

УДК 519.63

DOI: 10.15372/PMTF202315400

ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ РАСЧЕТОВ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМПОЗИТНОМ ОБРАЗЦЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ

А. В. Васюков, И. Б. Петров

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

E-mails: vasyukov.av@mipt.ru, petrov@mipt.ru

С использованием сеточно-характеристического численного метода на сетках из тетраэдров проводится моделирование волновых процессов в композитном материале при действии импульсной ударной нагрузки. Предложен подход к повышению порядка аппроксимации метода на неструктурированной сетке в трехмерном случае. Приведены результаты расчетов распространения импульса нагрузки в трехслойном композите.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, неструктурированная сетка, расширенный шаблон, динамическая задача, анизотропная упругость

Введение. В данной работе проводится моделирование волновых процессов в композитном материале при воздействии короткого импульса динамической нагрузки. Такая постановка характерна для задач неразрушающего контроля композитного образца.

Для численного решения используется сеточно-характеристический метод, позволяющий с высокой точностью описать волновые фронты в твердом теле. Сеточно-характеристический численный метод ранее применялся для решения задач динамической прочности инженерных объектов [1], объектов железнодорожной инфраструктуры [2], биомедицинских задач [3].

В данной работе используется неструктурированная расчетная сетка из тетраэдров, с помощью которой описывается область интегрирования для практически значимых постановок задач для инженерных объектов сложной формы. Применяется подход, позволяющий повысить порядок аппроксимации сеточно-характеристического метода на неструктурированной расчетной сетке за счет расширения шаблона, без использования вспомогательных точек на ребрах и гранях ячеек сетки, что позволяет упростить топологию ячеек сетки.

1. Математическая модель. В данной работе для описания слоя композита используется система уравнений линейной анизотропной упругости. Данное приближение корректно для случая малых деформаций, в том числе при моделировании процессов неразрушающего контроля композитных изделий. Следует отметить, что для решения многих других задач требуются более сложные модели материала. Так, при описании сильного деформирования образцов необходимо учитывать различие модулей при нагружении растяжением и сжатием [4]. Для моделирования интенсивной ударной нагрузки требуются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-11-00035).

нелинейные модели [5]. Сложные структуры, включающие твердые и тканевые композиты [6], могут описываться разными системами уравнений для отдельных элементов.

Поскольку результаты, получаемые в данной работе, могут быть применены при решении задач неразрушающего контроля, используется линейная модель анизотропного тела. Для решения большинства практических задач обычно достаточно орторомбической анизотропии свойств материала. Тем не менее при использовании модели и построении численного метода данное ограничение не накладывается и эти задачи формулируются для произвольной анизотропии.

Для трехмерного случая система уравнений, описывающая деформирование композитной пластины, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= c_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{14} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{15} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= c_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{24} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{25} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{26} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= c_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{34} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{35} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{36} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= c_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{24} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{44} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{46} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= c_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{55} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= c_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
 &\quad + c_{46} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{66} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты в последних шести уравнениях являются составляющими тензора упругих постоянных четвертого ранга, выражение для которого в данном случае может быть записано в виде

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}.$$

Вводя вектор $\mathbf{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$, уравнения (1) можно записать в матричной форме, удобной для численного решения [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь матрицы A_x , A_y , A_z имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_x = - & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{16} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{26} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_y = - & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ c_{16} & c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{66} & c_{26} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{25} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_z = - & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ c_{15} & c_{14} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Численный метод. Для численного решения многомерной системы уравнений используется расщепление по направлениям. Задача расщепляется по пространственным переменным на три независимых уравнения, которые решаются последовательно на каждой временной итерации. К функциям на текущем временном слое применяется оператор, соответствующий пространственной производной вдоль оси OX , после чего к полученному результату применяется оператор, соответствующий пространственной производной вдоль оси OY , а затем оператор, соответствующий пространственной производной вдоль оси OZ . В результате применения последнего оператора получаем значения функций на новом временном слое [8].

При решении задачи вдоль каждого пространственного направления осуществляется переход к инвариантам Римана. Для этого каждую из матриц A_x , A_y , A_z необходимо представить в виде $A_i = \Omega_i^{-1} \Lambda_i \Omega_i$ [9]. Ввиду их блочной структуры можно сделать это аналитически.

Введем обозначение $\lambda^2 = t$, где λ — собственные значения матрицы A_x ; параметр t определяется из кубического уравнения

$$t^3 - \frac{1}{\rho} (c_{11} + c_{55} + c_{66}) t^2 - \frac{1}{\rho^2} (c_{15}^2 - c_{11}c_{55} + c_{16}^2 - c_{11}c_{66} + c_{56}^2 - c_{55}c_{66}) t + \frac{1}{\rho^3} ((c_{56}^2 - c_{55}c_{66})c_{11} + (c_{16}c_{55} - c_{15}c_{56})c_{16} + (c_{15}c_{66} - c_{16}c_{56})c_{15}) = 0. \quad (4)$$

Решения данного уравнения могут быть вычислены аналитически с помощью тригонометрической формулы. В результате получаем следующие собственные значения A_x :

$$\{\sqrt{t_{11}}, -\sqrt{t_{11}}, \sqrt{t_{12}}, -\sqrt{t_{12}}, \sqrt{t_{13}}, -\sqrt{t_{13}}, 0, 0, 0\},$$

где t_{11} , t_{12} , t_{13} — действительные положительные корни уравнения (4).

Аналогично для A_y находим

$$t^3 - \frac{1}{\rho} (c_{22} + c_{44} + c_{66}) t^2 - \frac{1}{\rho^2} (c_{24}^2 - c_{22}c_{44} + c_{26}^2 - c_{22}c_{66} + c_{46}^2 - c_{44}c_{66}) t + \frac{1}{\rho^3} ((c_{46}^2 - c_{44}c_{66})c_{22} + (c_{26}c_{44} - c_{24}c_{46})c_{26} + (c_{24}c_{66} - c_{26}c_{46})c_{24}) = 0. \quad (5)$$

Собственные значения A_y можно записать в виде

$$\{\sqrt{t_{21}}, -\sqrt{t_{21}}, \sqrt{t_{22}}, -\sqrt{t_{22}}, \sqrt{t_{23}}, -\sqrt{t_{23}}, 0, 0, 0\},$$

где t_{21} , t_{22} , t_{23} — действительные положительные корни уравнения (5).

Аналогично для A_z имеем

$$t^3 - \frac{1}{\rho} (c_{33} + c_{44} + c_{55}) t^2 - \frac{1}{\rho^2} (c_{34}^2 - c_{33}c_{44} + c_{35}^2 - c_{33}c_{55} + c_{45}^2 - c_{44}c_{55}) t + \frac{1}{\rho^3} ((c_{45}^2 - c_{44}c_{55})c_{33} + (c_{35}c_{44} - c_{34}c_{45})c_{35} + (c_{34}c_{55} - c_{35}c_{45})c_{34}) = 0. \quad (6)$$

Собственные значения A_z можно представить в виде

$$\{\sqrt{t_{31}}, -\sqrt{t_{31}}, \sqrt{t_{32}}, -\sqrt{t_{32}}, \sqrt{t_{33}}, -\sqrt{t_{33}}, 0, 0, 0\},$$

где t_{31} , t_{32} , t_{33} — действительные положительные корни уравнения (6).

После вычисления собственных значений A_x , A_y , A_z собственные векторы матриц (3) находятся из решения системы линейных уравнений.

Выполнив разложение матриц для пространственной производной по любому направлению, получаем соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega^{-1} \Lambda_x \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

из которого следует

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda_x \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

После введения обозначения $\mathbf{w} = \Omega \mathbf{u}$ исходная система распадается на независимые уравнения вида

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_{ix} \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0.$$

В результате выполнения данной операции дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x,$$

т. е. вдоль характеристики $dx/dt = \lambda_x$ можно выполнить перенос значения:

$$w(x, y, z, t) \Big|_{dx/dt=\lambda_x} = w(x, y, z).$$

Таким образом, для нахождения значения функции в момент времени t_{n+1} из заданной точки проводится характеристика (прямая, задаваемая уравнением $x = \lambda_x t$) на предыдущий слой по времени t_n . В точке пересечения (x_0, y_0, z_0, t_n) этой прямой с плоскостью $t = t_n = \tau n = \text{const}$ аппроксимируется значение функции с использованием известных значений в точках на данном слое по времени. Далее это значение переносится в точку $(x_0 + \lambda_x \tau, y_0, z_0, t_{n+1})$.

Для обеспечения высокого порядка аппроксимации численного метода требуется высокий порядок аппроксимации значения инварианта Римана на предыдущем слое по времени в некоторой произвольной точке расчетной области. В данной работе интерполяционный полином строится по k ближайшим точкам без учета топологии ячеек расчетной сетки [10]. Этот подход аналогичен классическому расширению шаблона на структурированной сетке.

Для получения схемы второго порядка необходимо определить 10 коэффициентов интерполяционного полинома общего вида:

$$P(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j.$$

Для этого выбираются 10 точек, ближайших к требуемой, по ним вычисляются коэффициенты полинома. Также в данной работе используется простейший ограничитель минимакс.

Следует отметить, что существуют альтернативные подходы. Возможно повышение порядка за счет добавления дополнительных точек на ребрах и гранях ячеек расчетной сетки [11] или за счет использования продолженной системы уравнений [12]. Однако в данной работе используется подход к получению высокого порядка численного метода с помощью сетки из тетраэдров с простой топологией ячеек.

3. Расчет динамического деформирования трехслойного образца. Для проверки описанной выше численной схемы проведем расчет распространения короткого импульса нагрузки в трехслойном образце. Расчетная область показана на рис. 1. Образец состоит из трех плоских слоев, размеры каждого из которых равны $50,0 \times 50,0 \times 2,5$ мм.

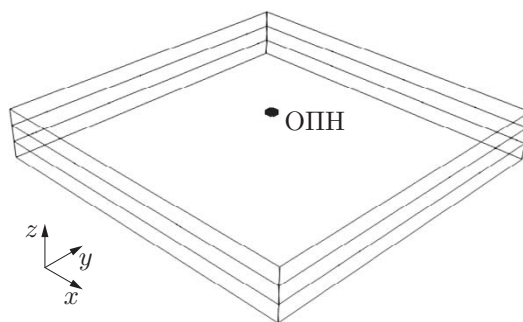


Рис. 1. Расчетная область (ОПН — область приложения нагрузки на поверхности верхнего слоя)

Все слои состоят из одного и того же однонаправленно армированного волокнистого композита, но имеют разную ориентацию в укладке. Все армирующие волокна лежат в плоскости слоев. Таким образом, каждый слой является трансверсально-изотропным. Для трансверсально-изотропного тела тензор упругих постоянных упрощается и принимает следующий вид:

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}.$$

Расчеты проводились при следующих значениях постоянных: $c_{11} = 25$ ГПа, $c_{33} = 8,5$ ГПа, $c_{13} = 0,35$ ГПа, $c_{23} = 0,25$ ГПа, $c_{44} = c_{66} = 7$ ГПа. Плотность материала слоев равна 1500 кг/м^3 .

Ориентация слоев в укладке $-45/0/45$, угол между направлениями волокон в двух соседних слоях составляет 45° . В центральном слое укладки выделенное направление ориентировано вдоль оси OY , в верхнем и нижнем слоях — под углами 45° к нему, отсчитываемыми в противоположных направлениях.

Импульс нагрузки задан в центре верхней поверхности в круглой области радиусом 1 мм. Длительность импульса равна 0,1 мкс. В расчете импульс описывается как заданная скорость границы с вектором скорости, направленным по нормали к поверхности образца.

Картина волн, распространяющихся в образце, приведена на рис. 2 в виде срезов на разной глубине в различные моменты времени. Волны в изометрической проекции показаны на рис. 3.

На рис. 2, 3 видно, что на начальном этапе распространения импульса в верхнем слое формируется область возмущения в виде эллипса, вытянутого в направлении укладки волокон в этом слое. На данном этапе структура волн достаточно простая, характерная для короткого импульса в упругой среде, в которой присутствуют продольные и сдвиговые волны, а также поверхностные волны вблизи свободной границы.

После прохождения второго слоя, в котором волокна ориентированы в другом направлении, картина волн становится более сложной. Область возмущения сохраняет форму эллипса, но он поворачивается, а внутри него формируется “закрученная” структура из отдельных волн. Данные эффекты обусловлены изменением направления укладки волокон, вдоль которых возмущение распространяется с большей скоростью.

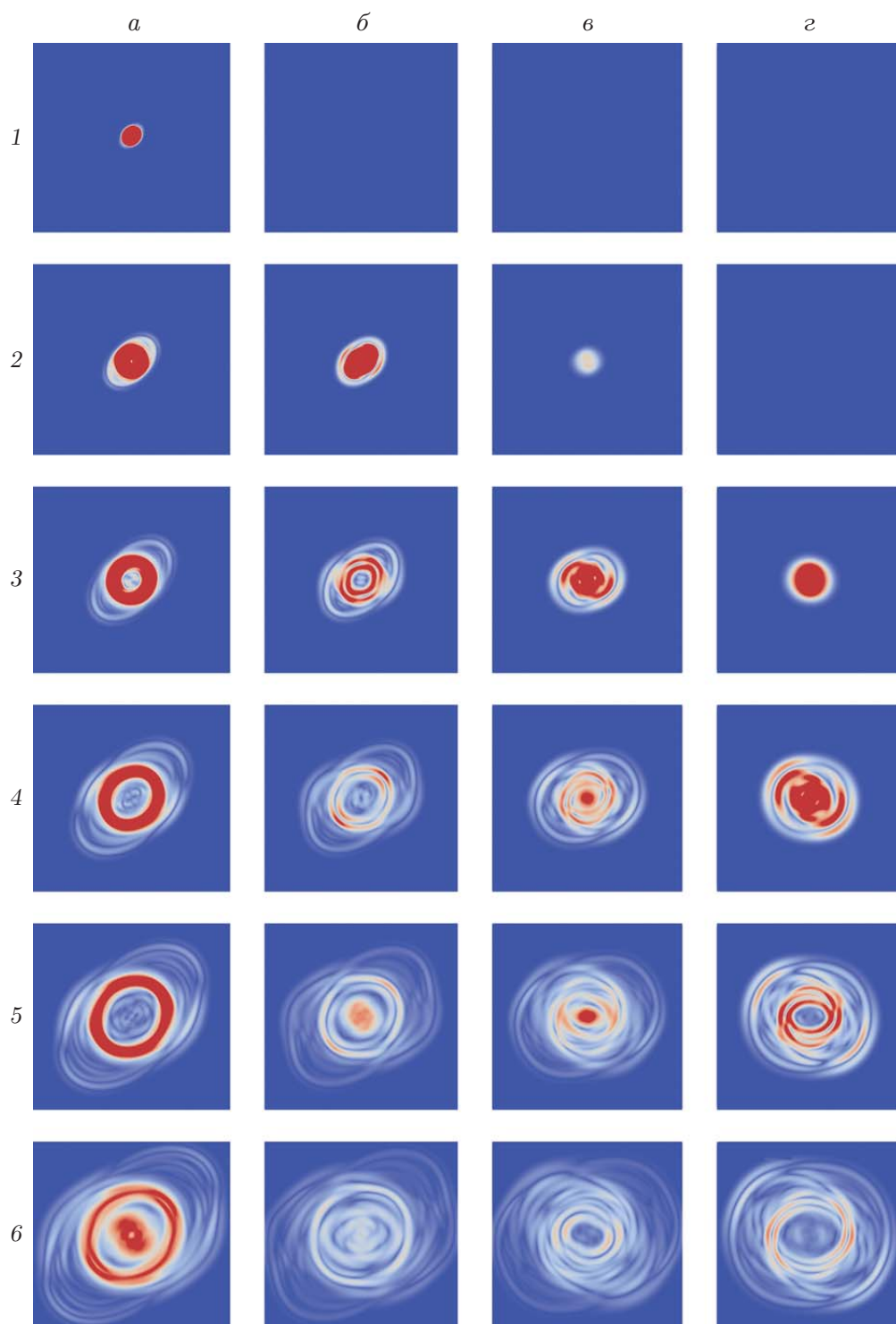


Рис. 2. Картина волн в образце (модуль скорости):

a — верхняя поверхность первого слоя, *б* — верхняя поверхность второго слоя, *в* — верхняя поверхность третьего слоя, *г* — нижняя поверхность третьего слоя; 1 — $t_n = 10$, 2 — $t_n = 30$, 3 — $t_n = 50$, 4 — $t_n = 70$, 5 — $t_n = 90$, 6 — $t_n = 110$

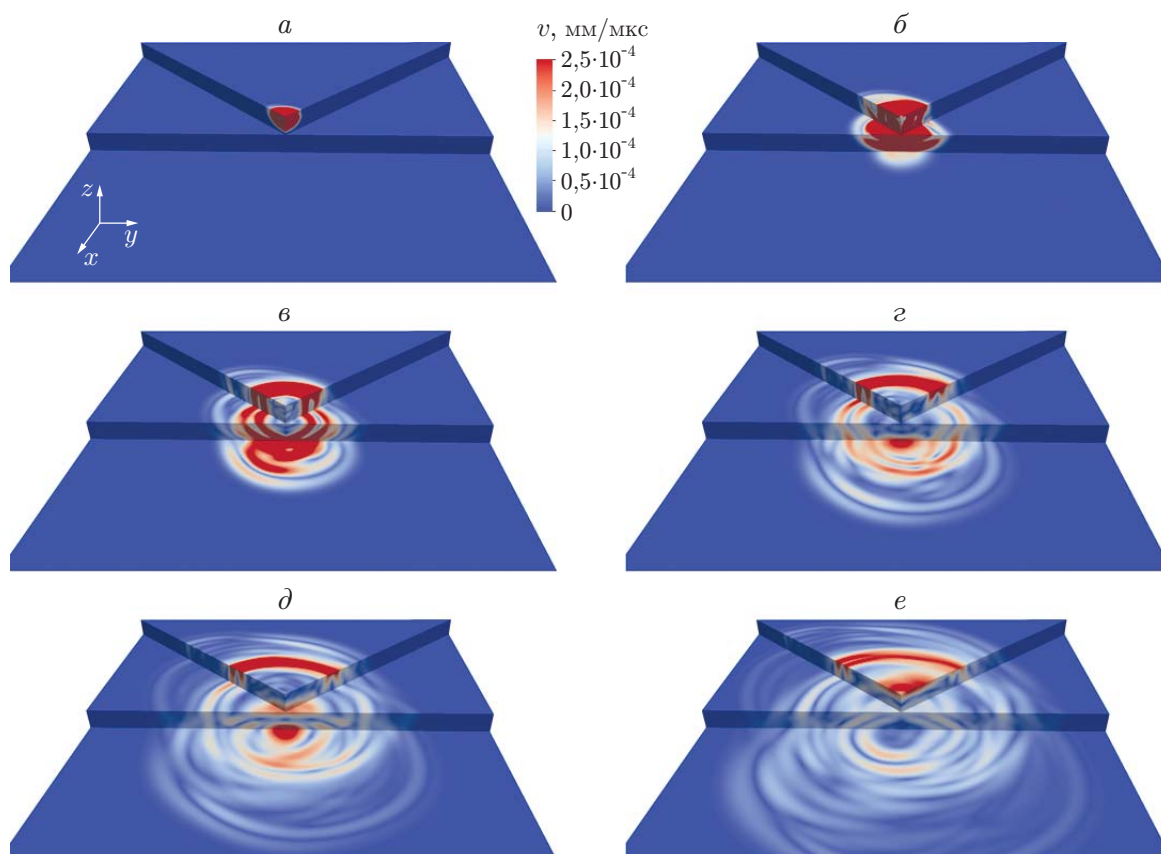


Рис. 3. Изометрическая проекция волн в образце (модуль скорости):

a — $t_n = 10$, $б$ — $t_n = 30$, $в$ — $t_n = 50$, $г$ — $t_n = 70$, $д$ — $t_n = 90$, $е$ — $t_n = 110$

Аналогичный эффект наблюдается при переходе возмущения из второго слоя в третий. Также на рис. 2 видно, что на нижней поверхности образца область возмущения имеет форму круга, а не эллипса. Это вызвано тем, что упругие продольные волны, формирующие внешнюю границу возмущенной области, проходят одинаковое расстояние в плоскости образца вдоль всех основных материальных осей укладки.

Заключение. В работе показано, что сеточно-характеристический численный метод на сетках из тетраэдров может быть использован для расчета волновых процессов, происходящих в композитном материале, с учетом направления укладки анизотропных слоев образца. Приведены результаты расчетов процесса распространения импульса нагрузки в трехслойной укладке композита.

Использованный в работе численный метод имеет второй порядок аппроксимации. Однако предложенный подход позволяет получать также схемы более высокого порядка. Для этого требуется построить интерполяционный полином более высокого порядка с использованием большего количества соседних точек, а также применить иную схему расщепления по пространству. Следует отметить, что при использовании описанной в данной работе численной схемы такой переход к более высокому порядку возможен при сохранении простой структуры расчетной сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Beklemysheva K. A., Golubev V. I., Vasyukov A. V., Petrov I. B.** Numerical modeling of the seismic influence on an underwater composite oil pipeline // *Math. Models Comput. Simulat.* 2019. V. 11, N 5. P. 715–721.
2. **Кожемяченко А. А., Петров И. Б., Фаворская А. В.** Расчет с использованием сеточно-характеристического метода напряженного состояния железнодорожного пути с отрывами шпалы от насыпи // *ПМТФ.* 2021. Т. 62, № 2. С. 193–200.
3. **Beklemysheva K. A., Vasyukov A. V., Petrov I. B.** Numerical simulation of dynamic processes in biomechanics using the grid-characteristic method // *Comput. Math. Math. Phys.* 2015. V. 55, N 8. P. 1346–1355.
4. **Петраков И. Е., Садовский В. М., Садовская О. В.** Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // *ПМТФ.* 2021. Т. 62, № 5. С. 172–183.
5. **Федоренко А. Н., Федулов Б. Н., Ломакин Е. В.** Моделирование ударного воздействия на демпфирующие элементы, изготовленные из композитных материалов // *ПМТФ.* 2021. Т. 62, № 5. С. 100–107.
6. **Ахмед П. С., Абед М. С., Салим И. А.** Экспериментальное исследование и численное моделирование баллистического воздействия на гибридный композит (оксид алюминия — тканый материал — эпоксидная смола — алюминий), используемый при изготовлении бронжилета // *ПМТФ.* 2023. Т. 64, № 4. С. 3–13.
7. **Магомедов К. М.** Сеточно-характеристические численные методы: Учеб. пособие / К. М. Магомедов, А. С. Холодов. М.: Юрайт, 2019.
8. **Федоренко Р. П.** Введение в вычислительную физику. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 1994.
9. **Челноков Ф. Б.** Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // *Мат. моделирование.* 2006. Т. 18, № 6. С. 96–108.
10. **Васюков А. В., Смирнов И. Е.** Сеточно-характеристический численный метод на нерегулярной расчетной сетке с расширением шаблона интерполяции // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2023. Т. 63, № 10. С. 4–12.
11. **Агапов П. И., Челноков Ф. Б.** Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела // *Моделирование и обработка информации: Сб. ст. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2003. С. 19–27.*
12. **Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.** Monotonic bicomact schemes for linear transport equations // *Math. Models Comput. Simulat.* 2012. V. 4, N 1. P. 92–100.

*Поступила в редакцию 6/X 2023 г.,
после доработки — 6/IX 2023 г.
Принята к публикации 30/X 2023 г.*