УДК 539.30

АСИМПТОТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н. А. Федорова, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Идея асимптотического анализа задач упругости для тонких тел принадлежит Фридрихсу [1, 2], который установил, что решение линейной задачи упругости для изотропной пластины отличается от решения классических уравнений Кирхгофа на погранслой, локализующийся у краевого среза пластины.

В работах [3—9] асимптотическому анализу подвергнуты задачи упругости для изотропных и анизотропных оболочек, эти работы объединяет использование уравнений линейной теории упругости, подбор масштабов растяжения переменных из условия осуществимости предельного перехода к уравнениям Кирхгофа—Лява и разложения искомого решения в ряды по степеням малого параметра, пропорционального толщине.

Точный асимптотический анализ осесимметричной задачи упругости для изотропной цилиндрической оболочки выполнен в [10]. Здесь при применении метода однородных решений оценены асимптотические порядки характеристических корней системы и в соответствии с ними установлено наличие трех частных решений с разными скоростями изменения по осевой координате.

В данной работе для анизотропной цилиндрической оболочки установлен и притом более простым путем, чем в [10], тот же результат, что и для изотропной: осесимметричная задача упругости порождает регулярное решение и не более двух погранслоев разных показателей изменяемости. Исследована асимптотика задачи, построены итерационные системы уравнений для определения решений всех трех типов.

1. Рассматривается линейная задача об осесимметричном статическом деформировании ортотропной цилиндрической оболочки как пространственного упругого тела.

Пусть a, b, c — соответственно полудлина, радиус срединной поверхности и полутолщина оболочки; t_n —определенная на срединной поверхности ортогональная система координат; h_n — ее метрические коэффициенты Ламэ; e_{mn}, e_{44}, e_{55}, e_{66} — элементы симметричной матрицы податливости ортотропного материала; $P_n = bp_n$ — компоненты вектора объемных внешних сил; σ_{mn} — компоненты симметричного тензора напряжений; ε_{mn} — компоненты симметричного тензора деформаций; $u_n = bw_n$ — компоненты вектора перемещений (индексы m, n пробегают значения 1, 2, 3).

Независимые переменные изменяются в пределах

$$t_1 \in [-\alpha, \alpha],\ t_2 \in [-\pi, \pi],\ t_3 \in [-1, 1]\ (\alpha = a/b).$$

Коэффициенты Ламэ определяются равенствами

$$h_1 = b,\ h_2 = b + ct_3,\ h_3 = c.$$

Коэффициенты податливости не зависят от ε ($\varepsilon = c/b$). По условию осевой симметрии введенные переменные параметры не зависят от окружной координаты t_2. Тогда статическая задача линейной теории упругости анизотропного тела формулируется следующей системой дифференциальных уравнений [11]:

$$\varepsilon_{11} = \partial w_1/\partial t_1 = e_{11}\sigma_{11} + e_{12}\sigma_{22} + e_{13}\sigma_{33},\ \varepsilon_{13} = \varepsilon\partial w_3/\partial t_1 + \partial w_1/\partial t_3 = \varepsilon e_{44}\sigma_{13}, \tag{1.1}$$

$$a_2\varepsilon_{22} = w_3 = a_2(e_{21}\sigma_{11} + e_{22}\sigma_{22} + e_{23}\sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial w_2}{\partial t_3} - \varepsilon\frac{w_2}{a_2} = \varepsilon e_{55}\sigma_{23},\quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial t_3} = \varepsilon(e_{31}\sigma_{11} + e_{32}\sigma_{22} + e_{33}\sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial w_2}{\partial t_1} = e_{66}\sigma_{12},\quad \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}(a_2\sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(a_2\sigma_{13}) + \varepsilon a_2 p_1 = 0,$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}(a_2\sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(a_2\sigma_{23}) + \varepsilon\sigma_{23} + \varepsilon a_2 p_2 = 0,$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}(a_2\sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(a_2\sigma_{33}) - \varepsilon\sigma_{22} + \varepsilon a_2 p_3 = 0,$$

$$a_2 = 1 + \varepsilon t_3.$$

Уравнения (1.1) дополняются одной из систем граничных условий:

а) система напряжений

$$\sigma_{n3}|_{t_3=\mp 1} = S_{n3}^{\mp}(t_1), \quad \sigma_{n1}|_{t_1=\mp\alpha} = S_{n1}^{\mp}(t_3);$$

б) система перемещений

$$w_n|_{t_3=\mp 1} = H_{n3}^{\mp}(t_1), \quad w_n|_{t_1=\mp\alpha} = H_{n1}^{\mp}(t_3); \tag{1.2}$$

в) смешанная система, представляющая собой комбинацию некоторых условий «а» с некоторыми условиями «б».

По определению оболочки

$$\varepsilon \ll 1, \ \varepsilon \ll \alpha. \tag{1.3}$$

Следовательно, система (1.1) содержит малый параметр. А так как при $\varepsilon = 0$ в (1.1) исчезают производные по переменной t_1 от четырех искомых функций (w_3, σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}), то она является сингулярно вырождающейся (сингулярно возмущенной) системой [12]. Особенность такой системы — отсутствие сходимости ее решения к вырожденному (при $\varepsilon = 0$) в малой окрестности граничных значений той переменной, по которой происходит вырождение. Эту особенность сингулярно возмущенных систем учитывает асимптотический метод пограничных функций, сформулированный в [12] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение этого метода к краевой задаче (1.1), (1.2) требует ее предварительного анализа.

Системе (1.1) ставится в соответствие однородная система, которая допускает частные решения вида

$$w_n = w_n^0 \exp(t_1/\lambda + t_3/\mu), \quad \sigma_{mn} = \sigma_{mn}^0 \exp(t_1/\lambda + t_3/\mu),$$

w_n, σ_{mn}, λ, μ — постоянные. Соответствующее характеристическое уравнение определяет следующие соотношения между его корнями λ, μ и малым параметром ε: λ, μ не зависят от ε, $\lambda \sim \varepsilon\mu$, $\lambda \sim \sqrt{\varepsilon\mu}$, т. е. система порождает три типа решений: 1) регулярное (внутреннее) решение с показателем изменяемости, равным нулю; 2) погранслой с показателем изменяемости 1/2; 3) погранслой с показателем изменяемости 1. Показатель изменяемости определяется как порядок λ относительно ε [7]. Эти решения строятся с помощью трех асимптотических разложений: регулярного разложения по степеням ε без растяжения осевой координаты; пограничного разложения по степеням ε с растяжением осевой координаты пропорционально $\varepsilon^{1/2}$; пограничного разложения по степеням ε с растяжением осевой координаты пропорционально ε. Следовательно, искомые функции w_n, σ_{mn} могут быть представлены суммами

$$\sigma_{mn} = X_{mn} + Y_{mn} + Z_{mn}, \quad w_n = U_n + V_n + W_n, \quad \varepsilon_{mn} = U_{mn} + V_{mn} + W_{mn}, \tag{1.4}$$

в которых X_{mn}, U_n, U_{mn} — регулярные ряды с нулевым показателем изменяемости; Y_{mn}, V_n, V_{mn} — пограничные ряды с показателем изменяемости 1/2; Z_{mn}, W_n, W_{mn} — пограничные ряды с показателем изменяемости 1.

2. Регулярное разложение представляется рядами

$$U_n(t_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_n^{(k)}(t_1, t_3), \quad X_{mn}(t_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{mn}^{(k)}(t_1, t_3), \tag{2.1}$$

$$X_{n3}(t_1, t_3) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{n3}^{(k)}(t_1, t_3), \quad U_{mn}(t_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{mn}^{(k)}(t_1, t_3).$$

Подстановка этих рядов в систему (1.1) и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ε приводит к последовательности систем, первая из которых (соответствующая коэффициентам при нулевой степени ε) имеет вид

$$(2.2) \qquad u_{11}^{(0)} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t_1} = e_{11}x_{11}^{(0)} + e_{12}x_{22}^{(0)}, \quad u_{13}^{(0)} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t_3} = 0,$$

$$u_{22}^{(0)} - u_3^{(0)} = e_{21}x_{11}^{(0)} + e_{22}x_{22}^{(0)}, \quad u_{23}^{(0)} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t_3} = 0,$$

$$u_{33}^{(0)} = \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial t_3} = 0, \quad u_{12}^{(0)} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t_1} = e_{66}x_{12}^{(0)};$$

$$(2.2\text{а}) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\left(a_2 x_{11}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 x_{13}^{(0)}\right) + a_2 p_1 = 0;$$

$$(2.2\text{б}) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\left(a_2 x_{12}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 x_{23}^{(0)}\right) + a_2 p_2 = 0;$$

$$(2.2\text{в}) \qquad \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 x_{33}^{(0)}\right) - x_{22}^{(0)} + a_2 p_3 = 0.$$

Эта система определяет перемещения как функции одной координаты t_1 и приводится к замкнутой системе безмоментной теории оболочек

$$(2.3) \qquad u_1^{(0)} \equiv u_{10}(t_1), \quad u_2^{(0)} \equiv u_{20}(t_1), \quad u_3^{(0)} \equiv u_{30}(t_1),$$

$$e_{11}X_{11}^{(0)} + e_{12}X_{22}^{(0)} = 2\frac{du_1^{(0)}}{dt_1},$$

$$e_{21}X_{11}^{(0)} + e_{22}X_{22}^{(0)} = 2u_3^{(0)}, \quad e_{66}X_{12}^{(0)} = 2\frac{du_2}{dt_1},$$

$$X_{11,1}^{(0)} + f_1^{(0)} = 0, \quad X_{11}^{(0)} = \int_{-1}^{1} a_2 x_{11}^{(0)} dt_3, \quad f_1^{(0)} = \left[a_2 x_{13}^{(0)}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} a_2 p_1 dt_3,$$

$$X_{12,1}^{(0)} + f_2^{(0)} = 0, \quad X_{12}^{(0)} = \int_{-1}^{1} a_2 x_{12}^{(0)} dt_3, \quad f_2^{(0)} = \left[a_2 x_{23}^{(0)}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} a_2 p_2 dt_3,$$

$$X_{22}^{(0)} - f_3^{(0)} = 0, \quad X_{22}^{(0)} = \int_{-1}^{1} x_{22}^{(0)} dt_3, \quad f_3^{(0)} = \left[a_2 x_{33}^{(0)}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} a_2 p_3 dt_3$$

с дополнительными уравнениями (2.2а)—(2.2в), определяющими поперечные напряжения через напряжения безмоментного состояния. Поперечные деформации определяются по известным напряжениям из следующих уравнений обобщенного закона Гука:

$$U_{13}^{0} = \varepsilon e_{44} x_{13}^{(0)}, \quad U_{23}^{0} = \varepsilon e_{55} x_{23}^{(0)},$$

$$U_{33}^{0} = \varepsilon\left(e_{31}x_{11}^{(0)} + e_{32}x_{22}^{(0)} + e_{33}x_{33}^{(0)}\right).$$

Разложением (2.1) могут быть удовлетворены все граничные условия (как в напряжениях, так и в перемещениях) на цилиндрических поверхностях оболочки, но не могут быть удовлетворены граничные условия на торцах.

3. Первое пограничное разложение выполняется в однородной системе, соответствующей (1.1), после замены переменной t_1 на переменную

$$\vartheta_1 = t_1/\sqrt{\varepsilon}.$$

Оно представляется рядами

$$Y_{ij}(\vartheta_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} y_{ij}^{(k)}(\vartheta_1, t_3), \tag{3.1}$$

$$Y_{i3}(\vartheta_1, t_3) = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} y_{i3}^{(k)}(\vartheta_1, t_3), \quad Y_{33}(\vartheta_1, t_3) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} y_{33}^{(k)}(\vartheta_1, t_3),$$

$$V_i(\vartheta_1, t_3) = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_i^{(k)}(\vartheta_1, t_3), \quad V_3(\vartheta_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_3^{(k)}(\vartheta_1, t_3),$$

$$V_{mn}(\vartheta_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_{mn}^{(k)}(\vartheta_1, t_3), \quad i, j = 1, 2.$$

На самом деле указанное здесь согласование зависимых переменных приводит к исключению из исходной системы дробных степеней параметра ε. Вследствие этого ее решение представимо разложением по целым степеням ε, так что суммирование в рядах (3.1) следует проводить лишь по четным значениям номера k.

Подстановка рядов (3.1) в систему (1.1) с «растянутой» независимой переменной ϑ_1 и сравнение коэффициентов при одинаковых целых степенях ε приводит к последовательности систем, первая из которых (соответствующая коэффициентам при нулевой степени ε) имеет вид

$$v_{11}^{(0)} = \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \vartheta_1} = e_{11} y_{11}^{(0)} + e_{12} y_{22}^{(0)}, \quad v_{13}^{(0)} = \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial t_3} = 0, \tag{3.2}$$

$$v_{22}^{(0)} = v_3^{(0)} = e_{21} y_{11}^{(0)} + e_{22} y_{22}^{(0)}, \quad v_{23}^{(0)} = \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial t_3} = 0,$$

$$v_{33}^{(0)} = \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial t_3} = 0, \quad v_{12}^{(0)} = \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \vartheta_1} = e_{66} y_{12}^{(0)};$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\left(a_2 y_{11}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 y_{13}^{(0)}\right) = 0; \tag{3.2а}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\left(a_2 y_{12}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 y_{23}^{(0)}\right) = 0; \tag{3.2б}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\left(a_2 y_{13}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(a_2 y_{33}^{(0)}\right) - y_{22}^{(0)} = 0. \tag{3.2в}$$

Эта система приводится к замкнутой системе уравнений Кирхгофа — Лява

$$v_1^{(0)} \equiv v_{10}(\vartheta_1) - t_3 \frac{dv_{30}}{d\vartheta_1}, \quad v_2^{(0)} \equiv v_{20}(\vartheta_1), \quad v_3^{(0)} \equiv v_{30}(\vartheta_1), \tag{3.3}$$

$$Y_{11}^{(0)} = \frac{2}{\Omega}\left(e_{22} \frac{dv_{10}(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} - e_{12} v_{30}(\vartheta_1)\right), \quad \Omega = e_{11} e_{22} - e_{12}^2,$$

$$Y_{12}^{(0)} = \frac{2}{e_{66}} \frac{dv_{20}(\vartheta_1)}{d\vartheta_1}, \quad Y_{22}^{(0)} = \frac{2}{\Omega}\left(e_{11} v_{30}(\vartheta_1) - e_{12} \frac{dv_{10}(\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\right),$$

$$Y_{11,1}^{(0)} + g_1^{(0)} = 0, \quad Y_{11}^{(0)} = \int_{-1}^{1} a_2 y_{11}^{(0)} dt_3, \quad g_1^{(0)} = \left[a_2 y_{13}^{(0)}\right]_{-1}^{1},$$

$$Y_{12,1}^{(0)} + g_2^{(0)} = 0, \quad Y_{12}^{(0)} = \int_{-1}^{1} a_2 y_{12}^{(0)} dt_3, \quad g_2^{(0)} = \left[a_2 y_{23}^{(0)}\right]_{-1}^{1},$$

$$Y_{13,1}^{(0)} - Y_{22}^{(0)} + g_3^{(0)} = 0, \quad Y_{22}^{(0)} = \int_{-1}^{1} y_{22}^{(0)} dt_3, \quad Y_{13}^{(0)} = \int_{-1}^{1} a_2 y_{13}^{(0)} dt_3,$$

$$M_{11,1}^{(0)} - Y_{13}^{(0)} = 0, \quad M_{11}^{(0)} = \int_{-1}^{1} t_3 a_2 y_{11}^{(0)} dt_3, \quad g_3^{(0)} = \left[a_2 y_{33}^{(0)}\right]_{-1}^{1},$$

$$M_{11}^{(0)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\Omega}\frac{d^2 v_{30}(\vartheta_1)}{d\vartheta_1^2}$$

с дополнительными уравнениями (3.2а)—(3.2в), определяющими поперечные напряжения через тангенциальные. Поперечные деформации определяются из следующих уравнений обобщенного закона Гука:

$$V_{13}^0 = \varepsilon e_{44} y_{13}^{(0)}, \quad V_{23}^0 = \varepsilon e_{55} y_{23}^{(0)},$$

$$V_{33}^0 = \varepsilon \left(e_{31} y_{11}^{(0)} + e_{32} y_{22}^{(0)} + e_{33} y_{33}^{(0)}\right).$$

Разложение (3.1) дает решение типа погранслоя с показателем изменяемости 1/2, которое еще не позволяет удовлетворять все граничные условия на торцах оболочки.

4. Второе пограничное разложение выполняется в однородной системе, соответствующей (1.1), после замены переменной t_1 на переменную

$$\tau_1 = t_1/\varepsilon.$$

Оно представляется рядами

$$Z_{mn}(\tau_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{mn}^{(k)}(\tau_1, t_3), \tag{4.1}$$

$$W_n(\tau_1, t_3) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_n^{(k)}(\tau_1, t_3),$$

$$W_{mn}(\tau_1, t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_{mn}^{(k)}(\tau_1, t_3)$$

и образует последовательность систем, первая из которых (при нулевой степени ε) имеет вид

$$w_{11}^{(0)} = \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial \tau_1} = e_{11} z_{11}^{(0)} + e_{12} z_{22}^{(0)} + e_{13} z_{33}^{(0)}, \tag{4.2}$$

$$w_{13}^{(0)} = \frac{\partial w_3^{(0)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial t_3} = e_{44} z_{13}^{(0)},$$

$$w_{22}^{(0)} = e_{21} z_{11}^{(0)} + e_{22} z_{22}^{(0)} + e_{23} z_{33}^{(0)} = 0, \quad w_{23}^{(0)} = \frac{\partial w_2}{\partial t_3} = e_{55} z_{23}^{(0)},$$

$$w_{33}^{(0)} = \frac{\partial w_3^{(0)}}{\partial t_3} = e_{31} z_{11}^{(0)} + e_{32} z_{22}^{(0)} + e_{33} z_{33}^{(0)}, \quad w_{12}^{(0)} = \frac{\partial w_2^{(0)}}{\partial \tau_1} = e_{66} z_{12}^{(0)},$$

$$\frac{\partial z_{11}^{(0)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial z_{13}^{(0)}}{\partial t_3} = 0, \quad \frac{\partial z_{12}^{(0)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial z_{23}^{(0)}}{\partial t_3} = 0, \quad \frac{\partial z_{13}^{(0)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial z_{33}^{(0)}}{\partial t_3} = 0.$$

Разложение (4.1) дает решение типа погранслоя с показателем изменяемости 1 (погранслой Фридрихса), которое позволяет в каждом приближении ликвидировать порождаемые первыми двумя решениями невязки в граничных условиях на торцах цилиндра.

5. Вопрос о сходимости построенных асимптотических рядов требует специального изучения. Применительно к пластинкам положительные результаты получены в [13, 14].

Эллиптичность системы (4.2) и возможность удовлетворения всех граничных условий в каждом приближении обеспечивают отсутствие угловых погранслоев [15].

При наличии сходимости ряды (1.4), (2.1), (3.1), (4.1) дают точное решение исходной задачи. Их частичные суммы дают асимптотически точное решение.

В частности, функции

$$w_n = U_n^0 + V_n^0 + W_n^0 \quad \text{и} \quad \sigma_{mn} = X_{mn}^0 + Y_{mn}^0 + Z_{mn}^0,$$

где U_n^0, X_{mn}^0; V_n^0, Y_{mn}^0; W_n^0, Z_{mn}^0 — соответственно решения систем (2.2), (3.2), (4.2) нулевого приближения, образуют простейшее асимптотически точное решение исходной задачи, удовлетворяющее всем граничным условиям.

Функции $w_n = U_n^0 + V_n^0$, $\sigma_{mn} = X_{mn}^0 + Y_{mn}^0$ образуют решение, которое является асимптотически точным вне малых (длиной порядка $b\varepsilon$) пограничных зон оболочки. Это решение определяется либо непосредственным интегрированием систем (2.2), (3.2), либо последовательным интегрированием «оболочечных» систем (2.3), (3.3) с «дополнительными» уравнениями (2.2а)—(2.2в), (3.2а)—(3.2в).

Функции $w_n = U_n^0$, $\sigma_{mn} = X_{mn}^0$ являются решением, асимптотически точным вне пограничных зон оболочки длиной порядка $b\sqrt{\varepsilon}$ и определяются либо непосредственным интегрированием системы (2.2), либо последовательным интегрированием (2.3) с дополнительными уравнениями (2.2а)—(2.2в). Тем самым асимптотический метод дает теоретическое обоснование так называемым итерационным теориям оболочек [11]. При этом он допускает итерации, уточняющие теорию Кирхгофа — Лява и итерации, уточняющие безмоментную теорию оболочек.

Если анизотропия оболочки такова, что ее сопротивление поперечным напряжениям ослаблено (например, при армировании жесткими волокнами параллельно срединной поверхности), то в уравнениях (1.1) коэффициенты e_{33}, e_{44}, e_{55} существенно больше остальных коэффициентов податливости. Необходимым условием представимости решения рядами (1.4), (2.1), (3.1), (4.1) в этом случае является условие

$$e\varepsilon \ll 1,$$

где $e = \max(e_{33}, e_{44}, e_{55})$, которое сужает область определения геометрических параметров оболочки по сравнению с (1.3). Вместе с тем увеличивается вклад поперечных напряжений и деформаций в общее напряженно-деформированное состояние оболочки. Повышается необходимость привлечения «дополнительных» уравнений (2.2а)—(2.2в) и (3.2а)—(3.2в), в первом приближении определяющих поперечные компоненты тензоров напряжений и деформаций через тангенциальные компоненты.

Таким образом, для ортотропной цилиндрической оболочки построено решение осесимметричной задачи упругости. На основании анализа характеристических корней системы (1.1) установлено, что осесимметричная задача упругости для ортотропной цилиндрической оболочки порождает регулярное (внутреннее) решение и два погранслоя существенно разных показателей изменяемости: с показателем изменяемости 1/2 (погранслой Кирхгофа — Лява) и с показателем изменяемости 1 (погранслой Фридрихса). Построены итерационные системы уравнений для определения решений всех трех типов.

Поступила 17 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Friedrichs K. O.** The edge effect in the bending of plates.— In: H. Reissner Anniversary Volume Contr. Appl. Mech., Ann Arbor, Mich.: J. W. Edwards, 1949.
2. **Friedrichs K. O., Dressler R. F.** Boundary-layer theory for elastic plates.— Comm. Pupe & Appl. Math., 1961, vol. 14, N 1.

3. **Jonson M. W., Reissner E.** On the foundation of the theory of thin elastic shells.— J. Math. Phys., 1959, vol. 35, N 4.
4. **Reiss E. L.** A theory for the small rotationally symmetric deformation of cylindrical shells.— Comm. Pure & Appl. Math., 1960, vol. 13, N 3.
5. **Грин А. Е.** Уравнения пограничной зоны в линейной теории упругих тонких оболочек.— Механика, сб. пер., 1963, № 2.
6. **Гольденвейзер А. Л.** Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
7. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
8. **Агаловян Л. А.** О погранслое ортотропных пластинок.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
9. **Хачатрян Ш. М.** О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
10. **Базаренко Н. А., Ворович И. И.** Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине.— ПММ, 1965, т. 29, № 6.
11. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
12. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические методы решения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
13. **Ciarlet P. G., Destuynder Ph.** Justification of the linear plate model.— J. de Mecanique, 1979, vol. 18, N 2.
14. **Destuynder Ph.** Analyse du comportement de la solution tridimensionnelle des plaques lorsque l'esaisseur tend vers zero.— C. R. acad. sci., 1980, ser. A — B, t. 290, N 2.
15. **Бутузов В. Ф.** Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10.

Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Ф. Ф. Орлова*
Корректоры *Р. К. Червова, И. А. Литвинова*

Сдано в набор 14.05.81. Подписано к печати 1.09.81. МН-00267. Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Высокая печать. Усл. печ. л. 14,7. Усл. кр.-отт. 15,3. Уч.-изд. л. 15,8. Тираж 1953 экз. Заказ № 567.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99. Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.