УДК 539.3
DOI: 10.15372/PMTF202315434

ТАБЛИЦА ПОСТУЛАТОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЕЕ СТРОК

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Единая интегральная запись постулатов механики сплошной среды в виде законов изменения (сохранения) тех или иных величин представляется в форме таблицы постулатов. Предполагается, что в сплошной среде реализуются как чисто механические, так и различные немеханические взаимодействия, описываемые скалярными, векторными и тензорными (второго ранга) энергетически сопряженными парами величин, одна из которых характеризует процесс, а другая — отклик среды на этот процесс. На основе первых трех строк таблицы постулатов построены четвертая и пятая строки, соответствующие законам изменения внутренней энергии и величины, которая в случае термодинамической пары температура — энтропия совпадает с энтропией. Показано, что в результате задания источников, потоков через границу и производств в четвертой и пятой строках таблицы постулатов эти строки фактически становятся определениями. Обобщаются известные в неизотермической механике принципы построения определяющих соотношений, связывающих зависимые и независимые параметры состояния для каждого типа взаимодействий.

Ключевые слова: постулат, аксиоматика, законы сохранения, интегральная форма, локальное уравнение, источник, поток, производство, внутренняя энергия, энергетическая сопряженность, энтропия

Введение. Проблемы аксиоматизации механики сплошной среды (МСС), в классической феноменологической трактовке которой присутствует континуум и, вообще говоря, отсутствуют понятия атомов и молекул, рассматривались во многих работах [1–10]. Данные проблемы связаны с проблемой строгой и внутренне корректной аксиоматизации физики, известной как шестая проблема Гильберта. По мнению А. Ю. Ишлинского, "механика Галилея — Ньютона до сих пор в должной мере не аксиоматизирована в отличие от геометрии, аксиоматизация которой была завершена великим математиком Д. Гильбертом... Тем не менее можно и нужно... построить классическую механику, как и геометрию, исходя из некоторого числа независимых постулатов и аксиом, установленных в результате обобщения практики" [11. С. 473].

При построении системы постулатов МСС большое значение имеет логика разделения утверждений на определения, собственно постулаты (законы) и следствия из них. В первую очередь, это касается описания систем, в которых реализуются не только чисто механические взаимодействия, но и связанные процессы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00077).

© Георгиевский Д. В., 2024

1. Таблица постулатов МСС. Как известно, классическая МСС аксиоматически основана на наборе феноменологических постулатов, имеющих единую интегральную форму в виде законов изменения (сохранения) тех или иных физических величин $A_V(t)$:

$$\frac{dA_V}{dt} = B_V + C_\Sigma + D_V; \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} A_V(t) = \int\limits_V \rho a(\boldsymbol{x}, t)\, dV, \qquad B_V(t) = \int\limits_V \rho b(\boldsymbol{x}, t)\, dV, \\ C_\Sigma(t) = \int\limits_\Sigma c(\boldsymbol{y}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}, t)\, d\Sigma, \qquad D_V(t) = \int\limits_V d(\boldsymbol{x}, t)\, dV. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ — объемная плотность в точке $\boldsymbol{x}$ эйлерова пространства в момент времени t; $a(\boldsymbol{x}, t)$ — массовая плотность величины A_V в объеме V; $b(\boldsymbol{x}, t)$ — массовая плотность величины B_V, являющейся источником A_V в V; $c(\boldsymbol{y}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}, t)$ — поверхностная плотность величины C_Σ — потока A_V через границу $\Sigma = \partial V$, в каждой точке которой определена единичная внешняя нормаль $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}, t)$; $\boldsymbol{y} \in \Sigma$; $d(\boldsymbol{x}, t)$ — объемная плотность величины D_V — производства A_V в V; V — произвольный конечный объем среды, в любой момент состоящий из одних и тех же лагранжевых частиц (движущийся объем неизменной массы [3. С. 52], индивидуальный объем [9. С. 124], жидкий объем [12. С. 69], подвижный объем [13. С. 90], подвижный лагранжев объем [14. С. 142]).

Поле $a(\boldsymbol{x}, t)$ может быть тензорным полем различного ранга, от которого зависят ранги величин, входящих в (1.1), (1.2):

$$\operatorname{rank} a = \operatorname{rank} b = \operatorname{rank} c - 1 = \operatorname{rank} d.$$

Так как объем V внутри среды произволен, из интегрального равенства (1.1) следует дифференциальное равенство

$$\rho \frac{da}{dt} = \rho b + \operatorname{Div} c + d, \qquad \boldsymbol{x} \in V. \tag{1.3}$$

Число локальных законов (1.3) совпадает с числом интегральных равенств (1.2).

Интерпретацию величин a, b, c, d в (1.1), (1.2) удобно представить в виде таблицы, которую будем называть таблицей постулатов МСС [15–17]. Три ее строки (табл. 1) соответствуют закону сохранения массы (I), а также законам изменения количества движения, или импульса (II), и момента количества движения, или момента импульса (III). В табл. 1 $\boldsymbol{v}$ — скорость частиц, $\boldsymbol{F}$ — массовые силы, $\boldsymbol{P}^{(n)} = \sigma \cdot \boldsymbol{n}$ — поверхностные нагрузки на Σ, σ — симметричный тензор напряжений Коши. Дифференциальными следствиями (1.3) постулатов I–III являются уравнение неразрывности, уравнения движения и симметрия тензора напряжений σ. Заметим, что при выводе каждого дифференциального следствия используются утверждения предыдущих постулатов. Например, симметрия тензора напряжений не является следствим только строки III в табл. 1, а следует из всех строк I–III.

Таблица 1

Таблица постулатов МСС

Закон	a	b	$c \cdot \boldsymbol{n}$	d
I	1	0	0	0
II	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{P}^{(n)}$	0
III	$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{P}^{(n)}$	0

Таблица 2

Интегральное следствие таблицы постулатов МСС

Закон	a	b	$c \cdot \boldsymbol{n}$	d
K	$\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2/2$	$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{v}$	$-\sigma : \mathrm{Def}\, \boldsymbol{v}$

Из трех строк табл. 1 можно получить интегральное следствие (табл. 2), называемое теоремой о кинетической энергии. Обычно она записывается в конечных приращениях

$$dK_V = \delta A_V^e + \delta A_V^i; \tag{1.4}$$

$$K_V = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho |\boldsymbol{v}|^2 \, dV, \qquad \delta A_V^i = -\int\limits_V \sigma : d\varepsilon \, dV,$$

$$\delta A_V^e = \int\limits_V \rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{u} \, dV + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{P}^{(n)} \cdot d\boldsymbol{u} \, d\Sigma,$$

где K_V — кинетическая энергия объема V; δA_V^e — сумма изменений работ массовых и поверхностных сил на действительных перемещениях $d\boldsymbol{u}$; δA_V^i — изменение работы внутренних сил на действительных деформациях $d\varepsilon$. Если внешние нагрузки $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{P}^{(n)}$ обладают скалярными потенциалами по $\boldsymbol{u}$, а также существует скалярный потенциал напряжений σ по деформациям ε, то дифференциальное соотношение (1.4) допускает первый интеграл — интеграл энергии.

Теорема о кинетической энергии (1.4) не входит в таблицу постулатов, поскольку не представляет собой независимое утверждение. Формально ее дифференциальным следствием являются уравнения движения. Однако эта теорема (строка K табл. 2) играет важную роль при переходе к формулировкам энергетических постулатов, соответствующих механическим и немеханическим взаимодействиям и процессам.

2. Строка IV. Закон изменения внутренней энергии. Предположим, что в сплошной среде наряду с механическими процессами, характеризуемыми энергетически сопряженной парой (ε, σ), реализуются различные немеханические процессы, которые могут быть феноменологически описаны энергетически сопряженными скалярной (y, z), векторной $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ и тензорной второго ранга $(Y^{\{2\}}, Z^{\{2\}})$ парами. Под энергетической сопряженностью пар понимается то, что интегральные совместные инварианты

$$\begin{gathered} E_1 = \int\limits_V \varepsilon : \sigma \, dV, \qquad E_2 = \int\limits_V \rho y z \, dV, \\ E_3 = \int\limits_V \rho \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \, dV, \qquad E_4 = \int\limits_V \rho Y^{\{2\}} : Z^{\{2\}} \, dV \end{gathered} \tag{2.1}$$

с точностью до числового коэффициента являются энергиями, "закачанными" в покоящийся объем V в несвязанном физическом процессе. Размерности величин в каждой немеханической паре (y, z), $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(Y^{\{2\}}, Z^{\{2\}})$, вообще говоря, не выражаются в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$, но их свертки (2.1), как и E_1, имеют размерность энергии MLT^{-2}, что позволяет складывать эти свертки. Наряду с тензорной парой (ε, σ), явно содержащейся в (2.1), примером энергетически сопряженной скалярной пары является термодинамическая пара (s, T), где s — массовая плотность энтропии; T — абсолютная температура.

Сформулируем строку IV таблицы постулатов, используя строку K в табл. 2. Добавим к слагаемому $|\boldsymbol{v}|^2/2$, присутствующему в строке K, некоторую функцию $u(\boldsymbol{x}, t)$, имеющую

Таблица 3

Строка IV таблицы постулатов МСС

Закон	a	b	$c \cdot \boldsymbol{n}$	d
IV.1	$\lvert \boldsymbol{v} \rvert^2/2 + u$	$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} + q_{(1)} + q_{(2)} + q_{(3)}$	$\boldsymbol{P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{q}_{(1)} + \boldsymbol{q}_{(2)} + \boldsymbol{q}_{(3)}) \cdot \boldsymbol{n}$	0
IV.2	u	$q_{(1)} + q_{(2)} + q_{(3)}$	$-(\boldsymbol{q}_{(1)} + \boldsymbol{q}_{(2)} + \boldsymbol{q}_{(3)}) \cdot \boldsymbol{n}$	$\sigma : \mathrm{Def}\, \boldsymbol{v}$

смысл массовой плотности внутренней энергии U_V в объеме V, при этом сумма $|\boldsymbol{v}|^2/2 + u$ имеет смысл массовой плотности полной энергии $K_V + U_V$:

$$U_V(t) = \int\limits_V \rho u(\boldsymbol{x}, t)\, dV, \qquad (K_V + U_V)(t) = \int\limits_V \rho\Big(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} + u\Big)(\boldsymbol{x}, t)\, dV.$$

Выберем функцию $u(\boldsymbol{x}, t)$ таким образом, чтобы производство полной энергии было нулевым, а следовательно, производство внутренней энергии имело объемную плотность $\sigma : \mathrm{Def}\, \boldsymbol{v}$. Изменение со временем величины U_V в объеме V помимо ее производства вызвано наличием источников U_V в V и потока U_V через границу Σ, имеющих немеханическую природу. Обозначим массовые плотности источников U_V в V, соответствующих трем введенным ранее немеханическим взаимодействиям, через $q_{(1)}$, $q_{(2)}$ и $q_{(3)}$. Обозначим также поверхностные плотности потоков U_V через границу Σ, соответствующих этим трем немеханическим взаимодействиям, через $-\boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \boldsymbol{n}$, $-\boldsymbol{q}_{(2)} \cdot \boldsymbol{n}$ и $-\boldsymbol{q}_{(3)} \cdot \boldsymbol{n}$. Скаляры $q_{(1)}$, $q_{(2)}$, $q_{(3)}$ и векторы $\boldsymbol{q}_{(1)}$, $\boldsymbol{q}_{(2)}$, $\boldsymbol{q}_{(3)}$, являющиеся функциями $\boldsymbol{x}$ и t, имеют размерности, выражающиеся в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$: $[q_{(1)}] = [q_{(2)}] = [q_{(3)}] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}$; $[\boldsymbol{q}_{(1)}] = [\boldsymbol{q}_{(2)}] = [\boldsymbol{q}_{(3)}] = \mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}$.

Таким образом, строку IV таблицы постулатов можно записать одним из двух способов (табл. 3). Строка IV.1 содержит закон изменения полной энергии в объеме V, а IV.2 — закон изменения внутренней энергии в объеме V. Локальное равенство (1.3) для функции u

$$\rho\, \frac{du}{dt} = \rho(q_{(1)} + q_{(2)} + q_{(3)}) - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{q}_{(1)} + \boldsymbol{q}_{(2)} + \boldsymbol{q}_{(3)}) + \sigma : \mathrm{Def}\, \boldsymbol{v} \tag{2.2}$$

называется локальным уравнением энергии.

С точки зрения аксиоматического построения строку IV.2 (или эквивалентную ей IV.1) естественно считать определением новой функции — массовой плотности $u(\boldsymbol{x}, t)$ внутренней энергии, которая присутствует в этой строке, в отличие от строки K. Если постулировать физический смысл величин $q_{(1)}$, $q_{(2)}$, $q_{(3)}$, $\boldsymbol{q}_{(1)}$, $\boldsymbol{q}_{(2)}$ и $\boldsymbol{q}_{(3)}$, т. е. считать, что они первичны по отношению к u и их можно определять в независимых экспериментах, то закон изменения внутренней энергии превращается в феноменологическое определение самой внутренней энергии.

3. Связи потоков с величинами z, $\boldsymbol{z}$, $Z^{\{2\}}$. Задающие потоки векторы $\boldsymbol{q}_{(1)}$, $\boldsymbol{q}_{(2)}$ и $\boldsymbol{q}_{(3)}$ определены не только на границе Σ, но и во всем объеме V. Положим, что для каждой выбранной среды эти векторы определяются заданием в V скалярного $z(\boldsymbol{x}, t)$, векторного $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t)$ и тензорного второго ранга $Z^{\{2\}}(\boldsymbol{x}, t)$ полей, причем $\boldsymbol{q}_{(1)}$, $\boldsymbol{q}_{(2)}$ и $\boldsymbol{q}_{(3)}$ функционально связаны с $\mathrm{grad}\, z$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{z}$ и $\mathrm{Div}\, Z^{\{2\}}$. При этом в отличие от $\boldsymbol{q}_{(1)}$, $\boldsymbol{q}_{(2)}$ и $\boldsymbol{q}_{(3)}$ величины z, $\boldsymbol{z}$, $Z^{\{2\}}$ не допускают чисто механическое, или кинематически силовое, толкование, т. е. их размерности не выражаются степенными одночленами $\mathrm{M}^\alpha\mathrm{L}^\beta\mathrm{T}^\gamma$, как это следует из леммы о степенном выражении размерности, и необходимо пополнение базиса $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$: $[z] = \mathrm{K}_1$, $[\boldsymbol{z}] = \mathrm{K}_2$, $[Z^{\{2\}}] = \mathrm{K}_3$.

Простейшими связями величин в каждой из пар $(\boldsymbol{q}_{(1)}, \operatorname{grad} z)$, $(\boldsymbol{q}_{(2)}, \operatorname{rot} \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{q}_{(3)}, \mathrm{Div} Z^{\{2\}})$ служат соотношения

$$\boldsymbol{q}_{(1)} = -\Lambda^{\{2\}}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} z, \quad \boldsymbol{q}_{(2)} = -\Lambda^{\{2\}}_{(2)} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{q}_{(3)} = -\Lambda^{\{2\}}_{(3)} \cdot \mathrm{Div}\, Z^{\{2\}}, \tag{3.1}$$

где $\Lambda^{\{2\}}_{(1)}$, $\Lambda^{\{2\}}_{(2)}$, $\Lambda^{\{2\}}_{(3)}$ — материальные тензоры второго ранга, соответствующие тому или иному типу анизотропии. Для однородной изотропной среды эти тензоры являются изотропными.

В общем случае произвольной физической линейности можно записать

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{q}_{(1)}(\boldsymbol{x}, t) = -\int\limits_0^t \Gamma^{\{2\}}_{(1)}(t-\xi) \cdot \operatorname{grad} z(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi, \\
\boldsymbol{q}_{(2)}(\boldsymbol{x}, t) = -\int\limits_0^t \Gamma^{\{2\}}_{(2)}(t-\xi) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi, \\
\boldsymbol{q}_{(3)}(\boldsymbol{x}, t) = -\int\limits_0^t \Gamma^{\{2\}}_{(3)}(t-\xi) \cdot \mathrm{Div}\, Z^{\{2\}}(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\Gamma^{\{2\}}_{(1)}$, $\Gamma^{\{2\}}_{(2)}$, $\Gamma^{\{2\}}_{(3)}$ — разностные материальные ядра. Соотношениям (3.1) соответствуют обобщенные функции

$$\Gamma^{\{2\}}_{(1)}(t) = \Lambda^{\{2\}}_{(1)}\delta(t), \quad \Gamma^{\{2\}}_{(2)}(t) = \Lambda^{\{2\}}_{(2)}\delta(t), \quad \Gamma^{\{2\}}_{(3)}(t) = \Lambda^{\{2\}}_{(3)}\delta(t).$$

Нетрудно найти физические размерности введенных материальных функций: $[\Lambda^{\{2\}}_{(\alpha)}] = \mathrm{MLT}^{-3}\mathrm{K}_\alpha^{-1}$, $[\Gamma^{\{2\}}_{(\alpha)}] = \mathrm{MLT}^{-4}\mathrm{K}_\alpha^{-1}$, $\alpha = 1, 2, 3$.

С одной стороны, связи (3.1), (3.2) можно трактовать как определяющие соотношения сред, в которых реализуются немеханические процессы и взаимодействия определенного типа. С другой стороны, в определяющих соотношениях, как и в формулировках законов, должны содержаться физические величины, определенные ранее. Однако в размерности полей z, $\boldsymbol{z}$ и $Z^{\{2\}}$ входят K_1, K_2 и K_3, поэтому они не могут быть введены с использованием переменных, размерность которых выражается в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$.

4. Строка V. Закон изменения величин y, $\boldsymbol{y}$, $Y^{\{2\}}$. Появление в соотношениях (3.1) величин z, $\boldsymbol{z}$ и $Z^{\{2\}}$ приводит к необходимости введения энергетически сопряженных с ними величин y, $\boldsymbol{y}$ и $Y^{\{2\}}$ в виде (2.1) и образования наряду с тензорной парой (ε, σ) других пар, описанных в п. **2**. В каждой паре один из параметров состояния описывает процесс, происходящий в объеме V, а другой — отклик среды на этот процесс.

Запишем локальное уравнение в дифференциалах

$$\begin{aligned}
&\rho(z\, dy + \boldsymbol{z} \cdot d\boldsymbol{y} + Z^{\{2\}} : dY^{\{2\}}) = \\
&\qquad = \rho(q_{(1)} + q_{(2)} + q_{(3)})\, dt - \operatorname{div}(\boldsymbol{q}_{(1)} + \boldsymbol{q}_{(2)} + \boldsymbol{q}_{(3)})\, dt + w^* dt,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где w^* — объемная плотность рассеивания в V. В левой части (4.1) содержится сумма "энергетических" дифференциалов $z\, dy$, $\boldsymbol{z} \cdot d\boldsymbol{y}$ и $Z^{\{2\}} : dY^{\{2\}}$, размерность которых выражается в базисе $\{\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{T}\}$, а в правой части — их разбиение на источниковое, потоковое

Таблица 4

Строка V таблицы постулатов МСС

Закон	a	b	$c \cdot \boldsymbol{n}$	d
V	y	$q_{(1)}/z$	$-\boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \boldsymbol{n}/z$	$w^*/z - \boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} z\,/z^2$

слагаемые и производство. Таким образом, локальное уравнение (4.1) является определением величин y, $\boldsymbol{y}$ и $Y^{\{2\}}$, которые могут не измеряться в эксперименте, вследствие чего имеют вспомогательный характер.

Поскольку с учетом размерности локальное уравнение (4.1) записывается для произведений $z\,dy$, $\boldsymbol{z} \cdot d\boldsymbol{y}$ и $Z^{\{2\}} : dY^{\{2\}}$, а не для dy, $d\boldsymbol{y}$ и $dY^{\{2\}}$ по отдельности, в нем имеются интегрирующие множители. Если в среде реализуются немеханические взаимодействия, описываемые только одной скалярной энергетически сопряженной парой (y, z), то можно разделить левую и правую части (4.1) на $z\,dt$, проинтегрировать по V и получить строку V таблицы постулатов — интегральный закон изменения величины y (табл. 4).

Интегрирующий множитель $1/z$ при интегрировании по частям приводит к возникновению в выражении для производства величины y слагаемого $-(\boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} z)/z^2$, которое при выборе, например, связи (3.1) представляет собой квадратичную форму

$$\Upsilon(\Lambda^{\{2\}}_{(1)}; \operatorname{grad} z) = \frac{1}{z^2} \operatorname{grad} z \cdot \Lambda^{\{2\}}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} z \qquad (4.2)$$

относительно материального тензора $\Lambda^{\{2\}}_{(1)}$ и градиента поля z. Даже если среда обратима, т. е. $w^* \equiv 0$, производство величины y может быть ненулевым.

5. Принципы построения определяющих соотношений. Сравним скалярные соотношения (2.2) и (4.1) и запишем

$$\rho\,du = \sigma : d\varepsilon + \rho(z\,dy + \boldsymbol{z} \cdot d\boldsymbol{y} + Z^{\{2\}} : dY^{\{2\}}) - w^* dt. \qquad (5.1)$$

Рассматривая массовую плотность внутренней энергии u как функцию независимых параметров состояния ε, y, $\boldsymbol{y}$ и $Y^{\{2\}}$, явно зависящую от времени вследствие наличия рассеивания, из (5.1) получаем определяющие соотношения

$$\sigma = \rho\,\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}, \quad z = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \boldsymbol{z} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{y}}, \quad Z^{\{2\}} = \frac{\partial u}{\partial Y^{\{2\}}}, \quad \rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = -w^*, \qquad (5.2)$$

связывающие зависимые параметры состояния σ, z, $\boldsymbol{z}$ и $Z^{\{2\}}$ с независимыми [18]. Задать среду, в которой реализуются связанные процессы, описываемые энергетически сопряженными парами (ε, σ), (y, z), $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ и $(Y^{\{2\}}, Z^{\{2\}})$, означает задать выполняющую роль потенциала функцию

$$u = u(\varepsilon, y, \boldsymbol{y}, Y^{\{2\}}, t).$$

С помощью преобразований Лежандра

$$f = u - yz - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - Y^{\{2\}} : Z^{\{2\}}, \qquad \rho g = \rho u - \varepsilon : \sigma,$$
$$\rho h = \rho u - \varepsilon : \sigma - \rho yz - \rho \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \rho Y^{\{2\}} : Z^{\{2\}}$$

можно использовать также другие потенциалы

$$f = f(\varepsilon, z, \boldsymbol{z}, Z^{\{2\}}, t), \qquad g = g(\sigma, y, \boldsymbol{y}, Y^{\{2\}}, t), \qquad h = h(\sigma, z, \boldsymbol{z}, Z^{\{2\}}, t),$$

являющиеся массовыми плотностями свободной энергии Гельмгольца F_V, энергии Гиббса G_V и энтальпии H_V в объеме V:

$$F_V(t) = \int\limits_V \rho f(\boldsymbol{x}, t)\,dV, \quad G_V(t) = \int\limits_V \rho g(\boldsymbol{x}, t)\,dV, \quad H_V(t) = \int\limits_V \rho h(\boldsymbol{x}, t)\,dV.$$

В обозначениях этих потенциалов определяющие соотношения (5.2) имеют следующий вид:

$$\sigma = \rho\,\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \quad y = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \boldsymbol{y} = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}, \quad Y^{\{2\}} = -\frac{\partial f}{\partial Z^{\{2\}}}, \quad \rho\,\frac{\partial f}{\partial t} = -w^*,$$

$$\varepsilon = -\rho\,\frac{\partial g}{\partial \sigma}, \quad z = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \boldsymbol{z} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}, \quad Z^{\{2\}} = \frac{\partial g}{\partial Y^{\{2\}}}, \quad \rho\,\frac{\partial g}{\partial t} = -w^*,$$

$$\varepsilon = -\rho\,\frac{\partial h}{\partial \sigma}, \quad y = -\frac{\partial h}{\partial z}, \quad \boldsymbol{y} = -\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{z}}, \quad Y^{\{2\}} = -\frac{\partial h}{\partial Z^{\{2\}}}, \quad \rho\,\frac{\partial h}{\partial t} = -w^*.$$

6. Пример неизотермического процесса. Примером скалярной пары (y, z) в неизотермической МСС является пара (s, T), где $s(\boldsymbol{x}, t)$ — массовая плотность энтропии S_V; $T(\boldsymbol{x}, t)$ — абсолютная температура. Если при этом другие немеханические взаимодействия в среде отсутствуют, то строка V таблицы постулатов (см. табл. 4) представляет собой закон изменения энтропии.

Принцип неубывания энтропии в изолированной системе, предложенный в конце XIX в. Р. Клаузиусом и Л. Больцманом и лежащий в основе второго закона термодинамики, применительно к рассматриваемому объему V формулируется следующим образом: если $q_{(1)}|_V = 0$ и $(\boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \boldsymbol{n})_\Sigma = 0$, то

$$\int\limits_V \Big(\frac{w^*}{T} - \frac{\boldsymbol{q}_{(1)} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}\Big)\, dV \geqslant 0. \tag{6.1}$$

В силу произвольности V неравенство (6.1) эквивалентно неотрицательности подынтегрального выражения в каждой точке $\boldsymbol{x} \in V$. Подставляя в (6.1), например, закон Фурье, которым в данном случае является первое определяющее соотношение (3.1), для квадратичной формы Υ (4.2) получаем неравенство

$$\operatorname{grad} T \cdot \Lambda \cdot \operatorname{grad} T \geqslant -Tw^*, \qquad \boldsymbol{x} \in V.$$

В случае $w^* \equiv 0$ неубывание энтропии в изолированной термодинамической системе равносильно положительной определенности тензора теплопроводности Λ (положительности теплопроводности в изотропной сплошной среде).

Заключение. Таким образом, для того чтобы ввести в математическую модель новое, немеханическое взаимодействие, необходимо выполнить следующие требования:

— добавить в строку IV таблицы постулатов МСС (см. графы “a”, “b” в табл. 4) слагаемые, связанные с изменением внутренней энергии вследствие нового вида взаимодействия (при этом производство полной энергии равно нулю), т. е. определить физический смысл новых массовой плотности источников в V и поверхностной плотности потока через Σ;

— ввести энергетически сопряженную пару новых характеризующих данное взаимодействие величин, которые нельзя выразить через имеющиеся, и расширить мультипликативный базис размерностей;

— сформулировать аналог постулата V, определяющего источник, поток и производство одной из входящих в новую пару величин;

— придать смысл внутренней энергии функции u или какому-либо потенциалу новой независимой переменной и получить определяющие соотношения, связывающие зависимые параметры в каждой из имеющихся в модели пар с независимыми;

— выполнить (по крайней мере, виртуально) эксперименты для нахождения материальных функций, входящих в указанные выше определяющие соотношения, в том числе материальных функций, характеризующих связанные эффекты.

Сформулированным требованиям помимо чисто механических и термических взаимодействий удовлетворяют электромагнитные взаимодействия, характеризуемые энергетически сопряженной парой $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$, где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высш. шк., 1983.
2. **Gurtin M. E.** The mechanics and thermodynamics of continua / M. E. Gurtin, E. Fried, L. Anand. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
3. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Ленанд, 2014.
4. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
5. **Malvern L. E.** Introduction to the mechanics of a continuous medium. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1969.
6. **Maugin G. A.** Continuum mechanics through the twentieth century: a concise historical perspectives. Dordrecht: Springer, 2013. (Solid mechanics and its applications; V. 196).
7. **Noll W.** Foundations of mechanics and thermodynamics. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974.
8. **Reddy J. N.** Introduction to continuum mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
9. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004.
10. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Наука, 1975.
11. **Ишлинский А. Ю.** Механика: Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985.
12. **Победря Б. Е.** Основы механики сплошной среды / Б. Е. Победря, Д. В. Георгиевский. М.: Физматлит, 2006.
13. **Димитриенко Ю. И.** Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009.
14. **Нигматулин Р. И.** Механика сплошной среды. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014.
15. **Победря Б. Е.** Постулаты механики сплошной среды и дифференциальные следствия из них // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Унипресс, 2000. Т. 5. С. 288–292.
16. **Георгиевский Д. В.** О роли двух термодинамических постулатов в феноменологическом построении механики сплошной среды // Чебышев. сб. 2019. Т. 20, № 3. С. 135–143.
17. **Georgievskii D. V.** Two thermodynamic laws in phenomenological mechanics of continuum: Postulates or definitions? // Theoretical analysis, computations, and experiments of multiscale materials. Cham: Springer, 2022. P. 145–154. (Ser. Advanced structured materials; V. 175).
18. **Бровко Г. Л.** Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017.

Поступила в редакцию 29/XI 2023 г.,
после доработки — 29/XI 2023 г.
Принята к публикации 28/X 2024 г.