ПМТФ, № 4, 1973

УДК 536.46

# К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕЛКОМАСШТАБНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ

*В. С. Баушев, В. Н. Вилюнов*

*(Томск)*

Проведено исследование краевой задачи в теории распространения мелкомасштабного турбулентного пламени при учете влияния пульсаций температуры и концентрации на величину скорости тепловыделения.

В отличие от [1] подробно рассмотрен случай, когда в пламени протекает реакция второго порядка. Найдены условия существования турбулентного пламени; расчетным способом исследована структура фронта пламени. Вблизи пределов распространения обнаружена стадийность протекания реакции.

**1. Математическая формулировка задачи.** В [1] показано, что при условии равенства ламинарных коэффициентов переноса и их турбулентных аналогов и неучете теплового расширения среды (плотность постоянна) для нахождения турбулентной скорости горения требуется решить следующую краевую задачу: задано уравнение

$$dp \,/\, du = \Phi \,/\, p - \omega_1 \qquad (0<u<1) \tag{1.1}$$

и краевые условия

$$p\,(0) = 0, \quad p\,(1) = 0 \tag{1.2}$$

где

$$2\Phi = 2\Phi_\varepsilon = (u + Fp)^2 \exp\left[\frac{-\theta_0\,(u + Fp)}{1 - \sigma\,(u + Fp)}\right] +$$

$$+ (u - Fp)^2 \exp\left[\frac{-\theta_0\,(u - Fp)}{1 - \sigma\,(u - Fp)}\right] \qquad (0 < u < \varepsilon)$$

$$2\Phi = 0 \qquad (\varepsilon \leqslant u \leqslant 1)$$

$$F > 0, \ \theta_0 > 0, \ 0 < \sigma < 1$$

Отыскивается такое единственное значение $\omega_1 > 0$, если оно существует, при котором решение уравнения (1.1) удовлетворяет условиям (1.2).

Здесь $u$, $p$, $\Phi$, $\omega_1$ — соответственно безразмерные температура, градиент температуры, средняя скорость химической реакции, скорость распространения пламени. Параметры $F$, $\theta_0$, $\sigma$ известны. Связь между безразмерными и размерными величинами дана в [1].

**2. Существование и единственность.** Из точки (0, 0), являющейся особой для уравнения (1.1), выходят два решения. Ниже будет рассмотрено лишь имеющее физический смысл положительное решение, для которого

$$\frac{dp}{du}(0) = 0 \tag{2.1}$$

Исследуем сначала свойства решения задачи Коши

$$dp \,/\, du = \Phi_\varepsilon \,/\, p - \omega, \quad p\,(0) = 0 \tag{2.2}$$

Для сокращения записи индекс у $\omega_1$ отброшен.

*Предложение* 1. Пусть $(0, u_*)$ — область непродолжаемого решения уравнения (2.2). Тогда можно указать такое $k = k(u_*, \omega, F) > 0$, что в указанной области будет выполняться неравенство $p(u) - ku^2 > 0$. Величина $k$ находится здесь аналогично [1]

$$k = \frac{1}{2u_*}\{-(\omega + AFu_*) + [(\omega + AFu_*)^2 + 2Au_*]^{1/2}\}$$

$$\left(A = \frac{1}{2}\exp\left[\frac{-\theta_0 u}{1 - \sigma u_*}\right]\right)$$

Из этого предложения, так же как и в [1], следует:

$$\lim_{u \to u_*} (u + Fp) = 1/\sigma$$

*Предложение 2.* Для всякого $F$ можно указать такие $\omega$, при которых область непродолжаемого решения $(0, u_*)$ уравнения (2.2) такова, что $u_* > \varepsilon$.

В области $p > 0$, $0 < u < \varepsilon$ справедливо неравенство

$$\Phi_\varepsilon < (\varepsilon^2 + F^2p^2)\exp\left(\frac{\theta_0 Fp}{1 + \sigma Fp}\right) = \Phi_2(Fp)$$

Поэтому в рассматриваемой области решение уравнения (2.2) не будет превышать решения уравнения

$$dp_1 / du = \Phi_2(Fp_1) / p_1 - \omega, \quad p_1(0) = 0$$

При достаточно больших $\omega$ уравнение

$$\Phi_2(Fp) - \omega p = 0 \tag{2.3}$$

имеет положительные корни. Пусть $p^+$ — меньший корень уравнения (2.3). Очевидно, $p_1 < p^+$ и, поскольку $p^+$ монотонно стремится к нулю с увеличением $\omega$, начиная с некоторого значения $\omega$, выполнится неравенство

$$p^+ \leqslant F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon)$$

Для тех $\omega$, при которых верно последнее неравенство, $u_* > \varepsilon$. Действительно, если предположить, что $u_* \leqslant \varepsilon$, то получим

$$\lim_{u \to u_*}(p - p^+) = \frac{1}{F}\left(\frac{1}{\sigma} - u_*\right) - p^+ \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{F}\left(\frac{1}{\sigma} - u_*\right) - \frac{1}{F}\left(\frac{1}{\sigma} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\sigma}(\varepsilon - u_*) \geqslant 0$$

что невозможно, так как $p < p^+$.

*Замечание.* В силу предложения 2 в области (0,1) всегда существует решение задачи Коши (2.2).

В случае, когда $p(1)$ при некотором $\omega$ оказывается положительным, нужно увеличивать $\omega$ до тех пор, пока не выполнится второе условие (1.2). В случае, когда $p(1) = 0$, естественно уменьшать $\omega$. При этом может оказаться что $p(u)$ достигнет линии $u + Fp = 1/\sigma$ раньше, чем $p(1)$ обратится в нуль, а следовательно, второе условие (1.2) выполнить невозможно. Ниже будет показано, что последний случай реализуется при $F$, превышающих некоторое предельное $F_*$ при любых $0 < \sigma < 1$.

Рассмотрим частный случай $\sigma = 0$. Предположение о том, что либо решение задачи Коши (2.2) имеет вертикальную асимптоту при $u \leqslant \varepsilon$, либо, если решение существует во всей области $(0, \varepsilon]$, $p(1) < 0$, неверно.

Поэтому для $\sigma = 0$ при любых $F$ существует решение краевой задачи (1.1), (1.2) и притом в силу монотонности функции $p(1) = p(\omega, 1)$ единственное.

Приступая к доказательству существования предельного значения $F_*$, будем иметь в виду неравенство $0 < \sigma < 1$.

Покажем существование такого $F_1$, что для любых $F \leqslant F_1$ найдется единственное $\omega$, при котором существует решение краевой задачи (1.1), (1.2).

Для определения $F_1$ воспользуемся такой же системой, что и в [1]

$$p^+(\varepsilon) = F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon), \quad p^-(\varepsilon) \geqslant \omega(1 - \varepsilon) \tag{2.4}$$

где $p^+(u)$ и $p^-(u)$ определены в области $(0, \varepsilon)$, причем

$$p^-(u) < p(u) < p^+(u)$$

В качестве функции $p^-(u)$ возьмем нижнюю оценку, полученную в предложении 1 ($p^-(u) = ku^2$).

Решение уравнения (2.3) дает функцию $p^+$, но так как это решение явно получить не удается, то к системе (2.4) присоединим еще уравнение

$$\Phi_2(Fp^+) - \omega p^+ = 0$$

Решая систему (2.4) совместно с последним уравнением, найдем $F_1$. Здесь и далее, когда оценки рассматриваются лишь в области $(0, \varepsilon)$, в выражение для $A$ и $k$ вместо $u_*$ подставляется $\varepsilon$.

Покажем теперь существование такого $F_2$, что для всех $F \geqslant F_2$ не существует решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям (1.2).

В [1] для нахождения $F_2$ использовалась система

$$F\omega = \frac{1/\sigma - \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad Fp^-(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\sigma} - \varepsilon \tag{2.5}$$

Пусть $p^-(u) = ku^2$, тогда $F_2$ существует лишь в том случае, когда $\sigma > 2 / 3\varepsilon$, ибо только при этих $\sigma$ система (2.5) имеет решение.

Поэтому ниже для доказательства существования $F_2$ при всех $0 < \sigma < 1$ предлагается иной прием построения нижней оценки.

Если ввести новые обозначения

$$Fp = \xi, \quad (\sigma^{-1} - \varepsilon) / (1 - \varepsilon) = \alpha$$

то задача о нахождении $F_2$ сводится к построению нижней оценки $\xi^-(u)$ для уравнения

$$\frac{d\xi}{du} = F^2 \frac{\Phi_\varepsilon(u, \xi)}{\xi} - \alpha, \quad \xi(0) = 0 \tag{2.6}$$

такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\xi^-(\varepsilon) \geqslant \sigma^{-1} - \varepsilon$$

Разделим область $(0, \varepsilon)$ на две — $(0, u_0)$ и $(u_0, \varepsilon)$. В области $(0, u_0)$ построим функцию $\xi_1 = k_1 u^2$ такую, чтобы $k_1$, $u_0$ удовлетворяли неравенству

$$1 - (\theta_0 + \sigma) u_0 (1 + k_1 u_0) > 0 \tag{2.7}$$

Потребуем далее, чтобы $k_1$ при всех $u \in (0, u_0]$ удовлетворяло неравенству

$$M \equiv 2F^2\Phi_\varepsilon(u, \xi) - 2\alpha\xi - 4k_1 u\xi \,|_{\xi = k_1 u^2} > 0 \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7), имеем

$$M > F^2u^2 \exp\left[\frac{-\theta_0(u+\xi)}{1-\sigma(u+\xi)}\right] - 2\alpha\xi - 4k_1u\xi\,|_{\xi=k_1u^2} \geqslant$$

$$\geqslant u^2\left\{F^2\exp\left[\frac{-\theta_0u_0(1+k_1u_0)}{1-\sigma u_0(1+k_1u_0)}\right] - 2\alpha k_1 - 4k_1^2u_0\right\} >$$

$$> u^2\left\{F^2\left[1 - \frac{\theta_0u_0(1+k_1u_0)}{1-\sigma u_0(1+k_1u_0)}\right] - 2\alpha k_1 - 4k_1^2u_0\right\} >$$

$$> u^2\{F^2[1-(\theta_0+\sigma)u_0(1+k_1u_0)] - 2\alpha k_1 - 4k_1^2u_0\}$$

Неравенство (2.8) будет выполнено, если $k_1$ является положительным корнем уравнения

$$F^2[1-(\theta_0+\sigma)u_0(1+k_1u_0)] - 2\alpha k_1 - 4k_1^2u_0 = 0$$

Для удобства дальнейших выкладок $k_1$ возьмем в виде выражения, менее громоздкого и меньшего, чем положительный корень этого уравнения

$$k_1 = \frac{F^2[1-(\theta_0+\sigma)u_0]}{2\alpha + 2F + F^2u_0^2(\theta_0+\sigma)}$$

Учитывая, что в области $(u_0, \varepsilon)$

$$\Phi_\varepsilon > A(u-\xi)^2 > A(\xi^2 - 2u\xi)$$

построим функцию

$$\xi_2(u) = \frac{\alpha+2}{AF^2} + 2u + \left[k_1u_0^2 - \left(2u_0 + \frac{\alpha+2}{AF^2}\right)\right]\exp[AF^2(u-u_0)]$$

являющуюся решением уравнения

$$\frac{d\xi_2}{du} = F^2\frac{A(\xi_2^2 - 2u\xi_2)}{\xi_2} - \alpha, \quad \xi_2(u_0) = k_1u_0^2$$

Подберем $u_0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\lim_{F\to\infty}\left[k_1u_0^2 - \left(2u_0 + \frac{\alpha+2}{AF^2}\right)\right] = \frac{1-3u_0(\theta_0+\sigma)}{\theta_0+\sigma} > 0$$

Например, положим

$$u_0 < 1/6\,(\theta_0+\sigma)$$

Очевидно, найдется $F_0$ такое, что при $F \geqslant F_0$

$$k_1u_0^2 - \left(2u_0 + \frac{\alpha+2}{AF^2}\right) \geqslant \frac{1}{4(\theta_0+\sigma)} \qquad (2.9)$$

Покажем, что функция

$$\xi^-(u) = \begin{cases}\xi_1(u) & (0 < u \leqslant u_0)\\ \xi_2(u) & (u_0 < u < \varepsilon)\end{cases}$$

является нижней оценкой для решения уравнения (2.6). Действительно, в силу очевидного неравенства

$$2k_1 < \frac{2F^2}{\alpha} = \frac{d^2\xi}{du^2}(0)$$

$\xi > \xi_1$ в окрестности $u = 0$. Предположение о нарушении этого неравенства в любой точке $u \leqslant u_0$ приводит к нарушению неравенства (2.8), что невозможно. Неравенство $\xi > \xi_2$ при $u_0 < u < \varepsilon$ вытекает из метода построения функции $\xi_2(u)$.

Пусть $F \geqslant F_0$. Тогда, учитывая (2.9)

$$\xi^-(\varepsilon) = \xi_2(\varepsilon) \geqslant \frac{\alpha+2}{AF^2} + 2\varepsilon + \frac{1}{4(\theta_0+\sigma)} \exp\left[AF^2(\varepsilon - u_0)\right]$$

и всегда можно указать такое $F_2 \geqslant F_0$, что при всех $F \geqslant F_0$ будет выполняться неравенство

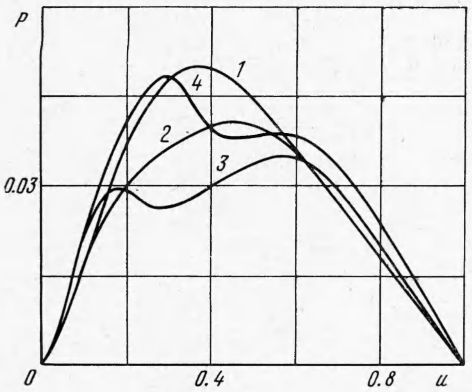
$$\xi^-(\varepsilon) \geqslant \sigma^{-1} - \varepsilon$$

Предел существования стационарного распространения пламени по аналогии с [1] определяется равенством

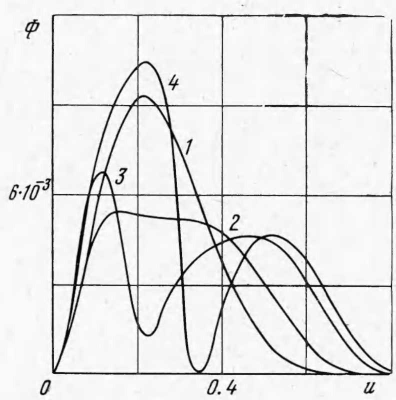
$$F_* = \sup\{F_1\}$$

Таким образом, для реакции второго порядка краевая задача о нахождении скорости горения имеет единственное решение при всех $F$, когда $\sigma = 0$. В случае $0 < \sigma < 1$ задача не имеет решения при $F$, превышающих некоторое критическое значение $F_* = \sup\{F_1\}$.

**3. Структура фронта турбулентного пламени.** Закономерности горения в случае, если в пламени протекает реакция второго порядка, исследованы расчетным путем на ЭВМ М-220. Численное решение краевой задачи (1.1), (1.2) находилось в реальном диапазоне изменения параметров



Фиг. 1



Фиг. 2

$$6 \leqslant \theta_0 \leqslant 10, \quad 0 < \sigma \leqslant 0.9$$

Для этого диапазона результаты оказались качественно единообразными, поэтому ниже наиболее подробно иллюстрируется один вариант: $\theta_0 = 6$, $\sigma = 0.9$

На фиг. 1 и 2 изображены соответственно $p(u)$ и $\Phi(u)$ для разных значений параметра $F$. Некоторые характерные величины указаны ниже.

| | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| $F$ | 0 | 4 | 7.5 | 7.75 |
| $\omega$ | 0.093 | 0.094 | 0.104 | 0.113 |

Предельные значения, при которых нарушается существование решения, $F_* \approx 8$, $\omega_* \approx 0.125$.