

УДК 519.6

# Кусочно-параболическая реконструкция физических переменных в методе HLL при решении уравнений релятивистской гидродинамики\*

И.М. Куликов, Д.А. Караваев

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: kulikov@ssd.sccc.ru (Куликов И.М.), kda@opg.sccc.ru (Караваев Д.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 16, 2023.

**Куликов И.М., Караваев Д.А.** Кусочно-параболическая реконструкция физических переменных в методе HLL при решении уравнений релятивистской гидродинамики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 57–75.

В статье изложена одна конструкция оригинального метода Harten–Lax–van Leer (HLL) для решения задач релятивистской гидродинамики с использованием кусочно-параболического представления физических переменных. Такое представление является оптимальным в части баланса алгоритмической сложности и диссипации между кусочно-линейным и кусочно-кубическим представлениями. Построенный численный метод позволяет воспроизводить решения с малой диссипацией на разрывах. Метод верифицирован на задачах о распаде разрыва в одномерной и двумерной постановках. На одномерных задачах о распаде разрыва исследован порядок точности построенной численной схемы. Метод также протестирован на характерных астрофизических постановках задач: взаимодействие релятивистских струй, столкновение облаков на релятивистских скоростях, взрыв сверхновой.

DOI: 10.15372/SJNM20230105

**Ключевые слова:** математическое моделирование, вычислительная астрофизика, метод HLL.

**Kulikov I.M., Karavaev D.A.** Using piecewise-parabolic reconstruction of physics variables to constructing a low-dissipation HLL method for numerical solution of special relativistic hydrodynamics equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 57–75.

A construction of the original HLL method for solving problems of relativistic hydrodynamics by using a piecewise-parabolic reconstruction of the physical variables is described. The resulting numerical method makes it possible to reproduce the numerical solutions with small dissipation at the discontinuities. The method is verified in problems of discontinuity breakdown in one-dimensional and two-dimensional formulation. The accuracy of the numerical scheme is studied in one-dimensional discontinuity breakdown problems. The method is also tested in typical astrophysical problems: interaction of relativistic jets, collision of clouds at relativistic speeds, and supernova explosion.

**Keywords:** numerical modeling, computational astrophysics, HLL solver.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00044).

## 1. Введение

Модель специальной релятивистской гидродинамики является одним из наиболее эффективных инструментов для описания сложных высокоэнергетических феноменов от космологических масштабов до масштабов взаимодействующих частиц. Несмотря на то, что системы с сильными гравитационными полями, такие как процессы в активных ядрах галактик [1] или слияние компактных объектов [2], производящие гравитационные волны, требуют привлечения общей теории относительности, тем не менее большое число феноменов не связано с сильным искривлением пространства–времени (“spacetime” в зарубежной литературе), но имеют скорость, сопоставимую со скоростью света. К таким феноменам можно отнести гамма-всплески [3], пульсары [4, 5], двойные гамма-лучи [6, 7] и взаимодействие пучков тяжелых ионов в коллайдерах [8]. Именно модель специальной релятивистской гидродинамики мы и рассмотрим в настоящей работе.

В настоящее время разработан ряд кодов, реализующих решение уравнений релятивистской гидродинамики: The Einstein Toolkit [9], CAFE-R [10], GENESIS [11], PLUTO [12], RAM [13], TESS [14], CRONOS [15]. Несмотря на наличие большого числа кодов, создание новых методик и использование их программных реализаций для проведения крупно-масштабных вычислительных экспериментов остается актуальной задачей. Ранее нами были разработаны методики для повышения порядка точности решения с использованием кусочно-параболического представления [16–18] для уравнений эйлеровой [19, 20] и релятивистской гидродинамики [21, 22]. В настоящей статье мы хотим использовать имеющийся задел для расширения HLL-метода [23–25] на решение уравнений специальной релятивистской гидродинамики.

Во втором пункте приведены уравнения релятивистской гидродинамики и численный метод для их разрешения. Третий пункт посвящен верификации построенного метода на одномерных и двумерных постановках задач. В четвертом пункте приведено исследование порядка сходимости на одномерных задачах о распаде разрыва. Пятый пункт посвящен численному моделированию релятивистских течений в трехмерной постановке, характерных для астрофизических задач. В шестом пункте мы поднимем некоторые дискуссионные вопросы в части численного решения уравнений релятивистской гидродинамики. В седьмом пункте сформулировано заключение.

## 2. Описание численного метода

Для описания релятивистского течения газа введем физические переменные:  $\rho$  — плотность,  $\vec{v}$  — вектор скорости,  $p$  — давление. Для определенности будем использовать скорость света  $c \equiv 1$ , фактор Лоренца  $\Gamma$  в этом случае определяется уравнением:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1)$$

Условие, налагаемое на скорость света, обеспечивает ограниченность модуля скорости единицей. Мы будем использовать уравнение состояния идеального газа, для чего введем специальную энтальпию  $h$ :

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. В этом случае скорость звука  $c_s$  определяется по формуле:

$$c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho h}. \quad (3)$$

Таким образом, мы рассматриваем безразмерную систему уравнений специальной релятивистской гидродинамики, и численный метод будет построен исходя из такого представления уравнений. Для записи уравнений релятивистской гидродинамики введем консервативные переменные:  $D = \Gamma\rho$  — релятивистская плотность,  $M_j = \Gamma^2\rho h v_j$  — релятивистский импульс ( $v_j$  — компоненты вектора скорости  $\vec{v}$  при  $j = 1, 2, 3$ ),  $E = (\Gamma^2\rho h - p)$  — полная релятивистская энергия.

Для использования HLL-метода запишем систему уравнений в векторной консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0. \quad (4)$$

Вектор консервативных переменных  $U$  и вектора потоков  $F_k$  определяются уравнениями:

$$U = \begin{pmatrix} D \\ M_j \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma\rho \\ \Gamma^2\rho h v_j \\ \Gamma^2\rho h - p \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} D \\ M_j \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\Gamma v_k \\ \rho h \Gamma^2 v_j v_k + p \delta_{jk} \\ \rho h \Gamma^2 v_k \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Одной из сложностей разрешения уравнений релятивистской гидродинамики является восстановление значений физических переменных из консервативных. Для этого мы будем использовать следующую процедуру:

1. Полагаем  $m = 0$ .
2. В качестве начального значения давления  $p_m$  выбираем давление на предыдущем шаге.
3. Используем значение  $p_m$  для вычисления компонент скорости  $v_k = M_k/(E + p_m)$ .
4. Пересчитываем значение фактора Лоренца  $\Gamma$  и специальной энтальпии  $h$ .
5. Пересчитываем значения функции  $f(p_m)$  и производной  $f'(p_m)$  по уравнениям:

$$f(p) = \Gamma^2\rho h - p - E = 0.$$

$$f'(p) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Gamma^2 - \frac{M^2 \Gamma^3}{(E + p)^3} \left( D + 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \Gamma \right) - 1.$$

6. Пересчитываем новое значение давление  $p_{m+1}$ :

$$p_{m+1} = p_m - \frac{f(p_m)}{f'(p_m)}.$$

7. Если  $|p_m - p_{m+1}| < \varepsilon$ , то полагаем давление  $p = p_{m+1}$  и переходим на шаг 9.
8. Увеличиваем  $m$  на единицу и переходим на шаг 3.
9. Находим компоненты скорости  $v_k = M_k/(E + p)$ , фактор Лоренца  $\Gamma$ , специальную энтальпию  $h$  и плотность  $\rho = D/\Gamma$ .

Условие сходимости итерационного процесса формулируется в виде

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} < v^2 \left( 2 - \frac{1}{h} \right). \quad (6)$$

В расчете использовалось значение  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Мы будем рассматривать прямоугольную область с равномерной сеткой по всем направлениям. Ячейки будем нумеровать дробными индексами, а соответствующие интерфейсы — целыми индексами. Для разрешения уравнений релятивистской гидродинамики будем использовать схему С.К. Годунова с потоками HLL:

$$\frac{U_{i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^n}{\tau} + \frac{F_{x,i+1,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{\text{HLL}} - F_{x,i,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^{\text{HLL}}}{h_x} + \frac{F_{y,i+\frac{1}{2},k+1,l+\frac{1}{2}}^{\text{HLL}} - F_{y,i+\frac{1}{2},k,l+\frac{1}{2}}^{\text{HLL}}}{h_y} + \frac{F_{z,i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l+1}^{\text{HLL}} - F_{z,i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l}^{\text{HLL}}}{h_z} = 0. \quad (7)$$

Схема HLL для интерфейса в терминах правой (R) и левой (L) ячеек записывается в виде

$$F^{\text{HLL}} = \frac{\lambda_R F_L - \lambda_L F_R + \lambda_R \lambda_L (U_R - U_L)}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (8)$$

где  $\lambda_R$  и  $\lambda_L$  — это крайние левые и правые собственные числа, определяемые по формулам:

$$\lambda_R = \max \left( v_{n,R} \frac{(1 - c_{s,R}^2) + c_{s,R} \Gamma_R^{-1} \omega_R}{1 - c_{s,R}^2 v_R^2}, 0 \right),$$

$$\lambda_L = \min \left( v_{n,L} \frac{(1 - c_{s,L}^2) - c_{s,L} \Gamma_L^{-1} \omega_L}{1 - c_{s,L}^2 v_L^2}, 0 \right),$$

где  $\omega = \sqrt{1 - v_n^2 - c_s^2 (v^2 - v_n^2)}$ , а под  $v_n$  понимается нормальная составляющая скорости.

Для учета случая  $\lambda_L = \lambda_R = 0$  HLL-поток записывается в виде

$$F^{\text{HLL}} = \frac{F_L + F_R}{2} + \frac{\lambda_R + \lambda_L}{2(\lambda_R - \lambda_L)} (F_L - F_R) - \frac{\lambda_L \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} (U_L - U_R)$$

и вырождается в простую формулу

$$F^{\text{HLL}} = \frac{F_L + F_R}{2}.$$

Для определения шага по времени  $\tau$  в каждой расчетной ячейке  $(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2})$  определяется ограничение сверху для максимального по модулю собственного значения

$$\lambda_{i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} = \sqrt{v^2} \frac{(1 - c_s^2) + c_s \Gamma^{-1}}{1 - c_s^2 v^2}.$$

Затем шаг по времени вычисляется из условия Куранта

$$\tau \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{h} = \text{CFL} < 1,$$

где CFL — число Куранта.

Для уменьшения диссипации численного метода мы будем использовать кусочно-параболическую реконструкцию физических переменных. Для определенности будем конструировать кусочно-параболическую функцию физической переменной  $q(x)$  на ре-

гулярной сетке с шагом  $h$  на интервале  $[x_i, x_{i+1}]$ . Для простоты будем использовать индекс  $i$ . В общем виде парабола может быть записана как

$$q(x) = q_i^L + \xi \left( \Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right),$$

где  $q_i$  — значение в центре ячейки,  $\xi = (x - x_i)h^{-1}$ ,  $\Delta q_i = q_i^L - q_i^R$  и  $q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$  при условии сохранения консервативности:

$$q_i = h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) dx.$$

Опишем конструирование параболы по шагам. На первом шаге конструируем значения  $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$ . Для избежания экстремумов функций используем формулу

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) \operatorname{sign}(\delta q_i), & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0, \\ 0, & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

После чего пересчитываем значения на границе с помощью интерполянта четвертого порядка точности:

$$q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta_m q_{i+1} - \delta_m q_i).$$

На втором шаге алгоритма начинаем конструировать саму локальную параболу с помощью формулы

$$\Delta q_i = q_i^L - q_i^R, \quad q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

В случае немонотонности локальной параболы (такое имеет место на разрывах) перестраиваем значения на границах  $q_i^L, q_i^R$  по формулам:

$$\begin{aligned} q_i^L &= q_i, \quad q_i^R = q_i, & (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) &\leq 0, \\ q_i^L &= 3q_i - 2q_i^R, & \Delta q_i q_i^{(6)} &> (\Delta q_i)^2, \\ q_i^R &= 3q_i - 2q_i^L, & \Delta q_i q_i^{(6)} &< -(\Delta q_i)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, граничные значения удовлетворяют условиям монотонности.

На третьем шаге перестроим параметры параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\Delta q_i = q_i^L - q_i^R, \quad q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

Напомним, что локальные параболы используются как составная часть задачи Римана, так как могут быть разрывны на интерфейсах.

На четвертом шаге происходит дополнительная монотонизация параболы. Для этого вводятся дополнительные поправки в параболу:

$$q_i^{L,+} = q_i - \frac{1}{4}\delta_m q_i, \quad q_i^{R,+} = q_i + \frac{1}{4}\delta_m q_i,$$

с дополнительным критерием

$$\eta = -h^2 \frac{\delta_m^2 q_{i+1} - \delta_m^2 q_{i-1}}{q_{i+1} - q_{i-1}}.$$

В случае, если выполнено одно из следующих условий:

$$|q_{i+1} - q_{i-1}| - \frac{\min(|q_{i+1}|, |q_{i-1}|, |q_{i+1}| + |q_{i-1}|)}{100} \leq 0 \quad \text{или} \quad q_{i+1}q_{i-1} > 0,$$

значений критерия  $\eta$  обнуляется. Вес, с которым будут браться в расчетную схему значения  $q_i^{L,+}$  и  $q_i^{R,+}$ , определяется по формуле

$$\hbar = \max(\min(20(\eta - 0.05), 1), 0).$$

Итоговые значения потоков на границе вычисляются по формулам:

$$q_i^{L,FINAL} = (1 - \hbar)q_i^{L,+} + \hbar q_i^L, \quad q_i^{R,FINAL} = (1 - \hbar)q_i^{R,+} + \hbar q_i^R,$$

Последние два значения и используются для определения величин  $q_i^L$  и  $q_i^R$ .

На пятом шаге происходит финальная перестройка параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\Delta q_i = q_i^L - q_i^R, \quad q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

В результате локальная парабола в каждой ячейке  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  получена. Левые и правые значения пересчитываются по формулам:

$$q_L(-\lambda_L \tau) = q_i^R - \frac{\lambda_L \tau}{2h} \left( \Delta q_i - q_i^{(6)} \left( 1 - \frac{2\lambda_L \tau}{3h} \right) \right),$$

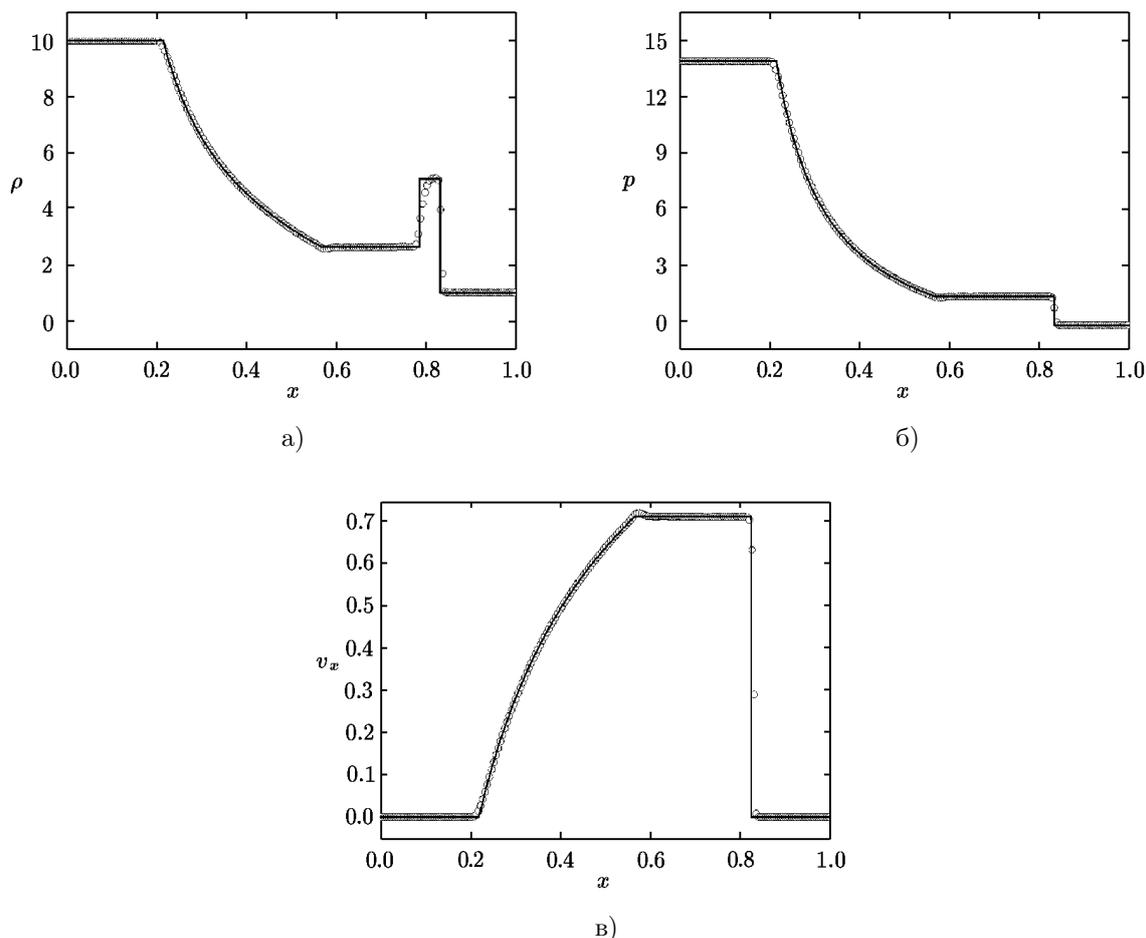
$$q_R(\lambda_R \tau) = q_i^L + \frac{\lambda_R \tau}{2h} \left( \Delta q_i + q_i^{(6)} \left( 1 - \frac{2\lambda_R \tau}{3h} \right) \right).$$

После пересчета значений физических переменных восстанавливаются вектора потоков и консервативных переменных.

### 3. Верификация численного метода

Вначале мы исследуем три одномерных теста, в которых рассмотрим динамику релятивистского газа на отрезке  $[0; 1]$  до момента времени  $t = 0.4$ . В точке  $x_0 = 0.5$  в начальный момент времени газ имеет разрыв. Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Граничные условия слева и справа поставлены как неотражающие. Для моделирования использовалось 200 ячеек для всех одномерных тестов. Такой набор тестов — суть задач 1, 2 и 4 из работы [13], и выбран, как наиболее показательный для проверки численного метода, воспроизводить все компоненты решения. Точное решение описано в работе [26] и реализовано в виде программ на языке Фортран [27].

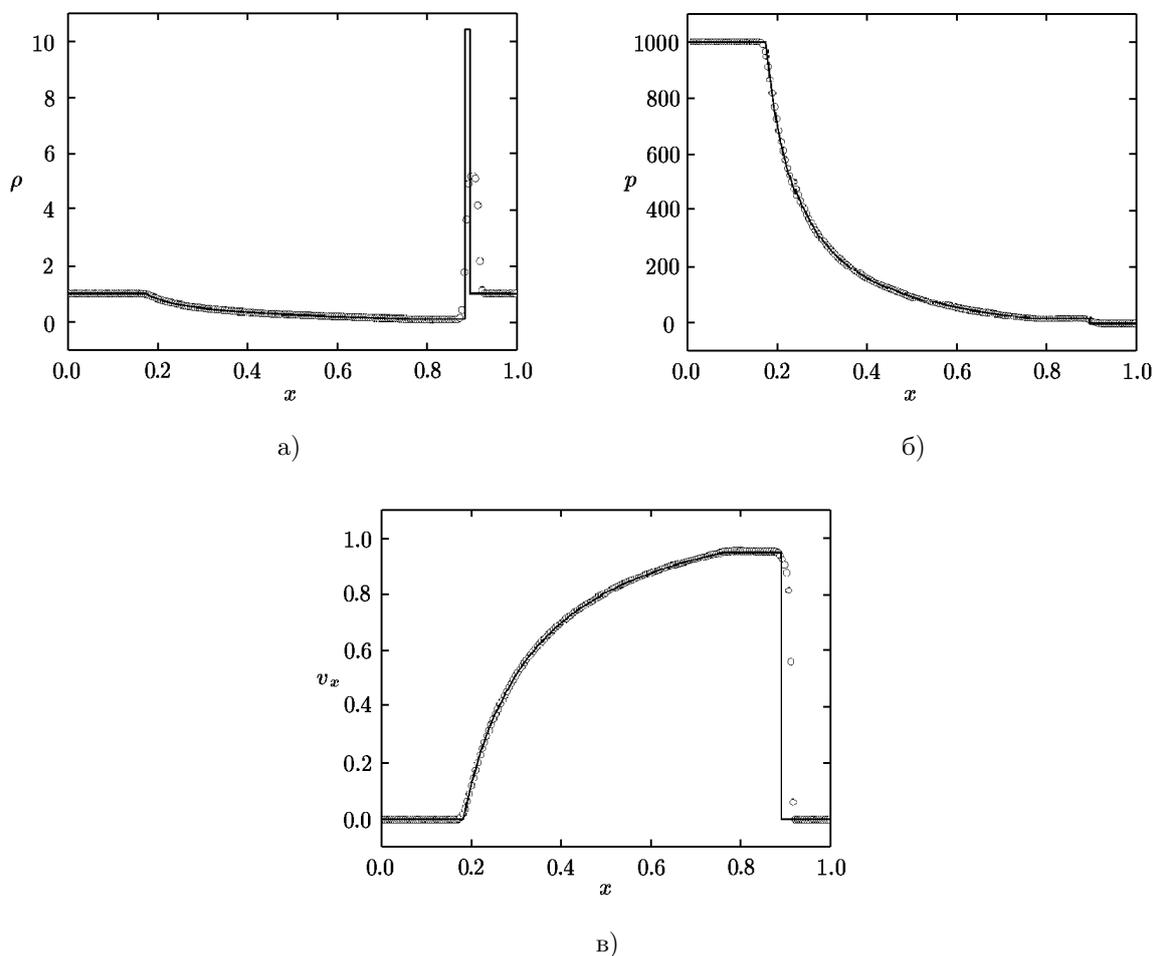
В качестве первого одномерного теста для задачи об ударной волне рассмотрим параметры газа:  $p^L = 40/3$  — давление,  $\rho^L = 10$  — плотность,  $v^L = 0$  — скорость. Справа от разрыва параметры газа:  $p^R = 10^{-8}$ ,  $\rho^R = 1$ ,  $v^R = 0$ . Результаты моделирования показаны на рисунке 1. Метод достаточно хорошо описывает все компоненты решения: ударную волну, контактный разрыв, волну разрежения.



**Рис. 1.** Одномерная задача об ударной волне; точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками для физических переменных: плотность (а), давление (б), скорость (в)

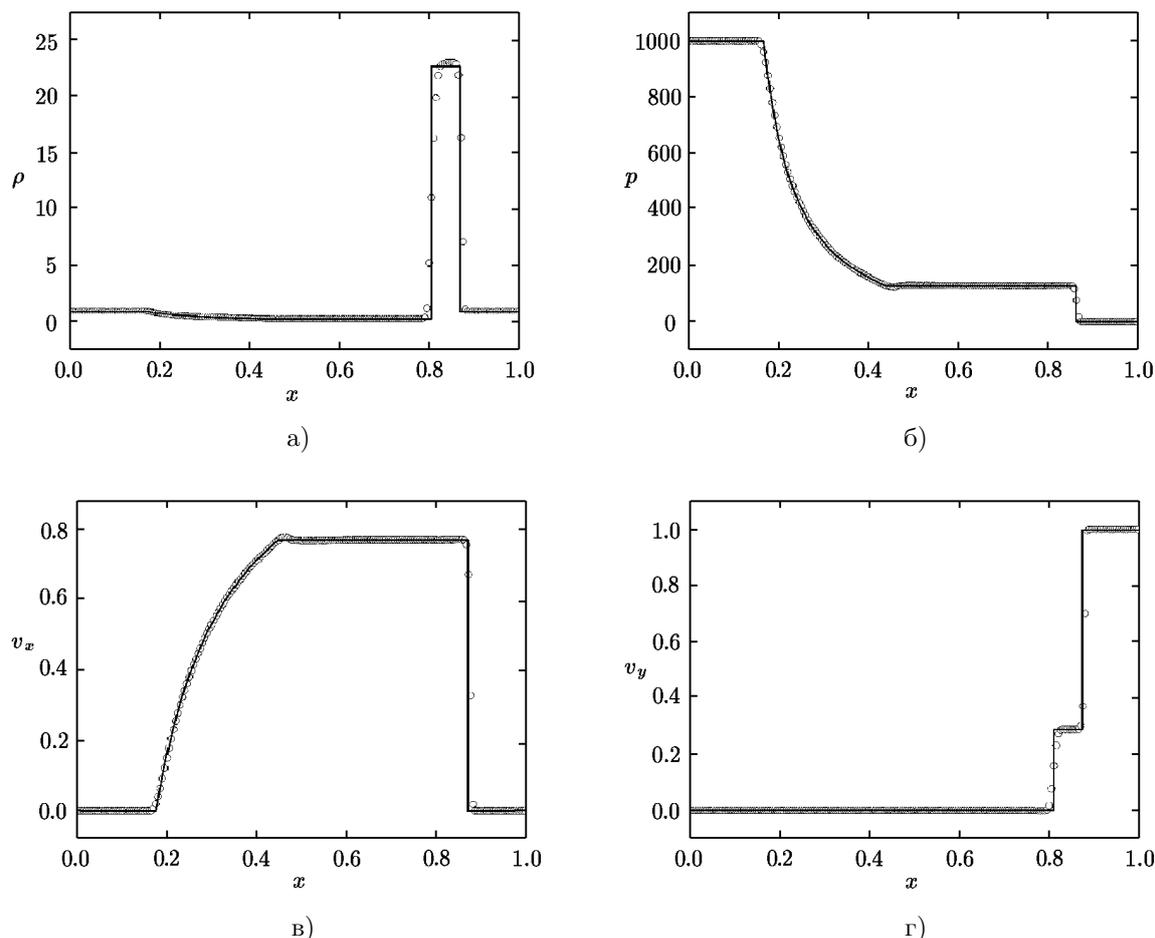
Ударная волна воспроизведена с малой диссипацией всего на две ячейки. Этот факт говорит в пользу разработанного метода. Корректно воспроизведен пик ударной волны, что видно на функции плотности. Волна разрежения также воспроизведена корректно без дополнительной диссипации. Отметим особенность в виде энтропийного следа в основании волны разрежения, что проявляется в диссипации решения в функции плотности. Отметим, что функции скорости и давления в области контактного разрыва не имеют видимых особенностей.

В качестве второго теста рассмотрим более сильную ударную волну с параметрами газа:  $p^L = 1000$  — давление,  $\rho^L = 1$  — плотность,  $v^L = 0$  — скорость. Справа от разрыва параметры газа:  $p^R = 10^{-2}$ ,  $\rho^R = 1$ ,  $v^R = 0$ . Результаты моделирования показаны на рис. 2. Особенностью теста является наличие за фронтом ударной волны очень тонкой оболочки (“shell” в зарубежной литературе), на которую приходится всего две ячейки расчетной области. При этом метод достаточно хорошо воспроизвел местоположение оболочки, в то же время малое разрешение не позволяет разрешить ее в части амплитуды. Заметим, что диссипация происходит на две ячейки перед ударной волной и на четыре перед контактным разрывом, таким образом масса газа в этой области соответствует аналитическому решению. Заметим, что функции давления и скорости воспроизведены достаточно корректно.



**Рис. 2.** Одномерная задача о сильной ударной волне; точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками для физических переменных: плотность (а), давление (б), скорость (в)

Усложним предыдущий тест наличием тангенциальной начальной скорости. Слева от разрыва параметры газа:  $p^L = 1000$  — давление,  $\rho^L = 1$  — плотность,  $v_x^L = 0$  — нормальная компонента скорости,  $v_y^L = 0$  — тангенциальная компонента скорости. Справа от разрыва параметры газа:  $p^R = 10^{-2}$ ,  $\rho^R = 1$ ,  $v_x^R = 0$ ,  $v_y^R = 0.99$ . Результаты моделирования показаны на рис. 3. В отличие от классических уравнений гидродинамики тангенциальная скорость распространения волн значительно влияет на течение газа в продольном направлении. Это связано с тем, что в случае релятивистской гидродинамики векторное сложение скоростей требует учета нелинейного множителя в виде фактора Лоренца. Эта связь требует высокого разрешения в случае наличия поперечных скоростей. Сам тест усложняется тем, что поперечная скорость задана в холодном газе, что требует от метода воспроизведения корректного взаимодействия скорости, образующейся от ударного воздействия горячего газа. Таким образом, сохраняя все сложности предыдущего теста мы добавили проверку метода на корректность взаимодействия различных компонент скорости. Заметим, что метод достаточно хорошо воспроизводит область ударной волны с диссипацией на две ячейки на фронте и на четыре ячейки за область оболочки ударной волны, что и в предыдущем тесте.



**Рис. 3.** Одномерная задача о сильной ударной волне с тангенциальной начальной скоростью; точное решение обозначено сплошной линией, численное решение — кружками для физических переменных: плотность (а), давление (б), нормальная компонента скорости (в), тангенциальная компонента скорости (г)

Исследуем задачу о распаде разрыва в двумерной постановке. Для этого рассмотрим динамику газа в области  $[-1/2; 1/2]^2$  до момента времени  $t = 0.4$ . Разобьем область на четыре части по географическим направлениям: NW —  $[-1/2; 0] \times [0; 1/2]$ , NE —  $[0; 1/2] \times [0; 1/2]$ , SW —  $[-1/2; 0] \times [-1/2; 0]$ , SE —  $[-1/2; 0] \times [0; 1/2]$ . Данный тест — суть задачи 8 из работы [13]. Определим в каждой части параметры газа следующим образом:

$$(\rho, v_x, v_y, p)^{\text{NE}} = (0.1, 0, 0, 0.01),$$

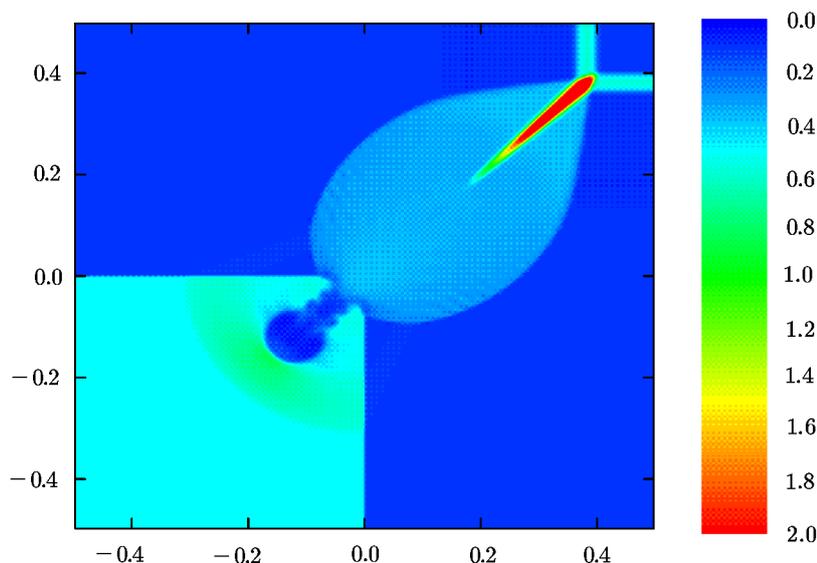
$$(\rho, v_x, v_y, p)^{\text{NW}} = (0.1, 0.99, 0, 1),$$

$$(\rho, v_x, v_y, p)^{\text{SE}} = (0.1, 0, 0.99, 1),$$

$$(\rho, v_x, v_y, p)^{\text{SW}} = (0.5, 0, 0.99, 1).$$

Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Граничные условия по всем границам поставлены как неотражающие. Для моделирования использована сетка  $200^2$  ячеек. Результаты моделирования показаны на рис. 4. Взаимодействия между областями NW/SW и SE/SW образуют контактные разрывы со скачком в тангенциальных скоростях. Эти контакт-

ные разрывы приводят к численному артефакту в области SW. Образование двух взаимодействующих ударных волн приводит к скачку плотности в области NE. Заметим, что отдельные распады разрыва мы подробно протестировали в одномерных тестах, что позволяет нам сейчас говорить только о взаимодействиях разрывов.



**Рис. 4.** Двумерный тест о распаде разрыва; распределение функции плотности в момент времени  $t = 0.4$

#### 4. Исследование порядка сходимости

Для анализа порядка сходимости метода исследуем поведение ошибки численного решения для одномерных тестов о распаде разрыва в норме  $L_1$ :

$$L_1 = \sum_i \Delta x |u_i - u(x_i)|,$$

где  $u(x_i)$  — точное решение в точке  $x_i$ ,  $u_i$  — численный результат,  $\Delta x$  — шаг равномерной сетки. Напомним, что точное решение описано в работе [26] и реализовано в виде программ на языке Фортран [27]. При использовании построенного численного метода поведение порядка сходимости для всех физических переменных примерно совпадают (см. таблицу 1) и составляет  $\approx 0.8$ . Основное падение порядка сходимости происходит на ударной волне.

Во второй задаче о распаде разрыва порядок сходимости функции давления получен единичным, а для функции нормальной скорости  $\approx 0.9$ . Основной проблемой в тесте является низкая сходимость для функции плотности (см. табл. 2).

Порядки сходимости для функций плотности, нормальной и тангенциальной скоростей для задачи об образовании сильной ударной волны с ненулевой тангенциальной скоростью примерно совпадают (см. табл. 3). Порядок сходимости для функции давления соответствует единице.

**Таблица 1.**  $L_1$ -ошибка для задачи об ударной волне

Переменная	Сетка	$L_1$ -ошибка	Порядок сходимости
Плотность	100	8.822773e-02	—
	200	4.846809e-02	0.864
	400	2.286861e-02	1.084
	800	1.394764e-02	0.713
	1600	7.522007e-03	0.892
	3200	4.321465e-03	0.801
Давление	100	4.356354e-02	—
	200	2.210112e-02	0.979
	400	1.026421e-02	1.106
	800	5.502520e-03	0.899
	1600	2.892840e-03	0.928
	3200	1.550799e-03	0.899
Нормальная компонента скорости	100	1.063316e-02	—
	200	5.733473e-03	0.891
	400	2.774129e-03	1.047
	800	1.274824e-03	1.122
	1600	6.846692e-04	0.897
	3200	3.852646e-04	0.829

**Таблица 2.**  $L_1$ -ошибка для задачи о сильной ударной волне

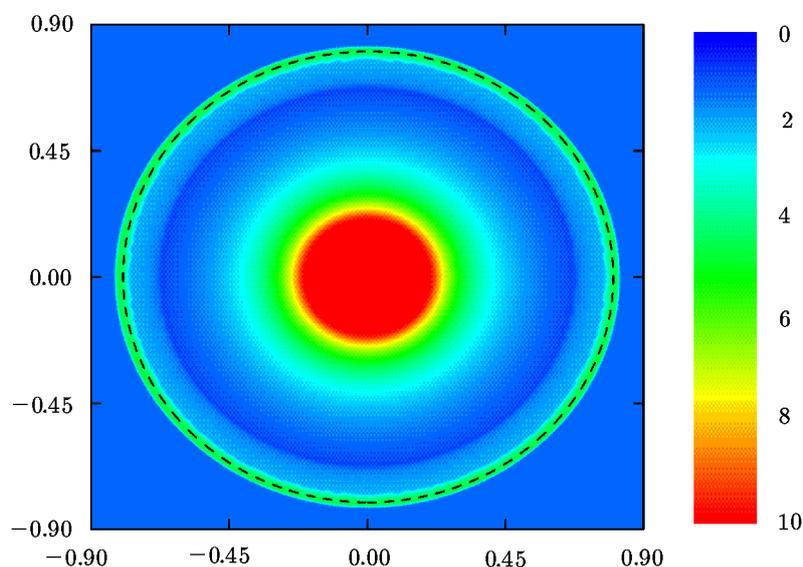
Переменная	Сетка	$L_1$ -ошибка	Порядок сходимости
Плотность	100	2.109807e-01	—
	200	1.574290e-01	0.422
	400	1.006065e-01	0.646
	800	5.609741e-02	0.843
	1600	2.902785e-02	0.950
	3200	1.773852e-02	0.712
Давление	100	3.029458e+00	—
	200	1.458033e+00	1.055
	400	7.111449e-01	1.036
	800	3.583369e-01	0.989
	1600	1.729999e-01	1.052
	3200	8.704972e-02	0.991
Нормальная компонента скорости	100	4.323775e-02	—
	200	2.226896e-02	0.957
	400	1.187582e-02	0.907
	800	5.891371e-03	1.011
	1600	2.960957e-03	0.993
	3200	1.657537e-03	0.837

**Таблица 3.**  $L_1$ -ошибка для задачи о сильной ударной волне с тангенциальной скоростью

Переменная	Сетка	$L_1$ -ошибка	Порядок сходимости
Плотность	100	5.173064e-01	—
	200	2.732212e-01	0.921
	400	1.636466e-01	0.740
	800	9.048679e-02	0.855
	1600	4.453316e-02	1.023
	3200	2.451925e-02	0.861
Давление	100	7.001348e+00	—
	200	3.525400e+00	0.991
	400	1.774772e+00	0.990
	800	9.190579e-01	0.950
	1600	4.322392e-01	1.089
	3200	2.225505e-01	0.958
Нормальная компонента скорости	100	1.508418e-02	—
	200	7.958915e-03	0.922
	400	4.290065e-03	0.892
	800	2.445735e-03	0.811
	1600	1.060617e-03	1.205
	3200	5.925693e-04	0.840
Тангенциальная компонента скорости	100	1.171137e-02	—
	200	6.205860e-03	0.916
	400	3.485474e-03	0.832
	800	1.983045e-03	0.814
	1600	8.763707e-04	1.178
	3200	4.861637e-04	0.850

## 5. Моделирование трехмерных течений релятивистского газа

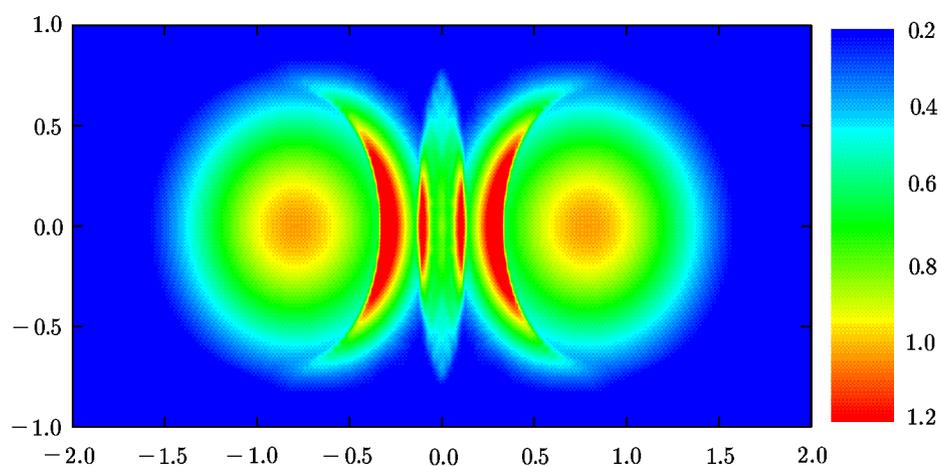
Повторим задачу об образовании ударной волны для покоящегося газа в трехмерной постановке. Для этого рассмотрим динамику газа в области  $[-1; 1]^3$  до момента времени  $t = 0.4$ . Ограничим область сферическим радиусом  $r_0 = 0.5$ . Во внутренней части области параметры газа:  $p_0 = 40/3$  — давление,  $\rho_0 = 10$  — плотность. Во внешней части области параметры газа:  $p = 10^{-8}$ ,  $\rho = 1$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Граничные условия установлены, как и для одномерной постановки задачи, в виде условий неотражения. Результаты моделирования показаны на рис. 5. Для моделирования использовалась сетка  $400^3$  ячеек.



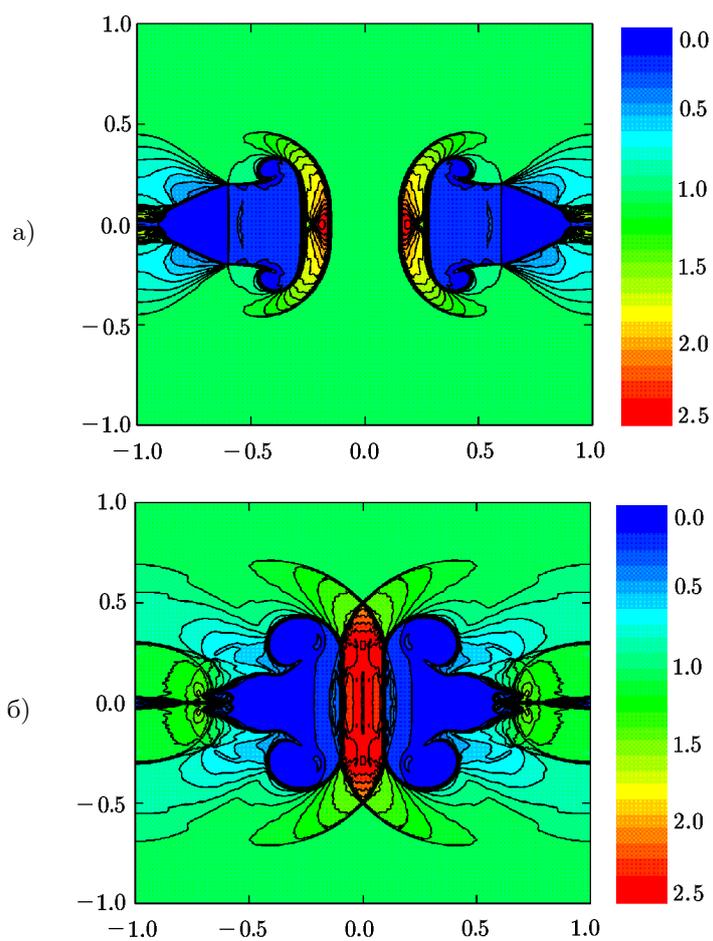
**Рис. 5.** Распределение плотности в задаче об образовании ударной волны в трехмерной постановке в момент времени  $t = 0.4$

При сохранении всех особенностей одномерного теста дополнительно проверяется инвариантность решения относительно поворота в трехмерном случае. Как видно из результатов теста, метод воспроизводит сферически симметричное решение в достаточно инвариантном виде без сеточных артефактов, что особенно важно в случае релятивистской гидродинамики. Как видно, этот пик хорошо воспроизводится, так же как и волна разрежения. Отметим, что численное решение достаточно хорошо воспроизводит фронт ударной волны, отмеченный пунктиром.

В качестве второй модельной астрофизической задачи рассмотрим центральное столкновение газовых сфер. В качестве начальных данных выберем профили плотности и скорости  $\rho(r) \sim p(r) \sim r^{-2}$ , где  $r$  — расстояние от центра газовой сферы. Скорость столкновения каждой сферы соответствует фактору Лоренца  $\Gamma = 10^4$ . Задача рассматривается в области  $[-3; 3] \times [-1.5; 1.5] \times [-1.5; 1.5]$ . В области введена равномерная сетка  $600 \times 300 \times 300$ . Результаты моделирования показаны на рис. 6. Из рис. 6 видно образование ударных волн, взаимодействующих со скоростью света. Такая задача является модельной формой задачи о столкновении черных дыр — источника гравитационных волн.



**Рис. 6.** Распределение плотности газа в экваториальной плоскости на момент времени  $t = 0.8$  в задаче о столкновении газовых сфер на релятивистских скоростях



**Рис. 7.** Распределение плотности в экваториальной плоскости в ходе эволюции галактической струи в момент времени 1000 лет (а) и 2000 лет (б)

Будем моделировать две взаимодействующие галактические струи с плотностью  $\rho_J = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$  радиуса  $R_J = 200$  парсек, движущиеся с фактором Лоренца  $\Gamma = 10$  и релятивистским числом Маха  $M = 8$ . Атмосфера галактики имеет температуру  $T_A = 10^7$  Кельвинов и плотность  $\rho_A = 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ . Показатель адиабаты выбран  $\gamma = 5/3$ . На рис. 7 представлены результаты моделирования эволюции галактических струй.

Из результатов моделирования видно, что вперед в обоих струях уходят ударные волны, скорость распространения которых соответствует скорости света. За ударным фронтом идет оболочка, разделяющая ударный фронт и горячую точку ("hotspot" в зарубежной литературе), где достигается максимальная температура. Внутренняя часть течения, соответствующая течению типа кокон ("cocoon" в зарубежной литературе), ограничена контактной поверхностью, кокон в свою очередь содержит джет. При взаимодействии струй область горячей точки становится достаточно протяженной и составляет порядка 1 кпк.

## 6. Дискуссия

В дискуссии отметим пять важных аспектов в части построения численных методов для решения задач специальной релятивистской гидродинамики:

1. Вскоре после разработки оригинального метода С.К. Годунова для численного решения уравнений гидродинамики [28] и ряда его модификаций с использованием приближенного решения задачи о распаде разрыва стали появляться работы, которые позволяют уменьшить диссипацию численного решения на разрывах. Первой такой работой является схема В.П. Колгана [29], в которой предлагается модифицировать значения гидродинамических параметров справа и слева от распада разрыва с учетом градиента функции. То есть впервые предлагается кусочно-линейное представление физических переменных. Следующей значимой работой по уменьшению диссипации методов типа С.К. Годунова был кусочно-параболический метод [30]. В части дальнейшей модификации кусочно-полиномиальных методов можно отметить два тренда: усложнение полиномов до кусочно-кубических методов [31] и использование линейной реконструкции решения внутри задачи Римана [32, 33].
2. Мы используем кусочно-параболическую реконструкцию физических переменных, хотя вычисления в схеме основаны на использовании векторов консервативных переменных и их потоков через границы ячеек. Это связано с тем, что именно они определяют термодинамическое состояние сплошной среды. Это было подчеркнуто в работах [34, 35] при исследовании точности разрывного метода Галеркина на задаче Эйнфельдта.
3. Несомненным преимуществом методов семейства HLL является отсутствие необходимости разрешения полной спектральной задачи. Для построения решения достаточно информации только о собственных значениях якобиана. Это особенно важно при использовании более сложных уравнений состояния, например, при использовании уравнения состояния Тауба–Мэтьюса [36].
4. Сложность построения полного решения спектральной задачи также связано с тем, что в задачах астрофизики в ряде работ исследуется многофазная среда и, как следствие, уравнение состояния имеет более сложную форму [37]. Также мы не рассматриваем в статье правую часть в уравнении энергии [38], хотя ее можно достаточно легко использовать в предложенной численной схеме.

5. В ряде задач значительную часть расчетной области занимают течения с высоким значением фактор Лоренца и малыми значениями давления. В этих случаях уравнение энергии используется в виде [27]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma^2 \rho h - p - \Gamma \rho) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho h \Gamma^2 v_k - \rho \Gamma v_k) = 0. \quad (9)$$

Использование такого набора консервативных переменных позволяет построить решение в подобных областях в части восстановления физических переменных. В дальнейшем мы планируем перейти к рассмотрению переопределенной системы уравнений для регуляризации численного решения.

Разумеется, все приведенные позиции не могут быть безапелляционными. Однако мы считаем, что их необходимо озвучить при обсуждении конструкции численной схемы.

## 7. Заключение

Предложена новая реконструкция оригинального метода HLL для решения задач релятивистской гидродинамики с использованием кусочно-параболического представления физических переменных. Построенный метод позволяет воспроизводить численное решение с малой диссипацией на разрывах и с высоким порядком точности на гладких решениях. Верификация численного метода проведена на тестовых задачах с аналитическим решением и на задачах, постановка которых близка к постановкам астрофизических задач.

## Литература

1. **Komissarov S., Porth O.** Numerical simulations of jets // *New Astronomy Reviews*. — 2021. — Vol. 92. — Article Number 101610.
2. **Siegel D.M., Metzger B.D.** Three-dimensional GRMHD simulations of neutrino-cooled accretion disks from Neutron star mergers // *The Astrophysical J.* — 2018. — Vol. 858. — Article Number 52.
3. **Willingale R., Meszaros P.** Gamma-ray bursts and fast transients. Multi-wavelength observations and multi-messenger signals // *Space Science Reviews*. — 2017. — Vol. 207. — P. 63–86.
4. **Barkov M., Lyutikov M., Klingler N., Bordas P.** Kinetic “jets” from fast-moving pulsars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2019. — Vol. 485. — P. 2041–2053.
5. **Olm B., Bucciantini N.** Full-3D relativistic MHD simulations of bow shock pulsar wind nebulae: dynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2019. — Vol. 484. — P. 5755–5770.
6. **Huber D., Kissmann R., Reimer A., Reimer O.** Relativistic fluid modelling of gamma-ray binaries. I. The model // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Vol. 646. — Article Number A91.
7. **Huber D., Kissmann R., Reimer O.** Relativistic fluid modelling of gamma-ray binaries. II. Application to LS 5039 // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Vol. 649. — Article Number A71.
8. **Busza W., Rajagopal K., van der Schee W.** Heavy ion collisions: the big picture and the big questions // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 2018. — Vol. 68. — P. 339–376.
9. **Loffler F., Faber J., Bentivegna E. et al.** The einstein toolkit: a community computational infrastructure for relativistic astrophysics // *Classical and Quantum Gravity*. — 2012. — Vol. 29. — Article Number 115001.

10. **Rivera-Paleo F.J., Guzman F.S.** CAFE-R: a code that solves the special relativistic radiation hydrodynamics equations // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2019. — Vol. 241. — Article Number 28.
11. **Aloy M., Ibanez J., Marti J., Muller E.** GENESIS: a high-resolution code for three-dimensional relativistic hydrodynamics // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 1999. — Vol. 122. — P. 122–151.
12. **Mignone A., Bodo G., Massaglia S. et al.** PLUTO: a numerical code for computational astrophysics // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2007. — Vol. 170. — P. 228–242.
13. **Zhang W., MacFayden A.** RAM: a relativistic adaptive mesh refinement hydrodynamics code // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2006. — Vol. 164. — P. 255–279.
14. **Duffel P., MacFayden A.** TESS: a relativistic hydrodynamics code on a moving Voronoi mesh // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2011. — Vol. 197. — Article Number 15.
15. **Huber D., Kissmann R.** Special relativistic hydrodynamics with CRONOS // *Astronomy & Astrophysics.* — 2021. — Vol. 653. — Article Number A164.
16. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2007. — Vol. 47, iss. 12. — P. 1970–1989.
17. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2008. — Vol. 48, iss. 3. — P. 477–499.
18. **Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.G., Norman M.L.** Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation // *J. of Computational Physics.* — 2009. — Vol. 228. — P. 7614–7633.
19. **Kulikov I., Vorobyov E.** Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *J. of Computational Physics.* — 2016. — Vol. 317. — P. 318–346.
20. **Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.** A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2019. — Vol. 243. — Article Number 4.
21. **Kulikov I.** A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme // *Computer Physics Communications.* — 2020. — Vol. 257. — Article Number 107532.
22. **Kulikov I.M.** A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows // *Numerical Analysis and Applications.* — 2020. — Vol. 13, iss. 2. — P. 117–126.
23. **Harten A., Lax P., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Review.* — 1983. — Vol. 25. — P. 289–315.
24. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A.** An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi processor // *Lobachevskii J. of Mathematics.* — 2018. — Vol. 39, iss. 4. — P. 543–551.
25. **Куликов И.М.** Кусочно-линейная реконструкция переменных, уменьшающая диссипацию метода HLL при решении уравнений газодинамики // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние.* — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 141–156. Перевод: Kulikov I.M. A piecewise-linear reconstruction to reduce the dissipation of the HLL method in solving the gas dynamics equations // *Numerical Analysis and Applications.* — 2022. — Vol. 15, iss. 2. — P. 112–124.
26. **Pons J., Marti J., Mueller E.** The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics // *J. of Fluid Mechanics.* — 2000. — Vol. 422. — P. 125–139.

27. **Marti J., Mueller E.** Numerical hydrodynamics in special relativity // Living Reviews in Relativity. — 2003. — Vol. 6. — Article Number 7.
28. **Godunov S.K.** A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics // Matematicheskii Sbornik. — 1959. — Vol. 47. — P. 271–306.
29. **Kolgan V.P.** Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous gas flows // TsAGI Science J. — 1972. — Vol. 3. — P. 68–77.
30. **Collela P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) gas-dynamical simulations // J. Computational Physics. — 1984. — Vol. 54. — P. 174–201.
31. **Lee D., Faller H., Reyes A.** The piecewise cubic method (PCM) for computational fluid dynamics // J. Computational Physics. — 2017. — Vol. 341. — P. 230–257.
32. **Deng X., Boivin P., Xiao F.** A new formulation for two-wave Riemann solver accurate at contact interfaces // Physics of Fluids. — 2019. — Vol. 31. — Article Number 046102.
33. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Sapetina A.F., Lomakin S.V., Tutukov A.V.** A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers // Lobachevskii J. of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, iss. 8. — P. 1485–1491.
34. **Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.** Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина. — Москва, 2019. — (Препринты / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; 90).
35. **Kriksin Y.A., Tishkin V.F.** Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 11. — P. 1032–1040.
36. **Mathews W.** The hydromagnetic free expansion of a relativistic gas // The Astrophysical J. — 1971. — Vol. 165. — P. 147–164.
37. **Perucho M., Marti J.M.** A numerical simulation of the evolution and fate of a Fanaroff–Riley type I jet. The case of 3C 31 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2007. — Vol. 382. — P. 526–542.
38. **Perucho M., Marti J.M., Quilis V.** Long-term FR II jet evolution in dense environments // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2022. — Vol. 510. — P. 2084–2096.

*Поступила в редакцию 17 января 2022 г.*

*После исправления 6 сентября 2022 г.*

*Принята к печати 23 ноября 2022 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Komissarov S., Porth O.** Numerical simulations of jets // New Astronomy Reviews. — 2021. — Vol. 92. — Article Number 101610.
2. **Siegel D.M., Metzger B.D.** Three-dimensional GRMHD simulations of neutrino-cooled accretion disks from Neutron star mergers // The Astrophysical J. — 2018. — Vol. 858. — Article Number 52.
3. **Willingale R., Meszaros P.** Gamma-ray bursts and fast transients. Multi-wavelength observations and multi-messenger signals // Space Science Reviews. — 2017. — Vol. 207. — P. 63–86.
4. **Barkov M., Lyutikov M., Klingler N., Bordas P.** Kinetic “jets” from fast-moving pulsars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2019. — Vol. 485. — P. 2041–2053.

5. **Olmi B., Bucciantini N.** Full-3D relativistic MHD simulations of bow shock pulsar wind nebulae: dynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2019. — Vol. 484. — P. 5755–5770.
6. **Huber D., Kissmann R., Reimer A., Reimer O.** Relativistic fluid modelling of gamma-ray binaries. I. The model // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Vol. 646. — Article Number A91.
7. **Huber D., Kissmann R., Reimer O.** Relativistic fluid modelling of gamma-ray binaries. II. Application to LS 5039 // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Vol. 649. — Article Number A71.
8. **Busza W., Rajagopal K., van der Schee W.** Heavy ion collisions: the big picture and the big questions // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 2018. — Vol. 68. — P. 339–376.
9. **Loffler F., Faber J., Bentivegna E. et al.** The einstein toolkit: a community computational infrastructure for relativistic astrophysics // *Classical and Quantum Gravity*. — 2012. — Vol. 29. — Article Number 115001.
10. **Rivera-Paleo F.J., Guzman F.S.** CAFE-R: a code that solves the special relativistic radiation hydrodynamics equations // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2019. — Vol. 241. — Article Number 28.
11. **Aloy M., Ibanez J., Marti J., Muller E.** GENESIS: a high-resolution code for three-dimensional relativistic hydrodynamics // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 1999. — Vol. 122. — P. 122–151.
12. **Mignone A., Bodo G., Massaglia S. et al.** PLUTO: a numerical code for computational astrophysics // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2007. — Vol. 170. — P. 228–242.
13. **Zhang W., MacFayden A.** RAM: a relativistic adaptive mesh refinement hydrodynamics code // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2006. — Vol. 164. — P. 255–279.
14. **Duffel P., MacFayden A.** TESS: a relativistic hydrodynamics code on a moving Voronoi mesh // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2011. — Vol. 197. — Article Number 15.
15. **Huber D., Kissmann R.** Special relativistic hydrodynamics with CRONOS // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Vol. 653. — Article Number A164.
16. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2007. — Vol. 47, iss. 12. — P. 1970–1989.
17. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2008. — Vol. 48, iss. 3. — P. 477–499.
18. **Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.G., Norman M.L.** Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation // *J. of Computational Physics*. — 2009. — Vol. 228. — P. 7614–7633.
19. **Kulikov I., Vorobyov E.** Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *J. of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 317. — P. 318–346.
20. **Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.** A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2019. — Vol. 243. — Article Number 4.
21. **Kulikov I.** A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme // *Computer Physics Communications*. — 2020. — Vol. 257. — Article Number 107532.
22. **Kulikov I.M.** A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows // *Numerical Analysis and Applications*. — 2020. — Vol. 13, iss. 2. — P. 117–126.

23. **Harten A., Lax P., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Review*. — 1983. — Vol. 25. — P. 289–315.
24. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A.** An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi processor // *Lobachevskii J. of Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, iss. 4. — P. 543–551.
25. **Kulikov I.M.** Kusochno-lineinaya rekonstrukciya peremennykh, umen'shayuschaya dissipaciyu metoda HLL pri reshenii uravnenii gazodinamiki // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie*. — Novosibirsk, 2022. — T. 25, № 2. — S. 141–156. *Perevod: Kulikov I.M. A piecewise-linear reconstruction to reduce the dissipation of the HLL method in solving the gas dynamics equations // Numerical Analysis and Applications*. — 2022. — Vol. 15, iss. 2. — P. 112–124.
26. **Pons J., Marti J., Mueller E.** The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics // *J. of Fluid Mechanics*. — 2000. — Vol. 422. — P. 125–139.
27. **Marti J., Mueller E.** Numerical hydrodynamics in special relativity // *Living Reviews in Relativity*. — 2003. — Vol. 6. — Article Number 7.
28. **Godunov S.K.** A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics // *Matematicheskii Sbornik*. — 1959. — Vol. 47. — P. 271–306.
29. **Kolgan V.P.** Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous gas flows // *TsAGI Science J.* — 1972. — Vol. 3. — P. 68–77.
30. **Collela P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) gas-dynamical simulations // *J. Computational Physics*. — 1984. — Vol. 54. — P. 174–201.
31. **Lee D., Faller H., Reyes A.** The piecewise cubic method (PCM) for computational fluid dynamics // *J. Computational Physics*. — 2017. — Vol. 341. — P. 230–257.
32. **Deng X., Boivin P., Xiao F.** A new formulation for two-wave Riemann solver accurate at contact interfaces // *Physics of Fluids*. — 2019. — Vol. 31. — Article Number 046102.
33. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Sapetina A.F., Lomakin S.V., Tutukov A.V.** A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers // *Lobachevskii J. of Mathematics*. — 2020. — Vol. 41, iss. 8. — P. 1485–1491.
34. **Kriksin Yu.A., Tishkin V.F.** Chislennoe reshenie zadachi Einfeldta na osnove razryvnogo metoda Galerkina. — Moskva, 2019. — (Preprinty / IPM im. M.V. Keldysha RAN; 90).
35. **Kriksin Y.A., Tishkin V.F.** Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2019. — Vol. 11. — P. 1032–1040.
36. **Mathews W.** The hydromagnetic free expansion of a relativistic gas // *The Astrophysical J.* — 1971. — Vol. 165. — P. 147–164.
37. **Perucho M., Marti J.M.** A numerical simulation of the evolution and fate of a Fanaroff–Riley type I jet. The case of 3C 31 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2007. — Vol. 382. — P. 526–542.
38. **Perucho M., Marti J.M., Quilis V.** Long-term FR II jet evolution in dense environments // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2022. — Vol. 510. — P. 2084–2096.

