

УДК 517.947.551.551

## Математический метод поиска в атмосфере неизвестных точечных источников газов и аэрозолей

Б.М. Десятков, Н.А. Лаптева, А.Н. Шабанов\*

ФБУН ГИЦ ВБ «Вектор» Роспотребнадзора  
633159, Новосибирская обл., пос. Кольцово

Поступила в редакцию 9.01.2014 г.

Предложен метод поиска нескольких скрытых точечных источников примесей в атмосфере, имеющих различные мощности и расположенных в различных точках пространства. Метод основан на использовании сопряженного уравнения турбулентной диффузии. Выполнен анализ влияния количества используемых контрольных точек измерения концентрации примесей и неизбежных ошибок измерения концентрации на точность искомых параметров источников. Приводятся результаты тестовых расчетов.

*Ключевые слова:* пограничный слой атмосферы, неизвестные точечные источники примесей, сопряженное уравнение; boundary layer of the atmosphere, unknown point sources of admixture, conjugate equation.

### Введение

Разработка экономичных и устойчивых методов решения обратных задач, когда по ограниченной информации о решении необходимо определить исходные данные, является важной и актуальной проблемой. Например, при решении ряда экологических задач по измеренным значениям концентрации в нескольких контрольных точках требуется определить промышленное предприятие, совершившее несанкционированный, скрытый выброс в атмосферу вредных для здоровья человека веществ. В последнее время актуальность решения подобных задач значительно возросла в связи с возможным применением газов и биологически активных аэрозолей при террористических актах. В работах [1–4] подробно изучается эта проблема. При этом предполагается, что существует один точечный источник, который необходимо найти. В реальной ситуации может быть несколько одновременно действующих точечных источников — промышленных предприятий или несколько точечных террористических актов. В этом случае описанные в [1–4] алгоритмы не позволяют определить координаты и количество выброшенного вещества каждого точечного источника.

В настоящей статье предлагается алгоритм поиска нескольких одновременно действующих точечных источников и их характеристик. Источники могут быть расположены в различных точках пространства и иметь различные мощности. Метод основан на совместном использовании полуэмпириче-

ского уравнения турбулентной диффузии примесей в атмосфере и соответствующего сопряженного уравнения. Идея использования сопряженного уравнения турбулентной диффузии в экологических задачах впервые предложена в [5].

### Описание метода

Исходная система дифференциальных уравнений распространения газовых и аэрозольных примесей в пограничном слое атмосферы решается конечно-разностным методом [5, 6], в котором все функции, включая источник, являются дискретными. Значения таких функций задаются в узлах разностной пространственной сетки. Рассматривалась область с горизонтальными размерами  $24 \times 24$  км и 200 м по вертикали. Эта область покрывалась пространственной разностной сеткой с шагом 1 км по горизонтали и 5 м по вертикали.

Для решения прямого и сопряженного уравнений турбулентной диффузии примесей в атмосфере необходимо знать метеорологическую информацию: трехмерные поля скорости ветра, температуры, влажности и коэффициента турбулентного перемешивания на момент выброса примесей в атмосферу. Эту информацию получают с использованием численно-аналитической модели для определения полей скорости ветра, температуры и влажности воздуха в термически стратифицированном пограничном слое атмосферы [7].

После совместного интегрирования прямого и сопряженного уравнений турбулентной диффузии примесей в атмосфере по пространственным переменным с учетом краевых условий и последующего вычитания одного уравнения из другого получается функционал, который связывает между собой искомые

\* Борис Михайлович Десятков (dbm@vector.nsc.ru);  
Наталья Александровна Лаптева (lapteva@vector.nsc.ru);  
Александр Николаевич Шабанов (zvold@ngs.ru).

значения параметров источников (их координаты и массу выброшенного вещества), измеренные значения концентрации и функцию Грина. Последняя является решением сопряженного уравнения.

Подробные математические преобразования и нахождение этого функционала описаны, например, в [1–4]. Применительно к нашей задаче с несколькими точечными источниками можно получить следующий функционал:

$$J = \text{abs}\left(D(\xi, \eta, h) - \sum Q(x_0, y_0, z_0) D^*(x_0, y_0, z_0, \xi, \eta, h)\right), \quad (1)$$

где  $D(\xi, \eta, h)$  – измеренное значение концентрации в точке с пространственными координатами  $(\xi, \eta, h)$ ;  $Q(x_0, y_0, z_0)$  – мощность точечного источника, который находится в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ ;  $D^*(x_0, y_0, z_0, \xi, \eta, h)$  – значения функции Грина в точках расположения искомого источника  $(x_0, y_0, z_0)$ , вычисленные в результате решения сопряженного уравнения турбулентной диффузии при задании измеренного значения концентрации  $D(\xi, \eta, h)$  в качестве входной информации.

В формуле (1) суммирование проводится по координатам всех точечных источников. Очевидно, что если мы знаем все эти величины, то данный функционал должен равняться нулю. Таким образом, процедура минимизации этого функционала обеспечит нахождение искомого параметров источников и тем самым решит поставленную задачу поиска неизвестных точечных источников.

Если подробно расписать этот функционал, то получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} D_1(R_1) &= Q_1(X_{01})D^*(X_{01}, R_1) + \\ &+ Q_2(X_{02})D^*(X_{02}, R_1) + Q_3(X_{03})D^*(X_{03}, R_1), \\ D_2(R_2) &= Q_1(X_{01})D^*(X_{01}, R_2) + \\ &+ Q_2(X_{02})D^*(X_{02}, R_2) + Q_3(X_{03})D^*(X_{03}, R_2), \\ D_3(R_3) &= Q_1(X_{01})D^*(X_{01}, R_3) + \\ &+ Q_2(X_{02})D^*(X_{02}, R_3) + Q_3(X_{03})D^*(X_{03}, R_3), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $X_{01}$  – обобщенная координата первого источника, т.е.  $X_{01} = (x_{01}, y_{01}, z_{01})$ . Аналогично для  $X_{02}$  и  $X_{03}$ ;  $R_1$  – обобщенная координата первой контрольной точки измерения концентрации, т.е.  $R_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . То же для  $R_2$  и  $R_3$ .

Данная система уравнений в качестве примера записана для одного частного случая, когда число точечных источников и число точек измерения совпадают и равны трем. В общем случае это равенство нарушается и система алгебраических уравнений становится либо неопределенной, либо переопределенной, а точные классические методы решения систем алгебраических уравнений не работают. Итерационные методы из-за неизбежных ошибок в измеренных значениях концентрации и при решении исходных дифференциальных уравнений не всегда являются устойчивыми и эффективными.

Для решения системы уравнений был разработан следующий алгоритм. Приведем его описание на примере из трех уравнений (2). Пусть необходимо найти местоположение и мощность трех точечных источников. Предположим также, что есть три контрольные точки, в которых измеряется концентрация. Далее перебираем все возможные варианты расположения трех источников в пространстве и возможные разумные значения мощностей этих источников. В зависимости от пространственных размеров области, в которой решается задача, и от параметров математической модели количество таких вариантов может достигать нескольких миллионов. Далее для каждого варианта подставляем значения координат источников и их мощностей в уравнение (2) и вычисляем приближенные значения концентрации  $d_1, d_2, d_3$  в контрольных точках. После этого находим  $d_{cp}$  и относительную ошибку  $\delta$ :

$$\begin{aligned} d_{cp} &= (d_1 + d_2 + d_3)/3; \\ \delta &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \text{abs}(d_{cp} - D_1)/D_1, \\ \delta_2 &= \text{abs}(d_{cp} - D_2)/D_2, \\ \delta_3 &= \text{abs}(d_{cp} - D_3)/D_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что та тройка точек, в которой значение ошибки  $\delta$  минимально, и есть искомая тройка источников, а их координаты и мощности являются решением поставленной задачи.

## Результаты и обсуждение

Для проверки разработанных алгоритмов были проведены многочисленные тестовые расчеты с целью определения зависимости точности искомого параметров источников (местоположение и количество выброшенного вещества) от количества и расположения точек измерения концентрации. Для этого вначале решалась прямая задача: задавались точечные источники и в контрольных точках вычислялись концентрации примесей. Полученные значения концентрации интерпретировались как «измеренные значения» и по ним решалась обратная задача – находились источники. Было рассмотрено количество источников от 1 до 3 и контрольных точек от 3 до 5.

В различных вариантах расчетов, подробно описанных ниже, мгновенные точечные источники, которые срабатывают в одно и то же время, располагались на высотах от 5 до 100 м, расстояние между источниками изменялось от одного до нескольких километров. Мощности источников (количество мгновенно выброшенного вещества) различались между собой в несколько раз, на порядок, а среднее значение задавалось равным  $10^5$  г. Контрольные точки, в которых проводилось «измерение» концентрации, располагались с подветренной стороны от источников на высоте 5 м. Расстояние между контрольными точками варьировалось от одного до нескольких километров.

Точечные источники, как и контрольные точки, располагались в виде прямой линии под различными углами к направлению ветра, а также в вершинах треугольника. Причем если некоторые из этих точек находились вне области влияния какого-либо источника, то найденные характеристики источников определялись со значительными ошибками. Под областью влияния источников понимаем пространственную область, в которой вклад каждого источника в вычисленное значение концентрации в контрольных точках является значимым и заметно отличным от нулевого значения. На практике это означает, что измеренное значение концентрации должно быть больше неизбежных ошибок ее измерения. Очевидно, в этом случае возникает задача такого оптимального расположения контрольных точек, которое позволит идентифицировать все источники при любых направлениях ветра. Эта проблема в данной статье не рассматривается.

Показано, что для обнаружения одного точечного источника достаточно трех точек измерения концентрации, а для обнаружения нескольких точечных источников необходимо не менее пяти точек измерений концентрации. Часть полученных результатов для случая двух точечных источников приведена в таблице.

Результаты тестовых расчетов

Вариант	Высота источников, м	Количество контрольных точек		
		3	4	5
Одинаковые мощности и высоты источников	5	++	++	++
	10	+	++	++
	15	+	+	++
	20	++	+	++
	25	–	++	++
	30	–	++	++
	35	–	++	++
	100	++	++	++
Разные мощности, но одинаковые высоты источников	5	++	++	++
	10	+–	+–	++
	15	+	+–	++
	20	+–	+–	++
	25	+–	+–	++
	30	+–	+–	++
	35	–	+–	++
	100	++	++	++
Разные мощности и разные высоты источников	5; 10	++	++	++
	10; 15	++	++	++
	15; 20	–	++	++
	20; 25	–	+–	++
	25; 30	+–	+–	++
	30; 35	–	+–	++
	80; 100	–	++	++

Примечание. «++» – полное совпадение рассчитанных и истинных значений координат и мощностей источников; «+» – несовпадение только вертикальной координаты; «+–» – совпадение только вертикальной координаты; «–» – полное несовпадение координат и мощностей.

Высота контрольных точек измерения концентрации во всех приведенных вариантах задавалась равной 5 м.

Дополнительно было проведено около 800 расчетов с целью определения влияния неизбежных ошибок в измеренных значениях концентрации на точность восстановления параметров точечных источников. В этих расчетах количество источников варьировалось от 1 до 3. Количество контрольных точек – 5.

В первой серии расчетов во всех контрольных точках задавались одинаковые относительные ошибки в значениях концентрации: 5, 10, 15 и 20%. Для одного точечного источника относительная ошибка в вычислении мощности равнялась относительной ошибке концентрации. Координаты источника соответствовали исходным значениям.

Для двух точечных источников относительные ошибки в вычислении мощности совпадали с относительной ошибкой в концентрации с точностью 1–3%. Вычисленные горизонтальные координаты и исходные были одинаковыми, вертикальные координаты в некоторых случаях отличались от исходных на один пространственный шаг разностной сетки по вертикали (5 м).

Для трех точечных источников в большинстве вариантов относительные ошибки в вычислении мощности совпадали с относительной ошибкой в концентрации с точностью 1–3%. Ошибки в вычислении координат также в большинстве вариантов соответствовали исходным значениям. Однако в небольшом количестве вариантов ошибки в вычислении мощности достигали 50%, а горизонтальные и вертикальные координаты отличались от исходных на один пространственный шаг разностной сетки.

Во второй серии расчетов относительные ошибки в значениях концентрации (5, 10 и 20%) задавались различными комбинациями для разных контрольных точек. В этом случае для одного источника средняя относительная ошибка в вычислении мощности составила 11,4%, а максимальная ошибка не превышала 15%. Горизонтальные координаты источника во всех случаях равнялись исходным, а вертикальная координата примерно в 70% вариантов отличалась от исходного значения на один пространственный шаг сетки (5 м).

Для двух точечных источников средняя относительная ошибка в вычислении мощностей была 11,1%, а максимальная ошибка не превышала 15%. Горизонтальные координаты источников во всех случаях совпадали с исходными, а вертикальные примерно в 85% от всех вариантов отличались от исходного значения на 1–2 пространственных шага сетки (5–10 м).

Для трех точечных источников средняя относительная ошибка в вычислении мощностей составила 14,6%, а максимальная ошибка не превышала 20%. Примерно в 12% вариантов горизонтальные и вертикальные координаты соответствовали исходным значениям, в 60% вариантов имеются отличия только в вертикальных координатах на 1–2 разностных шага сетки, а в 27% наблюдается отличие одновременно в горизонтальных и в вертикальных координатах на 1–2 разностных шага сетки.

## Заключение

Предложен математический метод поиска нескольких одновременно действующих неизвестных точечных источников примесей в пограничном слое атмосферы. Он является устойчивым к неизбежным ошибкам в измеренных значениях концентраций. Относительные ошибки в определении мощности источников примерно совпадают с относительными ошибками концентраций, а ошибки определения координат источников не превосходят 1–2 пространственных шагов разностной сетки. Очевидно, такую точность результатов можно считать вполне удовлетворительной.

1. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С., Селегей В.В. Определение некоторых характеристик источника аэрозольных примесей путем решения обратной задачи их распространения в атмосфере // *Оптика атмосф. и океана*. 1999. Т. 12, № 2. С. 136–139.
2. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С. Изучение возможностей метода оп-

ределения характеристик точечного мгновенного источника атмосферных загрязнений по измеренным значениям концентрации примеси // *Оптика атмосф. и океана*. 2001. Т. 14, № 6–7. С. 609–612.

3. Бородулин А.И., Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Лаптева Н.А., Ярыгин А.А. О погрешностях определения мощности источника, возникающих при решении «обратной» задачи рассеяния атмосферных примесей // *Оптика атмосф. и океана*. 2002. Т. 15, № 5–6. С. 501–505.
4. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С. Учет разброса измеренных значений концентрации в задачах поиска скрытых источников аэрозольных загрязнений атмосферы // *Оптика атмосф. и океана*. 2003. Т. 16, № 8. С. 761–764.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
6. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
7. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И. Численно-аналитическая модель переноса аэрозолей в термически стратифицированном пограничном слое атмосферы // *Оптика атмосф. и океана*. 1996. Т. 9, № 6. С. 815–820.

*B.M. Desyatkov, N.A. Lapteva, A.N. Shabanov. A mathematical method of search for unknown point sources of gases and aerosols in the atmosphere.*

A method of search for a hidden point sources of impurities in the atmosphere having different powers and located at different points in space is proposed. The method is based on the use of the conjugate equation of turbulent diffusion. The effect of the number of control points used in measuring the concentration of admixture and inevitable measurement errors on the accuracy of parameters of the sources is analyzed. The results of test calculations are shown.