

УДК 541.24:532.5

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

В. Е. Захватаев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

В электрогидродинамическом приближении исследуется длинноволновая устойчивость двухслойного течения Пуазейля однородных вязких диэлектриков между плоскими электродами, находящимися под постоянной разностью потенциалов. Линейный асимптотический анализ устойчивости показывает, что поверхностные поляризационные силы являются дополнительным по отношению к вязкостной стратификации дестабилизирующим фактором. Методом многих масштабов для описания слабонелинейной эволюции границы раздела диэлектриков получено уравнение Курамото — Сивашинского. Показано, что в рамках используемых приближений нелинейные взаимодействия способствуют ограничению роста возмущений и граница раздела не разрушается даже при относительно большой разности потенциалов.

Как известно, одной из причин неустойчивости плоской границы раздела двух покоящихся вязких диэлектрических жидкостей в нормальном однородном электростатическом поле являются поверхностные поляризационные силы [1]. Линейный анализ длинноволновой устойчивости показывает, что эти силы оказывают дестабилизирующее влияние и в случае, когда основное состояние системы представляет собой двухслойное течение Пуазейля [2]. В настоящей работе длинноволновая электрогидродинамическая устойчивость двухслойного течения Пуазейля жидких диэлектриков между электродами, находящимися под постоянной разностью потенциалов, исследуется в слабонелинейном приближении. Аналогичная задача в отсутствие электрического поля в линейном приближении изучалась в [3], в слабонелинейном приближении — в [4–6]. Используемые ниже методы исследования длинноволновой устойчивости предложены в [3, 4].

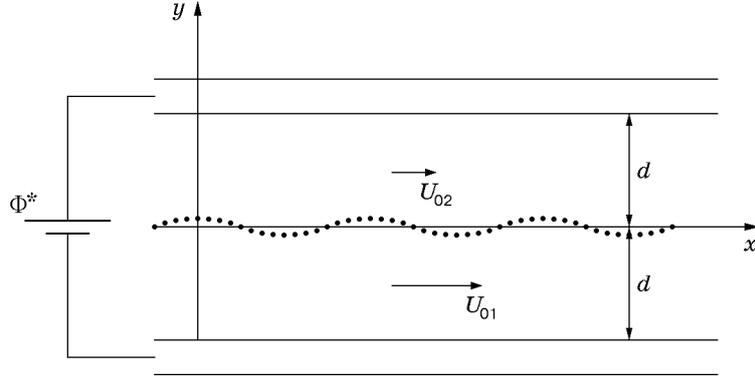
В [2] также рассматривался один из возможных сценариев нелинейной эволюции возмущений, который, однако, не связан с линейным анализом устойчивости, поскольку отсутствует точное соответствие между линейными дисперсионными соотношениями полной исходной задачи и редуцированной слабонелинейной модели.

**1.** Рассмотрим двухслойное течение Пуазейля несмешивающихся диэлектрических жидкостей между плоскими горизонтальными электродами, находящимися под постоянной разностью потенциалов  $\Phi^*$ . Будем полагать, что сторонние заряды на поверхности раздела и в объемах жидкостей отсутствуют, электроды — идеальные проводники, обе жидкости представляют собой вязкие несжимаемые однородные и изотропные диэлектрики с одинаковой температурой и плотностью. Будем также считать, не уменьшая общности постановки задачи, что поле тяжести отсутствует.

Ограничимся двумерным случаем. В процессе движения жидкости занимают области  $\Omega_1 = \{-d < y < H(x, t), -\infty < x < \infty\}$  и  $\Omega_2 = \{H(x, t) < y < d, -\infty < x < \infty\}$ , где  $x$  и  $y$  — прямоугольные декартовы координаты (ось  $y$  направлена перпендикулярно плоскостям

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (код проекта 11G26), Конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых СО РАН, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-15-96162).



электродов);  $t$  — время;  $d$  — положительная постоянная (см. рисунок). Индексами 1 и 2 обозначаются величины, относящиеся к областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Пусть  $U_j, V_j$  —  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора скорости,  $P_j$  — давление,  $\Phi_j$  — потенциал электрического поля в области  $\Omega_j$  (здесь и далее  $j = 1, 2$ ).

Течение характеризуется следующими постоянными физическими параметрами:  $\rho$  — плотность,  $\mu_j$  — динамические вязкости,  $\varepsilon_j$  — диэлектрические проницаемости жидкостей,  $\sigma$  — коэффициент межфазного натяжения.

Предполагается, что внешнее магнитное поле отсутствует. Для описания рассматриваемой физической системы используем электрогидродинамическое приближение [7]. В рамках сделанных предположений определяющие уравнения и граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho(U_j t + U_j U_{jx} + V_j U_{jy}) &= -P_{jx} + \mu_j(U_{jxx} + U_{jyy}), \\ \rho(V_j t + U_j V_{jx} + V_j V_{jy}) &= -P_{jy} + \mu_j(V_{jxx} + V_{jyy}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$U_{jx} + V_{jy} = 0, \quad \Phi_{jxx} + \Phi_{jyy} = 0;$$

$$\Phi_1 = 0, \quad U_1 = 0, \quad V_1 = 0 \quad \text{при } y = -d, \quad (1.2)$$

$$\Phi_2 = \Phi^*, \quad U_2 = 0, \quad V_2 = 0 \quad \text{при } y = d.$$

На границе раздела  $y = H(x, t)$  выполняются следующие условия, выражающие непрерывность нормальной к межфазной поверхности компоненты вектора электрической индукции, потенциала, вектора скорости, нормальных и касательных напряжений, и кинематическое условие непротекания соответственно:

$$\begin{aligned} [\varepsilon(\Phi_y - H_x \Phi_x)] &= 0, \quad [\Phi] = 0, \quad [U] = 0, \quad [V] = 0, \\ -[P] + 2(1 + H_x^2)^{-1}[\mu(V_y - H_x(U_y + V_x) + H_x^2 U_x)] + \\ &+ (1 + H_x^2)^{-1}[(8\pi)^{-1} \varepsilon((1 - H_x^2)(\Phi_y^2 - \Phi_x^2) - 4H_x \Phi_x \Phi_y)] = \sigma H_{xx} (1 + H_x^2)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$[\mu(2H_x(V_y - U_x) + (1 - H_x^2)(U_y + V_x))] = 0, \quad H_t + U_1 H_x = V_1.$$

Здесь  $[(\cdot)] \equiv (\cdot)_1 - (\cdot)_2$  — скачок величины на границе раздела; нижние буквенные индексы используются для обозначения частных производных.

**2.** Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного плоскопараллельного течения, индуцируемого постоянным градиентом давления вдоль оси  $x$ , равным  $-F$  ( $F > 0$ ), которое определяется следующим решением задачи (1.1)–(1.3):

$$U_{0j} = -\frac{F}{2\mu_j} y^2 - \frac{Fd(m-1)}{2\mu_j(m+1)} y + \frac{Fd^2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad V_{0j} = 0, \quad P_{0j} = -Fx + P'_j,$$

$$\Phi_{01} = \Phi^* \frac{\varepsilon_2(y+d)}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \Phi_{02} = \Phi^* \frac{\varepsilon_1(y+\gamma d)}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad H_0 = 0,$$

где  $m = \mu_2/\mu_1$ ;  $\gamma = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ ;  $P'_j = \text{const}$ .

Для простоты ограничимся случаем, когда толщина слоев в невозмущенном состоянии одинакова. Положим  $U_j - U_{0j} = Uu_j$ ,  $V_j = Uv_j$ ,  $P_j - P_{0j} = \rho U^2 p_j$ ,  $\Phi_j - \Phi_{0j} = \Phi^* \varphi_j$ ,  $H = dh$ ,  $x \rightarrow dx$ ,  $y \rightarrow dy$ ,  $t \rightarrow dU^{-1}t$ , где  $U = U_0(0) = Fd^2/(\mu_1 + \mu_2)$  — скорость невозмущенного течения на плоской границе раздела.

Определим функции  $\psi_j$  соотношениями  $u_j = \psi_{jy}$ ,  $v_j = -\psi_{jx}$ . Эволюция возмущений описывается следующей системой:

$$\text{Re}_j(\nabla^2 \psi_{jt} + (u_{0j} + \psi_y)\nabla^2 \psi_{jx} - \psi_x(u_{0yy} + \nabla^2 \psi_{jy})) = \nabla^4 \psi_j, \quad \nabla^2 \varphi_j = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_{1y} = 0, \quad \psi_{1x} = 0 \quad \text{при } y = -1,$$

$$\varphi_2 = 0, \quad \psi_{2y} = 0, \quad \psi_{2x} = 0 \quad \text{при } y = 1,$$

$$[u_0 + \psi_y] = 0, \quad [\psi_x] = 0, \quad [\varphi_0 + \varphi] = 0,$$

$$\text{Re}_1[\psi_{yt} + u_0\psi_{yx} + \psi_y\psi_{yx} - u_{0y}\psi_x - \psi_x\psi_{yy}] - [m'(\psi_{yxx} + \psi_{yyy})] + f_x = 0, \quad (2.2)$$

$$f = 2(1 + h_x^2)^{-1}[m'((h_x^2 - 1)\psi_{yx} - h_x(u_{0y} + \psi_{yy} - \psi_{xx}))] + \\ + (1/2)(1 + h_x^2)^{-1}[\gamma((1 - h_x^2)(\varphi_{0y}^2 + 2\varphi_{0y}\varphi_y + \varphi_y^2 - \varphi_x^2) - 4h_x\varphi_x(\varphi_{0y} + \varphi_y))] - \text{We} h_{xx}(1 + h_x^2)^{-3/2}, \\ [m'(-4h_x\psi_{yx} + (1 - h_x^2)(u_{0y} + \psi_{yy} - \psi_{xx}))] = 0, \quad [\gamma(\varphi_{0y} + \varphi_y - h_x\varphi_x)] = 0, \\ h_t + (u_{01} + \psi_{1y})h_x = -\psi_{1x} \quad \text{при } y = h(x, t).$$

Здесь  $\varphi_{01} = \gamma(y+1)/(1+\gamma)$ ;  $\varphi_{02} = (y+\gamma)/(1+\gamma)$ ;  $u_{0j} = b_j y^2 + a_j y + 1$ ;  $a_1 = (1-m)/2$ ;  $a_2 = (1-m)/(2m)$ ;  $b_1 = -(m+1)/2$ ;  $b_2 = -(m+1)/(2m)$ ;  $\text{Re}_j = \rho U d / \mu_j$ ;  $\text{We} = \sigma / (\mu_1 U)$ ;  $m'_j = \mu_j / \mu_1$ ;  $\gamma_j = \varepsilon_j \Phi^{*2} / (4\pi d \mu_1 U)$ .

**3.** Характер эволюции во времени малых длинноволновых возмущений вида нормальных мод

$$(\psi, \varphi, h) = (\psi(y), \varphi(y), h) \exp(i\alpha(x - ct)), \quad (3.1)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$  — волновое число ( $\alpha \ll 1$ ),  $c \in \mathbb{C}$ , определяется из решения регулярно возмущенной по параметру  $\alpha$  спектральной задачи, которая получается линеаризацией уравнений и условий (2.1), (2.2) на определенном выше основном состоянии и подстановкой соотношений (3.1) в полученную систему.

Предположим, что выполняются следующие условия на порядки определяющих параметров:

$$\text{Re}_j = O(1), \quad \text{We} = O(\alpha^{-2}), \quad \gamma_j = O(1). \quad (3.2)$$

Предположим также, что вязкости жидкостей различны ( $m \neq 1$ ). Тогда [2]

$$c = c^{(0)} + \alpha c^{(1)} + O(\alpha^2), \quad (3.3)$$

где

$$c^{(0)} = 1 + \frac{2(m-1)^2}{m^2 + 14m + 1},$$

$$\begin{aligned}
c^{(1)} &= \frac{2i \operatorname{Re}_1 (m-1)^2}{(m^2 + 14m + 1)^2} H(m) + \frac{i\gamma_2(1-\gamma)^2(m+1)}{3(1+\gamma)^3(m^2 + 14m + 1)} - \frac{i\alpha^2 \operatorname{We}(1+m)}{3(m^2 + 14m + 1)}, \\
H(m) &= -h_1(-1) - h_1'(-1) - 7h_2(1) + 3h_2'(1) - 7mh_1(-1) - 3mh_1'(-1) - mh_2(1) + mh_2'(1), \\
h_1 &= -\frac{m^2-1}{1680} y^7 - \frac{(m-1)^2}{480} y^6 - \frac{m^4 + 18m^3 - 156m^2 - 98m - 21}{480(m^2 + 14m + 1)} y^5 - \\
&\quad - \frac{m^3 - 17m^2 - 17m + 1}{24(m^2 + 14m + 1)} y^4, \\
h_2 &= -\frac{m^2-1}{1680m^2} y^7 - \frac{(m-1)^2}{480m^2} y^6 - \frac{21m^4 + 98m^3 + 156m^2 - 18m - 1}{480m^2(m^2 + 14m + 1)} y^5 - \\
&\quad - \frac{m^3 - 17m^2 - 17m + 1}{24m(m^2 + 14m + 1)} y^4.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что при различии диэлектрических проницаемостей жидкостей ( $\gamma \neq 1$ ) поперечное электрическое поле дестабилизирует рассматриваемое течение, причем инкремент неустойчивости пропорционален квадрату волнового числа. Очевидно также, что при достаточно малых значениях параметра  $\operatorname{We}$  ( $\operatorname{We} < O(\alpha^{-2})$ ), характеризующего величину межфазного натяжения, граница раздела неустойчива при любой разности потенциалов между электродами.

Отметим, что величина  $H(m)$ , определяемая (3.4), положительна, что соответствует неустойчивости Йи [3], возникающей вследствие различия градиентов скоростей основного течения на границе раздела ( $m \neq 1$ ). Неустойчивость Йи имеет место при любых числах Рейнольдса, если эффективное межфазное натяжение достаточно мало. Инкремент неустойчивости также пропорционален величине  $\alpha^2$ .

Как известно, при определенных условиях рост возмущений, обусловленный неустойчивостью Йи, ограничивается на нелинейной стадии развития неустойчивости [4]. Можно ожидать, что подобное явление имеет место и в данном случае. Исследуем вопрос об устойчивости рассматриваемого течения в слабонелинейном приближении.

4. Следуя подходу, используемому в работах [4, 6], в которых исследовалась аналогичная задача в отсутствие электрического поля, полагаем, что в достаточно малой окрестности критических значений определяющих параметров характерные масштабы развития возмущений соответствуют линейной стадии развития неустойчивости. Согласно приведенным выше результатам асимптотического линейного анализа в диапазоне значений определяющих параметров (3.2) эволюция малых длинноволновых возмущений (3.1) определяется параметром  $\exp(i\alpha(x-c^{(0)}t) - i\alpha^2 c^{(1)}t)$ , где  $\alpha \ll 1$ . В соответствии с этим положим

$$\begin{aligned}
\xi &= \varepsilon(x - c^{(0)}t), & \tau &= \varepsilon^2 t, & h &= \varepsilon A(\xi, \tau), \\
\psi_j(x, y, t) &= \varepsilon \psi_j^{(0)}(\xi, y, \tau) + \varepsilon^2 \psi_j^{(1)}(\xi, y, \tau) + \dots,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x, y, t) &= \varepsilon \varphi_j^{(0)}(\xi, y, \tau) + \varepsilon^2 \varphi_j^{(1)}(\xi, y, \tau) + \dots; \\
\operatorname{Re}_j &= O(1), & \operatorname{We} &= O(\varepsilon^{-2}), & \gamma_j &= O(1),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Подстановка (4.1) в (2.1), (2.2) приводит к последовательности задач в различных приближениях по малому параметру  $\varepsilon$ . Решение задачи в приближении  $O(\varepsilon)$  определяется следующим образом:

$$\varphi_1^{(0)}(\xi, y, \tau) = A(\xi, \tau) \frac{\gamma(\gamma-1)(y+1)}{(1+\gamma)^2}, \quad \varphi_2^{(0)}(\xi, y, \tau) = A(\xi, \tau) \frac{(\gamma-1)(y-1)}{(1+\gamma)^2},$$

$$\psi_j^{(0)}(\xi, y, \tau) = A(\xi, \tau)(c^{(0)} - 1)(1 + B_j y + C_j y^2 + D_j y^3),$$

где  $B_1 = (7 + m)/4$ ;  $B_2 = (-1 - 7m)/(4m)$ ;  $C_1 = (1 + m)/2$ ;  $C_2 = (1 + m)/(2m)$ ;  $D_1 = (-1 + m)/4$ ;  $D_2 = (-1 + m)/(4m)$ .

В приближении  $O(\varepsilon^2)$  в уравнениях и граничных условиях появляются величины  $A_\xi$ ,  $A^2$  и  $A_{\xi\xi\xi}$ , поэтому решение задачи в этом приближении ищем в виде  $\psi_j^{(1)}(\xi, y, \tau) = A_\xi \varphi_{1j}(y) + A_{\xi\xi\xi} \varphi_{2j}(y) + A^2 \varphi_{3j}(y)$ . После некоторых алгебраических выкладок из кинематического условия (последнего соотношения в (2.2)) находим уравнение для функции  $A(\xi, \tau)$ , являющееся необходимым условием разрешимости задачи и определяющее эволюцию межфазной поверхности:

$$A_\tau + 2QAA_\xi + EA_{\xi\xi} + SA_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (4.3)$$

где

$$E = \varphi_{11}(0) = E_1 + E_2, \quad E_1 = \frac{2\text{Re}_1(m-1)^2}{(m^2 + 14m + 1)^2} H(m) > 0,$$

$$E_2 = \frac{\gamma_2(1-\gamma)^2(m+1)}{3(1+\gamma)^3(m^2 + 14m + 1)} > 0, \quad S = \varphi_{21}(0) = \frac{\varepsilon^2 \text{We}(1+m)}{3(m^2 + 14m + 1)} > 0,$$

$$Q = \frac{1}{2}(u_{01y}(0) + u_{01yy}) + \varphi_{31}(0) = \frac{(m-1)(m^2 + 6m + 7)}{4(m^2 + 14m + 1)},$$

величина  $H(m)$  определяется (3.4).

Полученное уравнение отличается от выведенного в [4] только наличием слагаемого  $E_2 A_{\xi\xi}$ , появление которого обусловлено рассматриваемыми электрогидродинамическими эффектами.

Линеаризуя уравнение (4.3) на основном состоянии  $A = 0$ , имеем дисперсионное соотношение (для гармоники с множителем  $\exp(\lambda t + i\alpha x)$ )  $\lambda = E\alpha^2 - S\alpha^4$ , которое, как и следовало ожидать, соответствует (3.3).

**5.** Уравнение вида (4.3), известное как уравнение Курамото — Сивашинского, является простейшей универсальной моделью нелинейных процессов в диссипативных системах с длинноволновой неустойчивостью и встречается в различных задачах, например при описании пленочных течений жидкости и в физике плазмы. Оно подробно исследовалось численно и аналитически.

Наблюдаемые в численных расчетах периодические волновые режимы ( $A(t, 0) = A(t, L)$ ), описываемые уравнением (4.3), ограничены (см. [8–10]). Механизм стабилизации состоит в последовательном переносе энергии в процессе нелинейного взаимодействия от длинноволновых мод к коротковолновым и ее диссипации вследствие работы сил поверхностного натяжения. По мере роста бифуркационного параметра  $\mu = (L/(2\pi))(E/S)^{1/2}$  имеют место различные типы упорядоченных предельных режимов, перемежаемых областями нерегулярного поведения. При достаточно больших значениях  $\mu$  устанавливаются режимы вида осцилляций хаотического характера [8–10], но решения по-прежнему ограничены.

Таким образом, в рамках рассматриваемых приближений нелинейные взаимодействия способствуют ограничению роста возмущений и граница раздела не разрушается даже при достаточно большой разности потенциалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Melcher J. R., Smith C. V., Jr. Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability // Phys. Fluids. 1969. V. 12, N 4. P. 778–790.

2. **Захватаев В. Е.** Длинноволновая неустойчивость двухслойного течения диэлектрических жидкостей в поперечном электростатическом поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 2. С. 45–55.
3. **Yih C.-S.** Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 337–352.
4. **Hooper A. P., Grimshaw R.** Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28, N 1. P. 37–45.
5. **Shlang T., Sivashinsky G. I., Babchin A. J., Frenkel A. L.** Irregular wavy flow due to viscous stratification // J. Physique. 1985. V. 46, N 6. P. 863–866.
6. **Charru F., Fabre J.** Long waves at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 3. P. 1223–1235.
7. **Melcher J. R., Taylor G. I.** Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses // Annu. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. P. 111–146.
8. **Hyman J. M., Nicolaenko B.** The Kuramoto — Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // Physica D. 1986. V. 18, N 1. P. 113–126.
9. **Hyman J. M., Nicolaenko B., Zaleski S.** Order and complexity in the Kuramoto — Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // Physica D. 1986. V. 23, N 1/3. P. 265–292.
10. **Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.** Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.

*Поступила в редакцию 20/XII 1999 г.*

---