}{2} \Delta \bar{\rho}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем дифференциальное уравнение для вариаций плотности:

$$\frac{d\Delta \bar{\rho}}{d\tau} = \Delta \bar{u} - \frac{k+1}{2} \Delta \bar{\rho}.$$

Воспользовавшись соотношениями (4), перейдем к уравнению для вариаций давления:

$$\frac{d\Delta \bar{p}}{d\tau} = k \Delta \bar{u} - \frac{k+1}{2} \Delta \bar{p}. \quad (6)$$

Для гармонического возмущения скорости горения  $\Delta u = a u_0 \sin 2\pi f t$  или, в безразмерной форме,  $\Delta \bar{u} = a \sin \omega \tau$ ,  $\omega = 2\pi f / t_V$  решение уравнения (6) имеет вид

$$\Delta \bar{p} = A \sin \omega \tau + B \cos \omega \tau,$$

где

$$A = \frac{2ka}{k+1} \left[ 1 + \left( \frac{2}{k+1} \omega \right)^2 \right]^{-1},$$

$$B = - \left( \frac{2}{k+1} \right)^2 k a \omega \left[ 1 + \left( \frac{2}{k+1} \omega \right)^2 \right]^{-1}.$$

Приводя формулу для возмущения давления к гармоническому виду, окончательно получим:

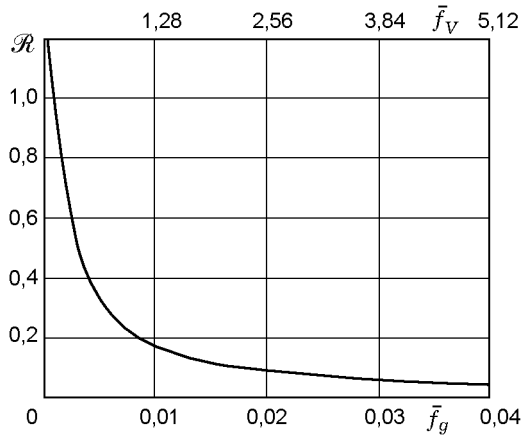


Рис. 1. Зависимость функции отклика давления на возмущения скорости горения от безразмерной частоты в нульмерном адиабатическом приближении:

$\bar{f}_V$  — термодинамическая частота,  $\bar{f}_g = fL/c_0$  — газодинамическая,  $k = 1,245$

$$\Delta \bar{p} = \Delta \bar{p}_{\max} \sin \left( \omega t + \arctg \frac{2\omega}{k-1} \right), \quad (7)$$

$$\Delta \bar{p}_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{2ka}{k+1} \left[ 1 + \frac{2\omega}{k+1} \right]^{-1/2}.$$

Функция отклика, которая через полученную величину максимальной вариации давления выражается в виде  $\mathcal{R} = \Delta \bar{p}_{\max}/a$ , представлена на рис. 1. Видно, что с увеличением частоты возмущения чувствительность давления сильно ослабевает:  $\mathcal{R} \approx 0,05$  при значении безразмерной термодинамической частоты  $\bar{f}_V = f t_V \approx 4,5$ . Таким образом, в рамках термодинамического приближения обратная задача будет разрешима при периоде колебаний газозприхода  $\approx 0,2 t_V$ .

### ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Воздействие возмущений больших частот, где существенное влияние на отклик давления могут оказывать волновые эффекты, исследовалось в рамках одномерной газодинамической постановки. Рассматривается цилиндрическая камера длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $F = 0,25\pi D^2$  ( $L \geq D$ ) с торцевым зарядом твердого топлива. задается возмущение скорости горения  $\Delta u = au \sin 2\pi ft$  и определяется отклик давления у горячей поверхности ( $x = 0$ ) и у дна камеры ( $x = L$ ). Как и в термодинамическом приближении, обратное влия-

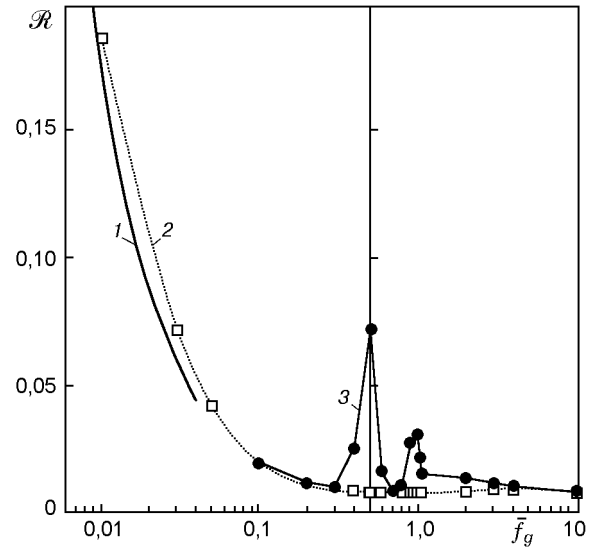


Рис. 2. Зависимость функции отклика давления у поверхности топлива ( $x = 0$ ) от безразмерной частоты:

1 — максимальная амплитуда, 2 — амплитуда первого колебания, 3 — термодинамическая адиабатическая функция отклика ( $k = 1,245$ ,  $\chi = 125$ )

ние давления на скорость горения не рассматривается. Процесс описывается системой одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, которая решалась численно методом Годунова [7].

Результаты расчетов представлены на рис. 2 в виде зависимости функции отклика от безразмерной газодинамической частоты  $\bar{f}_g = fL/c_0$  ( $c_0$  — скорость звука в покоящемся газе). На рис. 3 приведены картины развития колебаний для некоторых расчетных точек. Из рис. 2, 3 видно, что при малых частотах ( $\bar{f}_g < 0,1$ ) давление изменяется равномерно по объему (см. рис. 3,а), одномерные эффекты пренебрежимо малы. Функция отклика здесь практически совпадает с рассчитанной в термодинамическом приближении. Расхождения, связанные с различием моделей и погрешностью расчета, составляют  $\approx 1\%$  при  $\bar{f}_g = 0,01$  и увеличиваются с ростом частоты.

В области частот  $\bar{f}_g \approx 0,1 \div 1$  ярко выражены волновые явления (см. рис. 2; рис. 3,б–д). Наиболее существенные резонансные пики функции отклика у поверхности топлива имеют место при  $\bar{f}_g = 0,5$  и 1. Однако даже в этих точках значения отклика не превышают 0,08. В то же время сложность учета процессов взаимодействия волн затрудняет постановку и решение обратной задачи восста-

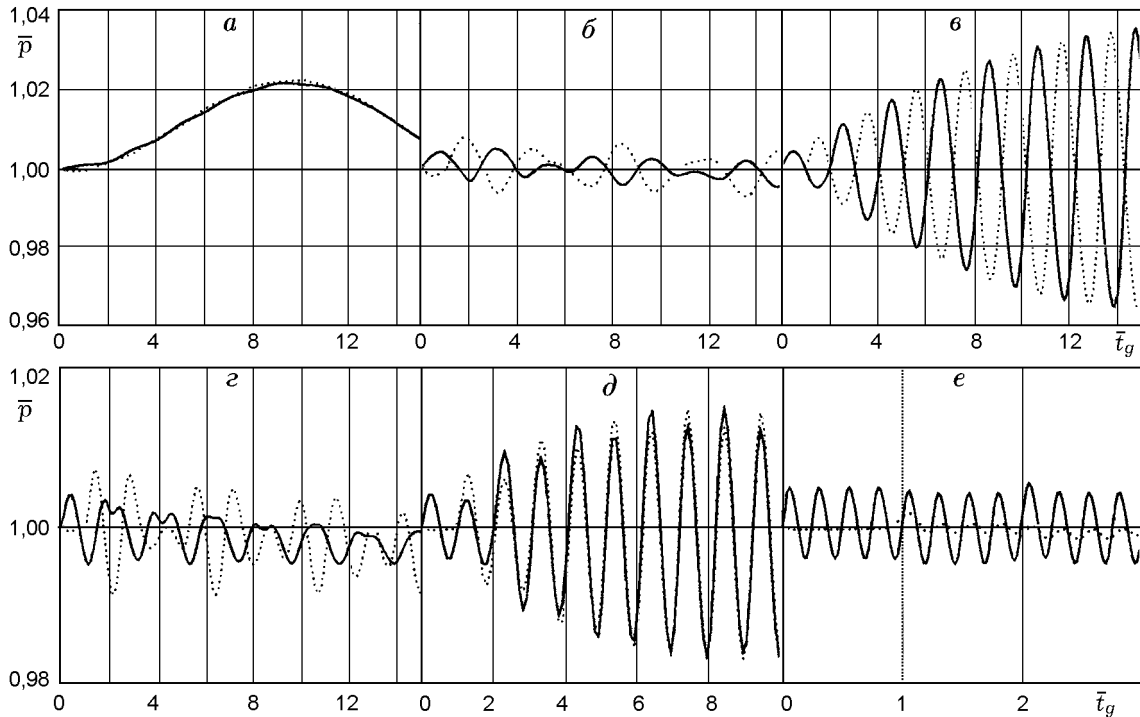


Рис. 3. Колебания давления в камере сгорания у поверхности топлива (сплошные кривые) и у дна (пунктирные) при различных значениях частоты ( $\chi = 125$ ,  $k = 1,245$ ,  $t_g = tc_0/L$ ):  $\bar{f}_g < 0,1$  (а),  $\bar{f}_g \approx 0,1 \div 1$  (б-д),  $\bar{f}_g = 10$  (е)

новления нестационарной скорости горения от времени.

При больших частотах возмущений камера оказывает демпфирующее влияние на распространяющиеся колебания давления (см. рис. 3, е). При  $\bar{f}_g = 10$  функция отклика у заднего дна практически равна нулю. Измерение давления в области частот  $\bar{f}_g = 1 \div 10$  потребует, помимо применения датчика с высоким временным разрешением, проведения газодинамического анализа для определения оптимального положения точки измерения и последующей идентификации давления в требуемой точке по измеренному давлению.

Известно, что волновые эффекты выражаются тем сильнее, чем выше число Маха. Для цилиндрической камеры это соответствует малым значениям отношения  $F/F_*$ . В то же время в рамках принятых допущений в камере с торцевым зарядом твердого топлива с характерной скоростью горения  $\approx 1$  см/с критическое истечение обеспечивается лишь при больших значениях  $F/F_*$ . Рис. 4, на котором представлены резонансные значения функции отклика давления в

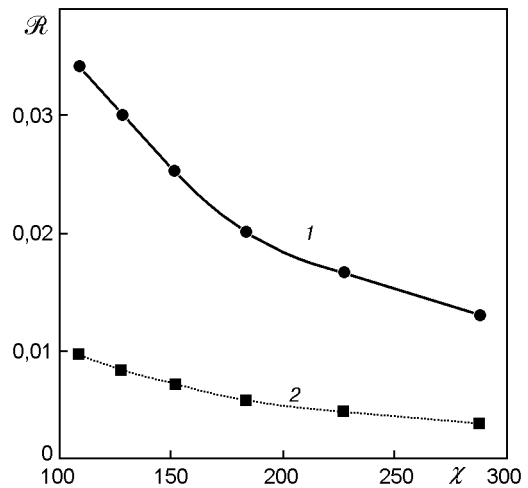


Рис. 4. Зависимость функции отклика давления у поверхности топлива ( $x = 0$ ) от параметра  $\chi \sim F/F_*$  ( $k = 1,245$ ,  $\bar{f}_g = 1$ ):

1 — максимальная амплитуда, 2 — амплитуда первого колебания

зависимости от отношения характерных времен  $\chi = t_V/(L/c_0) \sim F/F_*$ , показывает, что  $\mathcal{R} \leq 0,035$  для всех рассчитанных значений  $F/F_*$ . Однако для составов со скоростями горения  $\approx 1000$  см/с [8], обеспечивающими критическое истечение при малых значениях  $F/F_*$ , величина  $\mathcal{R}$  может быть значительной.

Проведенный анализ позволяет более четко очертить границы применимости ОЗВБ-метода и оценить влияние одномерных эффектов на точность восстановления скорости горения. При низких частотах ( $f \approx (1 \div 10)t_V^{-1}$ ) процесс хорошо описывается в рамках термодинамического приближения. В области высоких частот камера сгорания оказывает демпфирующее влияние на распространяющиеся колебания. Поэтому для исследования ОЗВБ-методом процессов с малыми характерными временами порядка  $t = (0,1 \div 1)L/c_0$ , соответствующими значениям  $f_g = 1 \div 10$ , необходимы обоснованный выбор положения датчика давления и решение обратной задачи в одномерной постановке. Учет газодинамических эффектов возможен и целесообразен при обработке экспериментов по торцевому горению быстрогорящих топлив. Для измерения газопритока при частотах, близких к резонансным частотам камеры, следует использовать другие экспериментальные методы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Райзберг Б. А., Ерохин Б. Т., Самсонов К. П. Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972.
2. Шур М. С. Нестационарное горение ТРТ при резком изменении давления в камере РДТТ // Итоги науки и техники. Авиационные и ракетные двигатели. М.: ВИНТИ, 1977. Т. 2. С. 129–175.
3. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
4. De Luca L. Theory of burning and combustion stability of solid propellants by flame models // Nonsteady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants. (Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 143) / L. De Luca, E. W. Price, and M. Summerfield (Eds). Washington: AIAA, 1992. P. 519–600.
5. Соркин Р. Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе: внутренняя баллистика. М.: Наука, 1983.
6. Krier H., T'ien J. S., Sirignano W. A., Summerfield M. Nonsteady burning phenomena of solid propellants: theory and experiments // AIAA Journal. 1968. V. 6, N 2. P. 278–285.
7. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
8. Зимин Д. А., Иценко А. Н., Хоменко Ю. П. Исследование горения заряда в полузакнутом объеме методом решения обратных задач // Материалы докл. Всерос. научно-практ. конф. «Первые окуневские чтения». СПб, 1997. С. 65–67.

*Поступила в редакцию 24/II 1999 г.,  
в окончательном варианте — 8/VII 1999 г.*