

УДК 532.546.2:532.685

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ “НЕВЯЗКОГО ПАЛЬЦА” В РЕГУЛЯРНЫХ МОДЕЛЯХ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

А. П. Ершов, А. Я. Даммер, А. Л. Куперштох

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается вытеснение жидкости из пористой среды. Течение предполагается быстрым, т. е. число Рейнольдса, вычисленное по характерному размеру пор, велико. Если вытесняющий флюид менее плотный (например, газ), то граница раздела неустойчива. Эта неустойчивость аналогична известной неустойчивости вязкого пальца, с тем отличием, что управляющим параметром является не вязкость, а плотность. Неустойчивость продемонстрирована экспериментально на плоских слоях. В квадратных решетках взаимно перпендикулярных каналов не наблюдалось заметного ветвления пальцев, что связано с анизотропией такой искусственной пористой среды. Более близкая к обычной картина с ветвлением пальцев получена в двумерном слое шариков, который представляется более изотропным. Предложена простая модель, описывающая течение в квадратной решетке. Рассмотрена начальная стадия роста и оценен инкремент неустойчивости. Проводится качественный анализ нелинейной стадии.

**Введение.** Вначале рассмотрим классическую проблему вытеснения вязкой жидкости. В пористой среде имеется граница раздела между вязкой жидкостью и сравнительно невязкой. Наиболее прост предельный случай, когда вязкостью толкающей жидкости можно пренебречь. В вязкой области при малой скорости течения  $\mathbf{u}$  выполняется линейный закон фильтрации

$$\mathbf{u} = -K\nabla p/\mu. \quad (1)$$

Здесь  $p$  — давление;  $K$  — проницаемость среды;  $\mu$  — вязкость жидкости. Из условия несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  следует уравнение Лапласа

$$\Delta p = 0. \quad (2)$$

В пределах невязкой области давление однородно. Следовательно, и на движущейся границе раздела давление постоянно. Это граничное условие позволяет найти решение уравнения Лапласа в вязкой области. Тогда скорость движения границы определяется из (1), что позволяет рассчитать процесс вытеснения.

Если вязкая жидкость вытесняется сравнительно невязкой, то граница раздела подвержена неустойчивости Саффмана — Тейлора [1]. При появлении на границе выступа в его окрестности градиент давления увеличивается, растет скорость течения, а вместе с ней и скорость границы. В результате выступ разрастается. “Пальцы” невязкой жидкости вырываются вперед.

Во многих опытах, начиная с описанных в [1], для изучения вязких пальцев использовалась ячейка Хеле Шоу, в которой жидкость течет в узком зазоре между двумя параллельными плоскостями. В ячейках Хеле Шоу образуются широкие гладкие пальцы, так как коротковолновая неустойчивость подавлена поверхностным натяжением. В прямоугольной ячейке лидирующий палец экранирует соседние. В результате “выживший” палец заполняет примерно половину ячейки. В [2] показано, что в радиальной ячейке Хеле Шоу пальцы ветвятся, достигнув критической ширины. Эта ширина также определяется поверхностным натяжением, и форма пальцев по-прежнему гладкая.

Авторы [3] использовали более реалистичную модель — слой искусственной пористой среды между двумя прозрачными дисками. В этой ячейке получена другая картина радиального вытеснения. Поперечник пальца определяется размером пор. Пальцы разрастаются, в окрестности концов выпускают отростки, и таким образом развиваются ветвистые разреженные структуры. Вытеснение в прямоугольной ячейке исследовалось в [4], где получены сходные формы. В тех случаях, когда можно пренебречь поверхностным натяжением, подобные картины наблюдаются и в ячейках Хеле Шоу [5]. Эти результаты подтвердили аналогию между вязким вытеснением и диффузионно-лимитированной агрегацией (ДЛА), отмеченную в [6]. Процесс ДЛА, рассмотренный в [7, 8], состоит в образовании кластера из малых частиц, диффундирующих к его поверхности. Стационарная диффузия, как и линейная фильтрация, описывается уравнением Лапласа, а граница кластера растет со скоростью, пропорциональной градиенту концентрации. В процессе ДЛА образуются разветвленные структуры, которые воспроизводятся в стохастических моделях роста. Аналогичные задачи возникают при исследовании электрического пробоя, причем давление заменяется потенциалом. Роль невязкой жидкости играет эквипотенциальная система каналов разряда. Подход, основанный на процессе ДЛА, использован при моделировании пробоя в [9].

В настоящее время линейные задачи типа (1), (2) достаточно подробно исследованы. Установлено, что неустойчивость границы ведет к развитию сложных (фрактальных) структур. В частности, кластер, образованный струями невязкой жидкости, описывается основным соотношением  $M \sim R^D$ . Здесь  $M$  — масса кластера (или занятый им объем);  $R$  — его характерный размер. Показатель  $D$  — фрактальная (дробная) размерность, меньшая размерности вмещающего пространства, вследствие чего большие кластеры сильно разрежены. Например, в [3] для двумерного радиального вытеснения получена размерность 1,62.

Малоизученными остаются нелинейные задачи. В работах [9, 10] моделировался электрический пробой в предположении, что скорость разрастания границы разряда пропорциональна электрическому полю в степени  $\eta$ . При  $\eta \neq 1$  граничное условие роста было нелинейным, однако формулировка задачи в пространстве осталась линейной (решалось уравнение Лапласа). В работе [5] рассматривалось вытеснение неньютоновской жидкости, для которой  $u \sim |\nabla p|^m$ , где  $m > 1$ .

Для быстрой фильтрации, когда число Рейнольдса, вычисленное по характерному размеру пор, велико, вместо линейного соотношения (1) выполняется квадратичный закон сопротивления [11, 12] (режим Форхгеймера)

$$\rho \mathbf{u} |\mathbf{u}| = -f \nabla p. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $f$  — постоянный коэффициент, по порядку величины близкий к размеру пор. В случае несжимаемой жидкости из условия неразрывности для давления получаем уравнение

$$\nabla \cdot (\nabla p |\nabla p|^{-1/2}) = 0. \quad (4)$$

Если жидкость вытесняется газом малой плотности, то в газовой области градиент давления мал, и на границе раздела давление практически постоянно. Нормальная скорость границы пропорциональна  $|\nabla p|^{1/2}$ .

Качественно нелинейная задача (3), (4) аналогична задаче о вязком вытеснении, и следует ожидать неустойчивости вытеснения (роста выступов и их разветвления). По аналогии с неустойчивостью вязкого течения можно говорить о неустойчивости “плотного”, или “невязкого”, пальца.

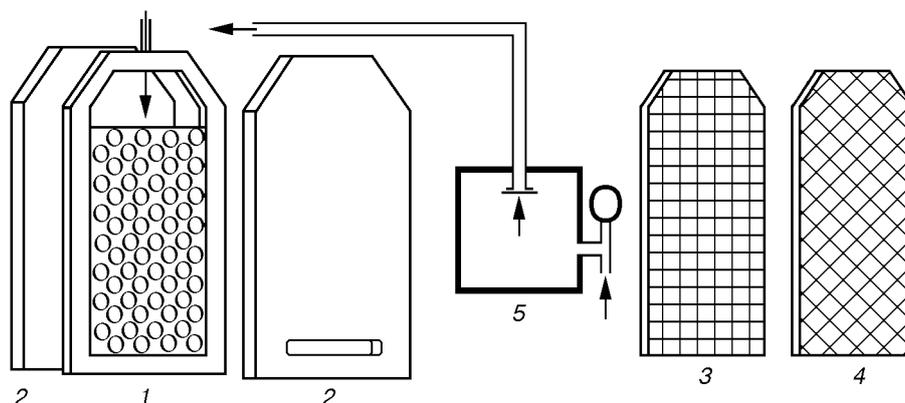


Рис. 1

Задача (3), (4) рассмотрена в [13]. Начальная стадия роста возмущений малой амплитуды изучалась аналитически, а рост длинных пальцев — численно. Возмущения развивались медленнее, чем в “вязкой” задаче. В результате образовывались более плотные кластеры, чем в лапласовском случае. Тем не менее область вытеснения оказалась фрактальной, хотя фрактальная размерность в этом случае получилась несколько больше.

Невязкая неустойчивость в пористой среде представляет определенный интерес. Ситуации, когда течение быстрое настолько, что применим простейший подход (3), (4), довольно обычны. Например, эта постановка приближенно описывает фильтрацию продуктов горения в пористом энергетическом материале. Высокая температура продуктов соответствует их малой плотности, а роль вытесняемой жидкости играет газ (воздух) в поровом пространстве. Неустойчивость границы раздела может приводить к формированию вырывающихся вперед струй пламени.

Представляет интерес вопрос, образуются ли в реальном быстром течении структуры возрастающей сложности, как это происходит с вязкими фракталами [3], или доминирует тип неустойчивости, когда геометрия течения прогрессивно упрощается [1]. В настоящей работе представлены экспериментальные результаты, полученные для нелинейного вытеснения, а также теоретические оценки. Особое внимание уделяется вытеснению в регулярных анизотропных моделях пористой среды. Анизотропия почти неизбежна для двумерной модели, представляющей собой набор каналов и препятствий: в двумерном слое проще визуализировать процесс.

Следует отметить, что течение в моделях канального типа может существенно отличаться от течений в реальных пористых средах. Поэтому не всегда результаты могут быть перенесены на случай природной (изотропной или анизотропной) среды. Тем не менее использование модельных сред — это естественный первый шаг при исследовании фильтрационных течений. Кроме того, модельные течения представляют и самостоятельный интерес (подобно течениям Хеле Шоу). Канальная анизотропия может существенно влиять на процесс горения. Распространение пламени в решетках каналов рассматривалось, например, в [14].

**1. Эксперимент.** Для визуализации вытеснения плотной жидкости газом применялась специальная ячейка (рис. 1). Металлическая обойма 1 и две толстые стенки из оргстекла 2 образовывали камеру, где размещалась плоская модель пористой среды. Модель первого типа (схематически показана в обойме) — регулярный монослой одинаковых стальных шариков. Использовались шарики диаметром 2,5 либо 12,2 мм. Модель второго типа — пластина из оргстекла, на одной из сторон которой прорезана квадратная решетка каналов, имитирующая поровое пространство. Период решетки  $d = 6$  мм, глубина и

ширина прорезанных каналов  $\delta = 2$  мм. На рис. 1 показаны две вставки 3, 4 с различной ориентацией каналов. При продольной ориентации одно из направлений решетки совпадает с направлением вытеснения. При диагональной ориентации каналы прорезаны под углами  $\pm 45^\circ$  к направлению основного течения.

Ячейка заполнялась жидкостью. В ресивер 5, соединенный с камерой и снабженный клапаном в виде разрывающейся мембраны, накачивался воздух. После открытия клапана сжатый воздух проникал в камеру и начинал вытеснять жидкость. На нижней границе камеры отверстия соединяли ячейку с полостью, заполненной жидкостью и закрытой пробкой. Под давлением пробка вылетала, и жидкость могла вытекать наружу. Сечение выходных отверстий было достаточным, чтобы пренебречь их гидравлическим сопротивлением. Избыточное давление воздуха (50–100 кПа) более чем на порядок превышало давление столба жидкости в ячейке. Деформация камеры внутренним давлением предотвращалась жестким креплением достаточно толстых (30 мм) стенок. Во избежание утечек сборка тщательно уплотнялась.

Капиллярный скачок давления на поверхности раздела составлял десятые доли процента избыточного давления. Влияние силы тяжести в большинстве экспериментов было незначительным, так как гравитационные перепады давления не превышали нескольких процентов избыточного давления воздуха. Однако капиллярные и гравитационные эффекты могли быть существенны в некоторых особых случаях, описанных ниже.

Скорость течения была порядка 1 м/с. Число Рейнольдса, вычисленное по поперечнику канала или по характерному размеру поры, порядка нескольких тысяч. Это означает, что закон сопротивления близок к квадратичному [15].

Ширина ячейки  $l = 20$  см, длина  $L = 50$  см. Объем ресивера (1 л) позволял поддерживать на границе давление, близкое к постоянному (например, для слоя малых шариков падение давления при вытеснении половины столба жидкости составляло менее 10%). Это условие нарушалось для слоя шариков диаметром 12,2 мм, так как объем ячейки был намного больше.

При регистрации формы границы в отраженном свете либо на просвет использовалась фото-, кино- или видеосъемка. В качестве рабочей жидкости использовались подкрашенный спирт (в опытах со стальными шариками) или подкрашенная вода.

На рис. 2, а показана кинограмма одного из опытов с квадратной решеткой каналов. В каждом ряду кадры расположены слева направо, нижний ряд является продолжением верхнего. Скорость съемки 150 кадр/с. Избыточное давление воздуха 70 кПа. Ориентация решетки продольная (схематично показана на рис. 2).

Светлая область — воздух, темная — заполненные водой поры. Вначале вытеснение довольно равномерное. Примерно через  $1/15$  с (10 кадров) на фронте вытеснения хорошо видны неоднородности, которые далее развиваются в узкие продольные струи. Количество и форма струй меняются от опыта к опыту.

Анализ кадров показал, что при продольной ориентации решетки жидкость не только остается в промежутках между струями, но и вообще не вытесняется из поперечных каналов (течение имеет ярко выраженную структуру в виде вертикальных полос). Важную роль в этом играет поверхностное натяжение. Для горизонтального направления сравнительный масштаб капиллярных сил задается отношением перепадов давлений  $(4\sigma/\delta)/(d|\partial p/\partial x|)$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Для вертикального градиента  $\partial p/\partial y$  в условиях опыта эта величина была бы порядка 0,1. Поскольку горизонтальный градиент значительно меньше, поверхностные мениски способны удерживать жидкость в поперечных каналах между соседними вертикальными, уже заполненными воздухом.

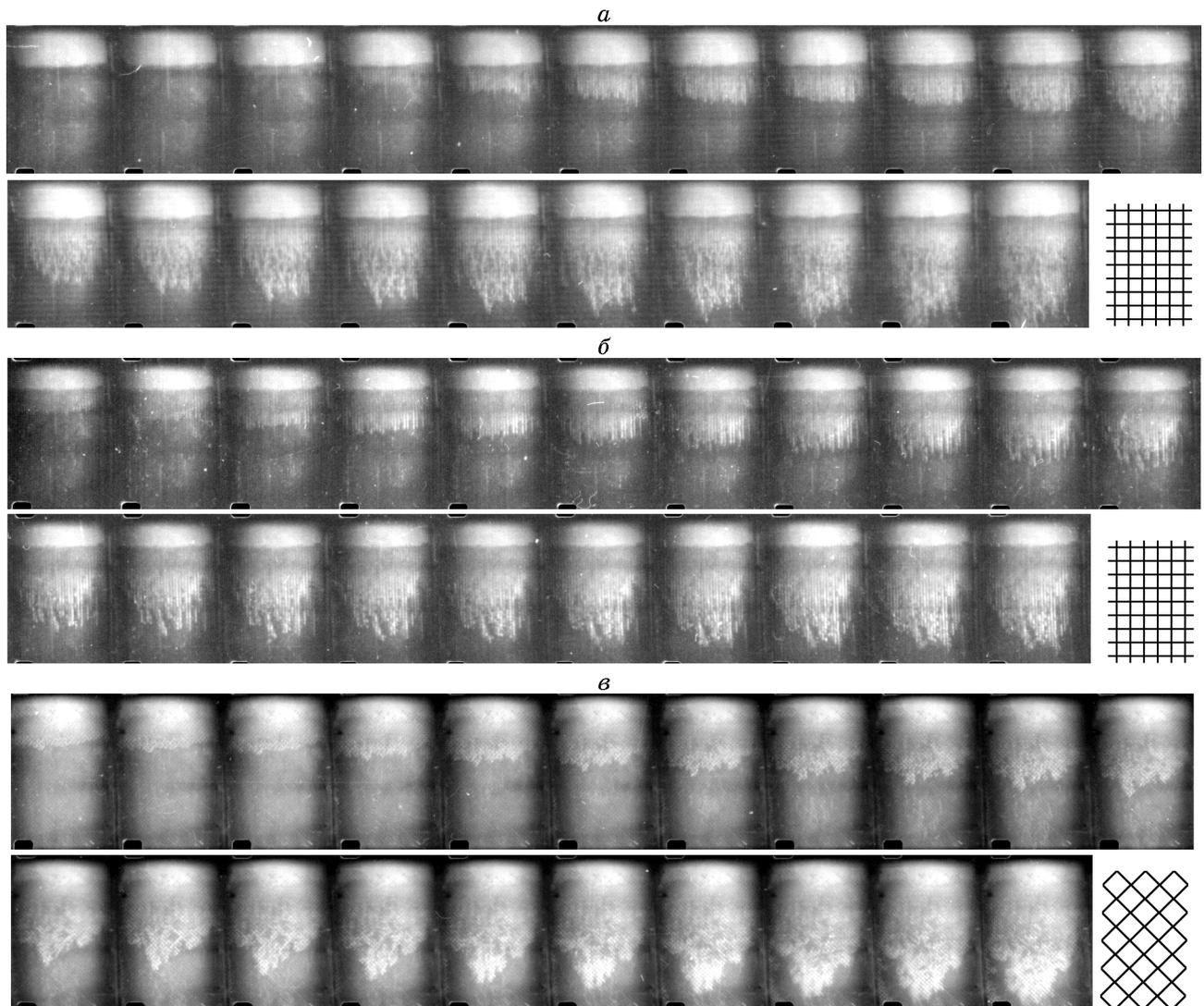


Рис. 2

Оставшаяся в поперечных каналах жидкость может влиять на результат следующего эксперимента. На рис. 2,б показана кинограмма эксперимента, в котором над уровнем сплошного заполнения имелась область частично смоченных пор (серая полоса между светлой сухой областью воздуха и темно-серой областью жидкости на первом кадре). Эта полоса существенно не меняется и видна на всех кадрах, т. е. жидкость в поперечных порах в основном неподвижна. При этом узкие пальцы развиваются гораздо быстрее (ср. с рис. 2,а). По-видимому, остаточная жидкость создает дополнительные возмущения, например в виде локальных препятствий для воздуха.

На рис. 2,в показан типичный результат “выстрела” с диагонально ориентированной решеткой. Здесь затруднен прямолинейный прорыв воздуха вдоль направления вытеснения, так как каждый канал упирается в стенки. Перепад давления тот же, что на рис. 2,а,б. Диагональное вытеснение более медленное, однако искажения фронта возникают намного быстрее. Из них также развиваются выступы. Форма их не удлиненная, а клиновидная, угол при вершине клиньев приблизительно прямой. Эти клинья становятся более выраженными с ростом амплитуды возмущений.

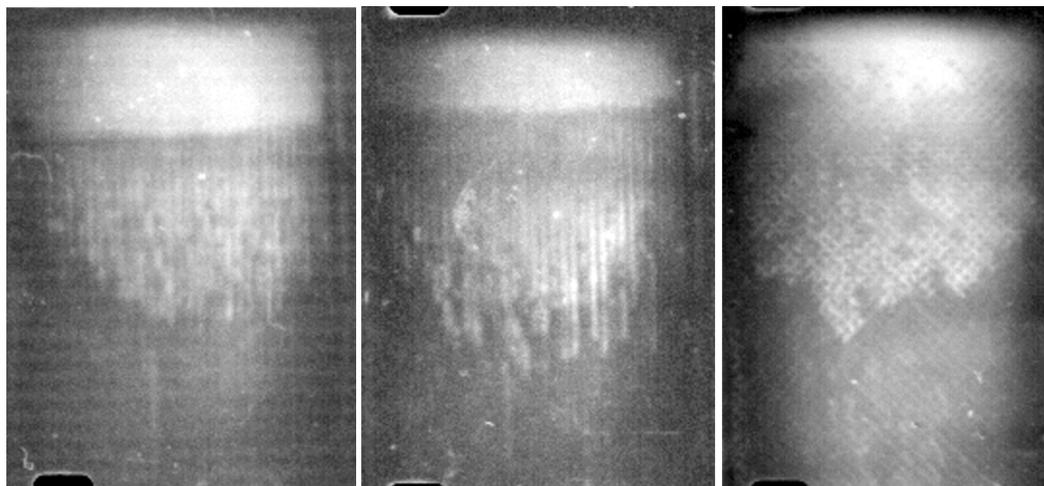


Рис. 3

В отличие от продольного в случае диагонального расположения каналов вытеснение практически полное, хотя жидкость может застревать в отдельных “карманах” позади основного фронта. Увеличенные изображения последних кадров справа в верхних рядах рис. 2, *a–в* приведены (в порядке слева направо) на рис. 3. На них хорошо видны указанные выше детали. На первых двух снимках светлых горизонтальных полос не наблюдается, а пальцы вытеснения узкие и длинные. На правом снимке отчетливо видна решеточная структура и клиновидные выступы.

Следовательно, в квадратной решетке развитое течение отражает ее симметрию, причем при обеих ориентациях предпочтительно движение вдоль каналов. Если каналы вертикальны, такие течения развиваются сразу, а при диагональном расположении каналов выступ быстро вырождается в клин, границы которого движутся почти продольно.

Приведенные выше результаты резко отличаются от полученных при медленном вязком режиме вытеснения, когда образуются ветвистые структуры [3–5]. Причина различия заключается не в нелинейности сопротивления (что влияет только на степень ветвления [13]), а в анизотропии среды. Поэтому ряд опытов был проведен с другой моделью пористой среды — слоем шариков. Эта модель представляется более изотропной (во всяком случае, характер ее анизотропии явно другой).

На рис. 4 показаны статический кадр (слева) и одна из стадий течения (справа) в слое шариков диаметром 2,5 мм. Воздух (темная область) движется сверху вниз. Избыточное давление воздуха 70 кПа. Ячейка расположена вертикально. Стрелкой показано направление течения. Светлые полосы в верхней части кадров — препятствия, выравнивающие давление воздуха над жидкостью.

Между регулярным слоем шариков и плоской стенкой всегда имеется три системы “каналов”, образующих равносторонние треугольники. Ряды шариков выкладывались снизу вверх, так что возникали просветы в горизонтальном направлении и, что более важно для течения, каналы под углами  $\pm 30^\circ$  к вертикали. Для струй воздуха заметна тенденция следовать этими путями наименьшего сопротивления. Поскольку сопротивление неоднородно также и поперек слоя, течение склонно примыкать к передней либо к задней стенке, где сопротивление течению минимально. На рис. 4 видно, что струи не сплошные, особенно в их головной части. Это означает, что струя то движется вдоль одной стенки, то внезапно “переключается” и движется вдоль другой. Этот вывод подтверждается экспериментами с более крупными шариками. Видеосъемка на просвет показала, что прозрачная область не сплошная; открывшиеся поры обычно закрываются, затем вновь открываются, и т. д.

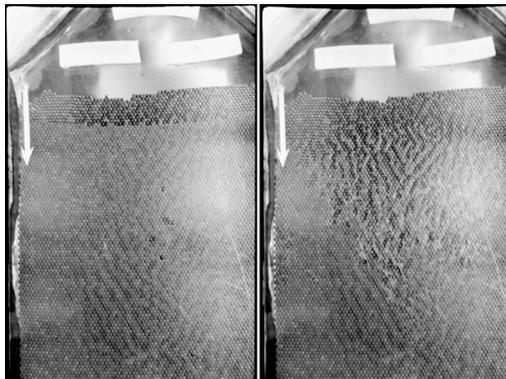


Рис. 4

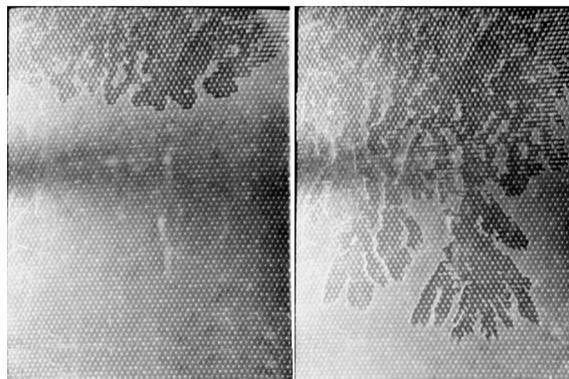


Рис. 5

Таким образом, характер течения в слое шариков оказался достаточно сложным из-за поперечной неоднородности. Оттеснение к стенкам приводит к тому, что при наблюдении в отраженном свете примерно половина объема воздуха может быть не видна.

На рис. 5 показаны исходное положение (слева) и развившееся течение (справа) в почти горизонтальной ячейке. Плоскость течения располагалась под углом около  $10^\circ$  к горизонту. Съемка в отраженном свете велась сверху. Остальные параметры опыта те же, что на рис. 4. Начальные искажения границы вызваны капиллярными эффектами. Здесь форма области вытеснения, по крайней мере качественно, согласуется с ожидаемой для изотропной среды. Видны характерные ветвящиеся струи. При съемке той же ячейки снизу картина иная: наблюдается небольшое количество узких струй. Различие объясняется тем, что при горизонтальном или слегка наклонном положении ячейки воздух из-за плавучести преимущественно прорывается по верхней части слоя.

Таким образом, аналогия с вязким режимом вытеснения частично подтверждается. Наблюдаются неустойчивость фронта и развитие струй. Вместе с тем течение в плоских модельных ячейках оказалось более разнообразным, чем можно было ожидать. Течение носит “отпечаток” симметрии анизотропной структуры модели. Только в слое шариков при почти горизонтальном расположении, когда плавучесть блокирует эффект “переключения” струй между стенками, удастся получить картины, напоминающие фрактальные кластеры вытеснения (хотя для вязкого режима течения характерны более разреженные структуры с тонкими ветвями [3, 4]). Не исключено, что течение в вертикальном слое шариков сходно с течением в почти горизонтальном слое, а наблюдаемые различия чисто внешние и связаны с тем, что струи частично скрыты на невидимой стороне ячейки. В горизонтальном течении эта тенденция подавляется плавучестью.

**2. Модель анизотропного течения.** Ограничимся простейшим случаем квадратной решетки. Вначале рассмотрим продольную ориентацию, когда каналы направлены вдоль осей  $x$  и  $y$ . Здесь и далее удобнее задать направление вытеснения вдоль оси  $y$  снизу вверх, поскольку сила тяжести в модели не учитывается.

Для течения в решетке каналов будем использовать приближение сплошной среды, в котором характерный размер течения должен быть много больше периода решетки  $d$ . Это условие выполняется по крайней мере на начальных стадиях вытеснения, когда граница раздела достаточно плавная. В течении градиент давления почти уравнивается трением. В противном случае инерционные члены были бы одного порядка с градиентом давления и достигались бы скорости течения, на порядок большие. Поэтому будем использовать модель фильтрационного типа, пренебрегая инерцией жидкости.

При типичной скорости течения 1 м/с число Рейнольдса, рассчитанное по ширине канала, превышает 2000, что достаточно для установления турбулентного режима. Оценка по формуле Пуазейля показывает, что при ламинарном продольном течении развивались бы скорости более 20 м/с. Поэтому при анализе учитывалось только квадратичное трение.

В рассматриваемых моделях пористой среды возникает своеобразный механизм сопротивления, связанный со взаимодействием потоков во взаимно перпендикулярных каналах. Рассмотрим окрестность пересечения двух каналов. Пусть в одном из них, например вертикальном, скорость течения равна  $V$ . Через сечение входящего в него поперечного канала поступает жидкость с горизонтальной скоростью  $U$ , при этом такое же количество жидкости вытекает в выводящий поперечный канал. Подчеркнем, что средние вертикальные скорости этих потоков различны. Вертикальная скорость втекающей из горизонтального канала жидкости практически нулевая, а вытекающей — порядка  $V$ . Чтобы поддерживать такой вынос вертикального импульса из области пересечения, необходим вертикальный градиент давления, пропорциональный произведению  $UV$ . Войдя в горизонтальный канал, жидкость теряет вертикальный импульс (передает его стенке).

Таким образом, при быстром течении жидкости в каналах разумным приближением будет следующая система уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -bv|u| - av|v|, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -bu|v| - au|u|. \quad (5)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — компоненты средней скорости течения вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $a = \alpha\rho/\delta$ ;  $b = \beta\rho/d$ ;  $d$  — период решетки;  $\delta$  — поперечник канала;  $\alpha$  и  $\beta$  — безразмерные коэффициенты. В уравнениях (5) первый член в правой части описывает эффект торможения течения в данном направлении (например,  $y$ ) из-за инъекции массы из поперечной системы каналов (в данном случае со скоростью  $|u|$ ), причем  $\beta$  порядка 1. Второй член описывает обычное квадратичное трение (слабой зависимостью коэффициента сопротивления  $\alpha$  от скорости течения пренебрегаем).

Согласно (5) градиент давления не антипараллелен скорости. В общем случае, когда компоненты одного порядка, первые (перекрестные) члены вносят заметный вклад в сопротивление. При  $b > a$  они отклоняют градиент давления к биссектрисе квадранта, противоположного тому, в котором лежит вектор скорости, а при  $b < a$  градиент “прижимается” к оси координат, ближайшей к направлению скорости. Следует отметить, что анизотропия сохраняется и при  $a = b$ . Хотя в этом случае градиент противоположен направлению скорости, величина градиента зависит от направления течения (сопротивление максимально в случае течения вдоль диагонали). Этим геометрическим свойством модель (5) отличается от известных анизотропных моделей пористых сред [11, 12]. Отличие связано с тем, что в системе каналов коэффициенты сопротивления линейны по модулям компонент скорости.

Для диагональной ориентации пусть ось  $y$  по-прежнему совпадает с начальным направлением вытеснения, а ось  $x$  — с исходным положением границы. В системе координат, повернутой на угол  $45^\circ$ , система (5) записывается в виде довольно громоздких уравнений. Однако система заметно упрощается для начальной стадии вытеснения. Если течение в основном вертикальное ( $v > 0$ ,  $|u| < v$ ), то модули можно опустить:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{b(v^2 - u^2) + a(v^2 + u^2)}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\sqrt{2}auv. \quad (6)$$

В экспериментах измерялась скорость вытеснения  $V$  для обеих ориентаций решетки в начальной стадии, когда движение можно считать одномерным (т. е. пренебречь горизонтальной компонентой скорости  $u$ ). Согласно (5)  $v = \sqrt{\Delta p/(az)}$ , где  $\Delta p$  — перепад давления;  $z$  — начальная высота столба жидкости. В случае продольного движения средняя

вертикальная скорость  $v$  не совпадает со скоростью смещения границы вытеснения  $V$ , так как в горизонтальных отрезках каналов в окрестности границы жидкость практически неподвижна. Поскольку вертикально направленные струи занимают 60 % полного объема пор, с хорошей точностью выполняется соотношение  $v = 0,6V$ . В диагональном случае из (6) получим  $v = \sqrt{\sqrt{2}\Delta p / ((a+b)z)}$ , и скорость границы можно считать равной средней вертикальной скорости:  $v = V$ . При перепаде давления 70 кПа получены скорости  $V_l = (1,65 \pm 0,13)$  м/с при продольном движении и  $V_d = (0,89 \pm 0,075)$  м/с при диагональном. Отсюда легко найти коэффициенты сопротивления:  $\alpha \approx 0,36$  и  $\beta \approx 0,8$ .

При продольном вытеснении можно написать соотношение между градиентом давления и скоростью струй  $V$ :  $\Delta P/z = \alpha\rho(0,6V)^2/\delta$ . Эффективный коэффициент сопротивления каналов  $0,36\alpha = 0,13$ . Это значение в несколько раз больше значения, которое следует из известных соотношений для гладких труб ( $\alpha \approx 0,02$  при квадратном поперечном сечении [15]). По-видимому, значительный вклад вносит “проницаемость” стенок — поперечные каналы, на срезе которых возможен обмен массой и импульсом даже в отсутствие макроскопического поперечного течения.

Относительный вклад сопротивлений, вызванных поперечной инъекцией массы и собственно трением, дается отношением  $b/a \approx 0,75$ , которое можно считать мерой анизотропии решетки.

**3. Начальная стадия неустойчивости.** Инкременты роста возмущений на фронте вытеснения можно найти из уравнений (5), (6), линеаризованных по амплитуде возмущения. Более проста эта процедура для “диагональной” задачи. Пусть в невозмущенном течении задан вертикальный градиент давления, по величине равный  $|\nabla p|_0$ . Из (6), считая  $u \ll v$ , имеем

$$v = \left( -\frac{\sqrt{2}}{b+a} \frac{\partial p}{\partial y} \right)^{1/2}, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}av} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Полагая  $p = p_0 - y|\nabla p|_0 + p'$  ( $p_0$  — приложенное давление;  $p'$  — малая добавка), в первом порядке по  $p'$  из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Пусть при  $t = 0$  форма границы задается уравнением  $y = h \cos(kx)$ , причем амплитуда возмущения мала:  $kh \ll 1$ . На границе полное давление фиксировано, так что  $p' = |\nabla p|_0 y = |\nabla p|_0 h \cos(kx)$ . Снося это условие на ось  $x$ , находим решение (7) в виде  $p' = |\nabla p|_0 h \cos(kx) \exp(-\sqrt{1+b/a} ky)$ .

Возмущение в вертикальном направлении спадает быстрее по сравнению с вязким течением ( $\exp(-ky)$  [1]), как и в изотропном случае при квадратичном законе трения ( $\exp(-\sqrt{2} ky)$  [13]).

В анизотропной среде скорость течения жидкости не обязательно нормальна к границе раздела (в отличие от изотропной среды). Однако для волн малой амплитуды этим отклонением можно пренебречь и приравнять скорость границы к вертикальной компоненте  $v$ . Получим

$$v = \left[ \frac{\sqrt{2}|\nabla p|_0}{b+a} \left( 1 + kh\sqrt{1+\frac{b}{a}} \cos(kx) \right) \right]^{1/2} \approx V \left( 1 + \frac{kh}{2} \sqrt{1+\frac{b}{a}} \cos(kx) \right).$$

Здесь  $V$  — невозмущенное значение скорости. Следовательно, при диагональном расположении каналов амплитуда возмущения растет по закону  $dh/dt = (hkV/2)\sqrt{1+b/a}$ . Инкремент роста возмущения  $\gamma_d = (Vk/2)\sqrt{1+b/a}$ .

В изотропном случае  $\gamma = Vk/\sqrt{2}$  [13]. Для экспериментального значения  $b/a \approx 0,75$  различие инкрементов составляет около 7% (находится в пределах экспериментального разброса).

Аналогично для продольного течения из (5) при  $u \ll v$  получим

$$v = \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \right]^{1/2}, \quad u = -\frac{1}{bv} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Вновь используя уравнение неразрывности, в первом порядке по возмущению  $p'$  получаем

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} + \frac{2a}{b} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение значительно сложнее, чем (7), из-за присутствия разрывного коэффициента  $\operatorname{sgn}(\partial p/\partial x)$ , равного  $\pm 1$  в зависимости от знака  $\partial p/\partial x$ . Этот коэффициент можно заменить на  $\operatorname{sgn}(\partial p'/\partial x)$ , поскольку в невозмущенном течении  $\partial p/\partial x = 0$ .

Регуляризация уравнения (8) требует дополнительных предположений. Кроме того, нет уверенности, что (8) описывает неустойчивость продольного течения, поскольку из-за явной неполноты вытеснения процесс более сложный. Поэтому в продольном случае инкремент получить не удалось.

Визуально скорости роста малых возмущений для продольной (см. рис. 2,а) и диагональной (см. рис. 2,б) ориентации заметно отличаются: при диагональном вытеснении рост более быстрый. Для оценки этого различия данные опытов оцифровывались и подвергались гармоническому анализу:

$$y(x) = A_0 + \sum A_n \cos \frac{2n\pi x}{l} + \sum B_n \sin \frac{2n\pi x}{l},$$

где  $l$  — ширина ячейки;  $n = 1 \div 20$  — номер гармоники. Амплитуда данной гармоники  $C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}$  возрастает по закону

$$\ln(C_n(t)/C_n(0)) = n\pi H\theta/l, \quad (9)$$

где  $H = Vt$  — среднее смещение границы; коэффициент  $\theta$  зависит от ориентации решетки. Для диагонального вытеснения теоретическое значение  $\theta_d = \sqrt{1 + b/a} \approx 1,32$ . Амплитуды гармоник и среднее смещение  $H$  определялись в течение 1/30 с от начала процесса (первые 5 кадров). Среди всех волн выбирались две с максимальной амплитудой. Основная гармоника ( $n = 1$ ) была наиболее выраженной. Меньшую амплитуду имела обычно вторая, но иногда третья либо четвертая гармоника. Амплитуды остальных волн были порядка  $\delta$  или меньше, т. е. недостаточны для определения инкрементов. Предполагая согласно (9), что  $\ln(C_n(t)/C_n(0)) \sim H(t)$ , методом наименьших квадратов вычислялись геометрические коэффициенты  $\theta_d$  и  $\theta_l$ . Полученные средние значения равны:  $\theta_l = 0,69 \pm 0,11$  и  $\theta_d = 1,18 \pm 0,17$ .

Несмотря на грубость модели, теоретическое значение  $\theta_d$  близко к экспериментальному, особенно если учесть значительный разброс экспериментальных данных. К сожалению, имеющиеся данные не позволили получить более детальную информацию. Во-первых, спектральный интервал, в котором справедлив макроскопический подход, не особенно широк. Применимость континуальной модели ограничена условием  $kd = 2\pi nd/l \leq 1$ , которое выполнялось при  $n \leq 5$ . Во-вторых, фаза линейного роста непродолжительна, что затрудняет более точное определение скорости роста.

**4. Развитая стадия неустойчивости.** В квадратных решетках, в отличие от изотропного случая, картина вытеснения не является фрактальной при обеих ориентациях каналов. Заметного ветвления пальцев не наблюдалось. Качественно это можно объяснить следующим образом.

При продольном вытеснении на оси растущего в направлении  $y$  пальца сопротивление сводится к чистому трению:  $\partial p / \partial y \approx -av^2$ . Разрастанию же боковой границы пальца в направлении  $x$  противодействует, кроме трения, поперечный эффект:  $\partial p / \partial x \approx -bVu - au^2$ . Скорость  $V$  индуцируется движением основания пальца, т. е. основным фронтом вытеснения, и имеет тот же порядок, что и скорость роста верхушки. Кроме того, поперечный градиент давления меньше продольного, и скорость  $u$  течения в боковом направлении мала. Компоненты градиента одного порядка только вблизи вершины пальца, заметно опередившего соседей. Из-за сравнительно медленного развития продольной неустойчивости такое состояние для каждого из поперечных каналов непродолжительно. В результате заметного бокового разрастания пальца не происходит.

При диагональной ориентации рост неустойчивости быстрый, и выступы быстро достигают клиновидной стадии. После этого их форма становится более стабильной, так как движение границ близко к продольному. (Следует отметить, что это распространение не в точности продольное, поскольку жидкость вытесняется полностью (см. рис. 3).) Эксперимент показывает, что на клиньях не развиваются более мелкие выступы. Скорее, наоборот, мелкие клинья сливаются в более крупные образования.

На конечной стадии в центральной части ячейки формируется один большой выступ. Это можно объяснить тем, что на течение в нижней части ячейки существенно влияют выходные отверстия, из-за чего сопротивление в центре потока уменьшается. Более быстрое распространение по середине ячейки наблюдается и при продольном вытеснении: система струй на рис. 2,  $a, b$  в конце процесса напоминает кисть руки.

Таким образом, анизотропность блокирует фрактальный режим, по крайней мере при данном масштабе опыта (когда поперечный размер ячейки составлял около 33 периодов решетки). Вряд ли фрактальный режим вытеснения может осуществиться и в экспериментах большего масштаба, поскольку не отмечается ветвления пальцев.

В случае слоя шариков расположение каналов ближе к диагональному. Однако из-за большей геометрической сложности порового пространства структура течения в этой модели более многообразна по сравнению с регулярными решетками, в частности, из-за бифуркаций струй между стенками. Количество жидкости, которая не вытесняется из пористой среды, в этом случае значительно больше, чем в диагональной решетке.

Учитывая заметную анизотропность шарового слоя, несколько неожиданными являются результаты, полученные в ячейке с расположением, близким к горизонтальному (см. рис. 5). В этом случае структура имеет “почти” фрактальный вид. Можно полагать, что в пристенном слое анизотропия шаровой модели не настолько велика, чтобы нарушить естественный для изотропного случая процесс ветвления при вытеснении. Чтобы ветви были видны, течение должно быть прижато к плоскости наблюдения.

**5. Выводы.** Быстрое вытеснение плотной жидкости газом неустойчиво. В анизотропной среде скорость роста возмущений малой амплитуды зависит от направления течения. Развитие неустойчивостей приводит к формированию картины струй, форма которых определяется симметрией среды. Фрактальные структуры, характерные для линейного режима фильтрации, не наблюдались в квадратных решетках каналов. Тем не менее вытеснение резко неоднородно и выступы заметно опережают средний фронт. В почти горизонтальном слое шариков получены структуры, подобные фрактальным, но более плотные, чем в случае изотропного режима вытеснения.

Предложенная модель (5) позволяет понять природу квадратичной “инерционной” составляющей сопротивления не только для изотропной, но также и для изотропной пористой среды. Течение в порах можно представить как набор струек со средней скоростью  $V$ . Случайная поперечная компонента скорости в общем случае также порядка  $V$ . Поперечный массообмен между струйками транспортирует часть жидкости из каналов,

направление которых ближе к продольному, в поперечные, где и тормозится направленное течение. Такие потери продольного импульса могут быть одним из основных механизмов, порождающих квадратичное сопротивление в пористой среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Saffman P. G., Taylor G. I.** The penetration of a fluid into a porous medium or Hele Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. 1958. V. A245, N 1242. P. 311–329.
2. **Paterson L.** Radial fingering in a Hele Shaw cell // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 513–529.
3. **Måløy K. J., Feder J., Jøssang T.** Viscous fingering fractals in porous media // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55, N 24. P. 2688–2691.
4. **Lenormand R., Touboul E., Zarcone C.** Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media // J. Fluid Mech. 1988. V. 189. P. 165–187.
5. **Daccord G., Nittman J., Stanley H. E.** Radial viscous fingers and diffusion-limited aggregation: Fractal dimension and growth sites // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56, N 4. P. 336–339.
6. **Paterson L.** Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacement in porous media // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52, N 18. P. 1621–1624.
7. **Witten T. A., Sander L. M.** Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47, N 19. P. 1400–1403.
8. **Witten T. A., Sander L. M.** Diffusion-limited aggregation // Phys. Rev. B. 1983. V. 27, N 9. P. 5686–5697.
9. **Niemeyer L., Pietronero L., Wiesmann H. J.** Fractal dimension of dielectric breakdown // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52, N 12. P. 1033–1036.
10. **Evertsz C.** Self-affine nature of dielectric-breakdown model clusters in a cylinder // Phys. Rev. A. 1990. V. 41, N 4. P. 1830–1842.
11. **Шейдеггер А. Э.** Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960.
12. **Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.** М.: Наука, 1969.
13. **Ershov A. P., Kupershtokh A. L., Dammer A. Ya.** Fingering in the fast flow through porous medium // J. de Physique II France. 1993. V. 3, N 7. P. 955–959.
14. **Архипов В. А., Вилюнов В. Н., Козлов Е. А., Трофимов Вл. Ф.** О конвективном горении в упорядоченных пористых структурах // Физика горения и взрыва. 1986. Т. 22, № 4. С. 25–30.
15. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

*Поступила в редакцию 14/X 1999 г.,  
в окончательном варианте — 4/IV 2000 г.*

---