

К ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМУ РАЗВИТИЮ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

М. Б. Зельман, А. Ф. Какоткин
(Новосибирск)

Согласно современным представлениям, переход к турбулентности в пограничном слое может происходить в результате неустойчивости течения к малым возмущениям. Начальная стадия такого процесса описывается линейной теорией гидродинамической устойчивости.

Классический подход к проблеме базируется на рассмотрении элементарных волновых возмущений [1] в продольно-однородном потоке. Непараллельность движения учитывается поправками приближений [2].

В естественных условиях флуктуации локализованы в пространстве. В ходе эволюции возбуждается целый спектр колебаний, изменения происходят в пространстве и времени.

Моделированию такого процесса служит задача с начальными данными. Ее исследование вызывает широкий интерес и имеет практическую ценность для определения зоны перехода [1—17]. Получен ряд данных об эволюции узких волновых пакетов в параллельных и слабонепараллельных потоках [3—14]. Тем не менее остаются проблемы, требующие решения. В частности, нуждается в выяснении вопрос о поведении флуктуаций произвольной формы в пограничном слое. В данной работе рассматривается пространственно-временная линейная эволюция возмущений в непараллельном пограничном слое.

Обычно в работах анализируется асимптотическое поведение пакета волн Толлмица — Шлихтинга (ТШ) без обсуждения связи с начальным распределением [1,3—13]. Между тем такое распределение играет важную роль в законе развития неустойчивости. Проиллюстрируем это на примере пакета ТШ-волн в двумерном течении типа Блазиуса.

Поле возмущений в этом случае описывается безразмерной функцией тока ψ , которую представим в виде

$$\psi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\theta(\alpha)} \varphi(y, \alpha) A(\alpha) = \int_{\alpha_0 - \delta}^{\alpha_0 + \delta} d\alpha e^{i\Delta\theta(\alpha)} A(\alpha) \varphi(y, \alpha) e^{i\theta(\alpha_0)} + J,$$

где $\theta(\alpha) = \alpha x - \Omega(\alpha)t$; $\Omega(\alpha) = \omega(\alpha) + i\gamma(\alpha)$ — собственная частота; $\varphi(y, \alpha)$ — собственная функция задачи Орра — Зоммерфельда; α_0 — центральное волновое число; J — остаточный член; $A(\alpha)$ — начальная амплитуда;

$$\Delta\theta = -t(\alpha_0 - \alpha) \{ \Omega'(\alpha_0) - x/t \} + \Omega''(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)/2, \quad d^n \Omega / d\alpha^n = \Omega^{(n)}.$$

Основной вклад вносится областью волновых чисел $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$, которая находится из условия

$$\delta^2 t \max(|\omega''(\alpha_0)|, |\gamma''(\alpha_0)|) \lesssim 1.$$

Если при $t = 0$ в распределении имеется пик, например,

$$(1) \quad A(\alpha) \simeq A(\alpha_0) \exp\left(-\frac{z^2 \Delta\alpha^2}{2}\right),$$

где $\Delta\alpha \sim z^{-1} \ll \alpha_0$, то $\delta \gg \Delta\alpha$ и

$$\begin{aligned} \psi \simeq e^{i\theta(\alpha_0)} \varphi(y, \alpha_0) A(\alpha_0) \int_{-\delta}^{\delta} d\eta \exp\{-t^2(\Omega'(\alpha_0) - x/t)^2/2z^2 - [z\eta/\sqrt{2} + \\ + it(\Omega'(\alpha_0) - x/t)]^2\} = e^{i\theta(\alpha_0)} A(\alpha_0) \varphi(y, \alpha_0) \exp\{-(\Omega'(\alpha_0)t - x)^2/2z^2\}. \end{aligned}$$

В теории гидродинамической устойчивости чаще рассматривается случай пространственно-локализованного возмущения. Тогда $\Delta\alpha \sim z^{-1} \sim \alpha > \delta$ и волновой пакет выделяется за счет существования $\alpha = \alpha_m$, $\gamma(\alpha_m) = \max_{\alpha} \gamma(\alpha) > 0$. При $t > \gamma^{-1}(\alpha_m) > 1$ $\alpha_0 \simeq \alpha_m$ и

$$(2) \quad \psi \simeq \frac{A(\alpha_m) \varphi(y, \alpha_m)}{\sqrt{2\pi i \Omega''(\alpha_m)}} \exp i \left\{ \theta(\alpha_m) - \frac{t(\omega'(\alpha_m) - x/t)^2}{2\Omega''(\alpha_m)} \right\}$$

в условиях

$$(3) \quad |\Omega''(\alpha_m)(\alpha - \alpha_m)| > |\Omega'(\alpha_m) - x/t|, \quad |\Omega''(\alpha_m)/t| > |\Omega'(\alpha_m) - x/t|^2.$$

Условия (3) следуют из требования малости J и пренебрежения отклонением максимума подынтегральной функции (2) от $\alpha = \alpha_m$. Метод проведенного анализа (метод Гаусса) хорошо известен в физике плазмы [18]. Заметим, что в теории гидродинамической устойчивости его применимость численно исследовалась в [5]. Неравенства (3) дают аналитические оценки его точности: решение (2) стремится к точному в окрестности $L = |x/t - \omega'(\alpha_m)| \rightarrow 0$, размеры которой убывают ($L \sim t^{-1/2}$). В результате метод Гаусса пригоден для анализа эволюции максимума интенсивности пакета, но не его формы.

Из (1), (2) следует, что даже в параллельном течении, где волновые свойства полностью определяются дисперсионным уравнением $\Omega = \Omega(\alpha)$, разные начальные условия обуславливают различия законов эволюции.

В непараллельном потоке задача существенно усложняется. Нет полного разделения поперечной и волновой структур [6]. Локальный спектр деформируется как по α , так и по x . Формирование цуга из локализованного начального возмущения не имеет ясной физической основы. При $t \gg 1$ оно не обязательно вырождается в такую волну. Тем не менее известные работы ограничены рассмотрением этого случая и строятся в предположении об инвариантности несущей частоты пакета [6—8, 12—15]. Исследование эволюции возмущения пограничного слоя произвольного начального вида является основной целью данной работы.

Рассмотрим двумерное движение. Введем безразмерную функцию тока $\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, y) + \psi(x, y, t)$, где Ψ_0 описывает невозмущенное поле, а ψ — его возмущение,

$$\max |\Psi_0| / \max |\psi| \gg 1.$$

С точностью до нелинейных по ψ членов имеем

$$(4) \quad Z\psi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta - \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta^2}{\text{Re}} \right) \psi = M(\Psi_0) \psi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi = 0 \quad (y = 0), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi < \infty \quad (y \rightarrow \infty),$$

$$\psi = \psi(x, y, 0) \quad (t = 0),$$

$$M(\Psi_0) = - \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi_0 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_0 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Обезразмеривание проводится стандартно по скорости набегающего потока U_∞ и подходящей длине l .

Имеет место медленность продольного изменения:

$$v = \max \left| \Psi_0^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0 \right|_{x_0} \sim \text{Re}^{-1}.$$

С точностью до $O(v)$ приходим к линейной задаче устойчивости в параллельном потоке. Ее решение можно найти преобразованием Фурье — Лапласа [4, 11]:

$$(5) \quad \psi(x, y, t) = \int_{\alpha_0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha) \varphi(y, \alpha) e^{-i\Omega_n t} + \int_0^{\infty} A_{(k)}(\alpha) \varphi_{(k)}(y, \alpha) \times \right. \\ \left. \times e^{-i\Omega_{(k)} t} dk \right\} e^{i\alpha x} d\alpha,$$

$$A_{n(k)} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy dx e^{i\alpha x} \Delta \psi(x, y, 0) \tilde{\varphi}_{n(k)}(y, \alpha).$$

Здесь $\Omega_{n(k)}$, $\varphi_{n(k)}$ определяются задачей Орра — Зоммерфельда; индексы n , (k) отвечают модам дискретного и сплошного спектров; $\hat{\varphi}_{n(k)}$ — решение сопряженной задачи.

Условие применимости локально-параллельного приближения $\alpha_0/v \gg 1$ верно для возмущения с $A_{n(k)}(\alpha)$, где $A_{n(k)}(\alpha) \approx 0$ при $|\alpha| < |\alpha_0|$. Волновые свойства определяются дисперсионной связью

$$\Omega_n(\alpha) = \omega_n(\alpha) + i\gamma_n(\alpha), \quad \Omega_{(k)}(\alpha) = -i(\alpha^2 + k^2 + i\alpha \operatorname{Re} U_\infty / \operatorname{Re} = \omega_{(k)}(\alpha) + i\gamma_{(k)}(\alpha).$$

В пограничном слое имеется единственная, неустойчивая в некотором диапазоне Re , мода (ТШ). В принципе для перехода могут оказаться важными и затухающие волны [19] прежде всего с $|\gamma/\omega| \ll 1$. Изменение профиля скорости основного потока в направлении движения меняет локальный спектр возмущения на масштабах, много больших $\lambda = \alpha_0^{-1}$, $\partial \ln |\Omega_{n(k)}, \varphi_{n(k)}| / \partial x \sim v \ll \alpha_0$.

Решение (4) можно найти разложением по параметру $v/\alpha_0 \sim v \ll 1$:

$$(6) \quad \psi = \sum_n \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha e^{i\theta_n} a_n(\alpha, \Omega_n(\alpha, \rho), \rho, \tau) \varphi_n(y, \alpha, \rho, \Omega_n(\alpha, \rho)) + \\ + \int_0^{\infty} \int_{\alpha_0}^{\infty} dk d\alpha e^{i\theta(k)} a_{(k)}(\alpha, \Omega_{(k)}(\alpha, \rho), \rho, \tau) \varphi_{(k)}(y, \alpha, \rho, \Omega_{(k)}(\alpha, \rho)) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} v^m \psi^{(m)}(y, x, t, \rho, \tau);$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} a_{n(k)} - \gamma_{n(k)} a_{n(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} v^m F_{n(k)}^{(m)};$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \theta_{n(k)} = -\omega_{n(k)}(\alpha, \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} v^m \Phi_{n(k)}^{(m)};$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x} \theta_{n(k)} = \alpha,$$

где $\rho = x_0 + vx$; $\tau = vt$; $a_{n(k)} = A_{n(k)} e^{v n(k)(\alpha, \rho)t}$; $\theta_{n(k)}(\alpha, x, t, \rho, \tau)$ — фаза волны; $\psi^{(m)}$, $F_{n(k)}^{(m)}$, $\Phi_{n(k)}^{(m)}$ требуют определения. Таким образом, решение строится в виде разложения по волнам с фиксированными волновыми числами (α — независимая переменная), при этом предполагается медленность изменения параметров его спектра. Такой подход основан на идеях, предложенных в [20] для одномерных консервативных систем.

Из (4), (6)–(9) получим, опуская индексы (n , (k)):

$$(10) \quad a\tilde{Z} \left(\frac{\partial}{\partial y}, y, \rho, i\alpha, -i\Omega \right) \varphi(y, \alpha, \rho, \Omega) + \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} a - \gamma a \right) \tilde{Z}_{-i\Omega} \varphi + \right. \\ \left. + i\Phi^{(1)} a \tilde{Z}_{-i\Omega} \varphi + v \frac{\partial}{\partial \rho} (a \tilde{Z}_{i\alpha} \varphi) + v M_1(\Psi_0) a \varphi \right\} + \\ + v e^{v t} \tilde{Z} \hat{\psi}^{(1)}(y, \alpha, \Omega, \rho, \tau) + O(v^2) = 0,$$

где

$$\hat{\psi}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \psi^{(1)} e^{i t d f / 2\pi}; \quad f = \alpha x - \Omega t; \quad \tilde{M}_1 = \partial^3 \Psi_0 / \partial y^2 \partial \rho \cdot \partial / \partial y;$$

$$\tilde{Z}_{-i\Omega} = -\partial \tilde{Z} / \partial i\Omega = \Delta + O(v); \quad \tilde{Z}_{i\alpha} = \partial \tilde{Z} / \partial i\alpha = \alpha \Omega + \partial \Psi_0 \Delta / \partial y - \\ - 2\alpha^2 \partial^2 \Psi_0 / \partial y^2 - \partial^3 \Psi_0 / \partial y^3 + 4\alpha \Delta / \operatorname{Re}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y} - \alpha^2.$$

В главном приближении (ρ , τ) фиксированы; (α , Ω , φ) определяются решением задачи Орра — Зоммерфельда $\tilde{Z} \varphi = 0$ (5). С точностью до $O(v)$ $\psi^{(1)}$ имеет ограниченные значения при условии ортогональности φ

выражению в фигурных скобках (10):

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{Z}_{-i\Omega} \Phi \rangle (F^{(1)} + i\Phi^{(1)}) + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} a + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \Omega} a \right) \langle \tilde{Z}_{i\alpha} \Phi \rangle + \\ & + \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{Z}_{i\alpha} \right) \Phi + M_1 \Phi \right\rangle a + \left\langle \tilde{Z}_{i\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \Omega} \right) \Phi \right\rangle a = 0, \\ & \langle f_r \rangle = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_r(y, \alpha) f_r dy. \end{aligned}$$

Разделяя реальные и мнимые части, определим $F^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$. Тогда с точностью до $O(v^2)$ для каждого $(n, (k); \alpha)$ имеем

$$(11) \quad \frac{\partial a}{\partial t} - \dot{\gamma} a + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \frac{\partial a}{\partial \Omega} + H_r = 0;$$

$$(12) \quad \Phi^{(1)} = -\frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha} + H_i \right\} a; \quad a(x, \alpha) = a|_{t=0},$$

где
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega = -\langle \tilde{Z}_{i\alpha} \Phi \rangle / \langle \tilde{Z}_{-i\Omega} \Phi \rangle;$$

$$\begin{aligned} H = H_r + iH_i = & \left\langle \alpha \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y \partial x} \Delta \Phi + 2c^2 \Phi \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x \partial y^3} \Phi + \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \left(\alpha \Omega + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \Delta - 2\alpha^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} - \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial y^3} + 4\alpha \Delta \frac{i}{\text{Re}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle \langle \tilde{Z}_{-i\Omega} \Phi \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Система (11), (12) описывает пространственно-временную эволюцию возмущений в неоднородном потоке. Уравнения справедливы для произвольного вида начального распределения и в отличие от случая квазигармонических пакетов [7—9, 12—15, 19] содержат производные по α ($\partial \Omega / \partial x \cdot \partial \Omega / \partial \alpha \cdot \partial a / \partial \Omega = \partial \Omega / \partial x \cdot \partial a / \partial \alpha$). Спектр трансформируется в пространстве (x, t, α) реальных переменных (ср. с [6, 7]). По известным $F^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ определяется $\psi^{(1)}$. Повторяя процедуру для $F^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$, находим $\psi^{(2)}$ и т. д. При этом $\psi^{(m)}$ — решение неоднородного уравнения Орра — Зоммерфельда, а операторы $F^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ содержат члены $\partial^m a / \partial x^{m-j} \partial \alpha^j$.

Из (11) можно получить условие существования цугов в непараллельном потоке. Если начальное возмущение представляется узким (в α) пакетом $a \sim \exp(-\Delta \alpha^2 z^2 / 2)$, $\Delta \alpha \sim z^{-1} \sim \mu \ll 1$, то

$$(13) \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} \sim \frac{\partial a}{\partial \omega} \sim z a \sim \mu^{-1} \quad \text{и} \quad 1 > \frac{\partial a}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \sim \frac{\nu}{\mu} > \nu.$$

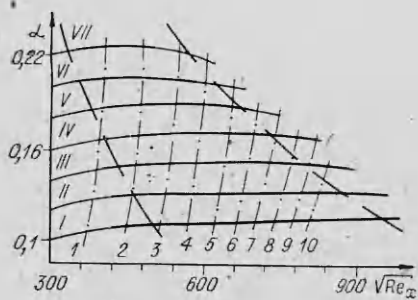
Тогда (11) в первом приближении принимает вид $\partial a / \partial \alpha = 0$, $a = a(\omega)$ и возмущение представляется квазигармонической волной с $\omega_S = \omega(\alpha, \rho) = \text{const}$, $\psi = a_S \varphi_S(y, \rho) \exp i\theta_S$ и фазой $\theta_S = -\omega_S t + \int \alpha_S dx$, $\alpha_S = \alpha(\omega_S, \rho)$.

Задача сводится к учету влияния непараллельности ($\nu > 0$) и конечности спектральной ширины цуга ($\mu^{-1} < \infty$) на его эволюцию в пространстве (x, t) [7, 8, 12, 13, 21]. Решение можно найти разложением по двум параметрам (μ, ν) [8, 12], оно имеет смысл при условии (13) $\nu < \mu$. Последнее означает, что ширина пакета $z \sim \Delta \alpha^{-1}$ должна оставаться больше характерной $\lambda = \alpha^{-1}$, но много меньше масштаба неоднородности ν^{-1} [18].

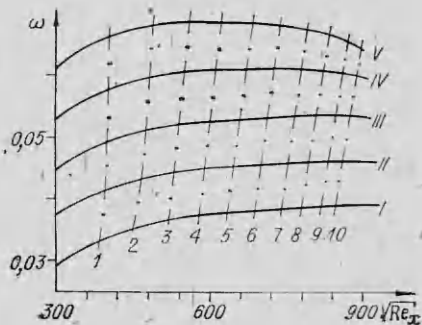
Характеристики (11) $dx/dt = \partial \omega / \partial \alpha$, $d\alpha/dt = \partial \omega / \partial x$; $da/dt = \gamma - H_r$ отличаются от случая цугов [7, 13, 21] из-за отсутствия закона сохранения ω .

Результаты расчетов в некотором диапазоне параметров движения даны на фиг. 1—4.

Вид траекторий $\alpha_j = \alpha(\alpha_{j0}, x)$ при $d\alpha/dx = (\partial \omega / \partial x) (\partial \omega / \partial \alpha)^{-1}$, $\sqrt{\text{Re} x_0} = 300$, $\alpha_j(x_0, \alpha_{j0}) = \alpha_{j0} = 0,1; 0,12; 0,14; 0,16; 0,18; 0,20; 0,22$ показан на фиг. 1 (линии I — VII соответственно). Штриховыми линиями нанесено положение нейтральных кривых квазинепараллельной теории



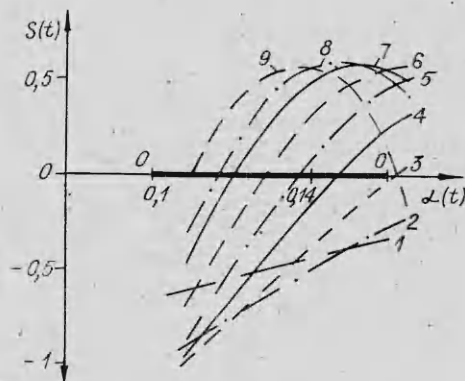
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

(обезразмеривание проводилось по масштабу $U_\infty \delta^2/\nu$ с $\delta^2 = \nu x/U_\infty$ таким, что $Re = \delta U_\infty/\nu = \sqrt{Re_x} = 600$). Линиями $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ отмечено положение точек в различные моменты $t_n = n \cdot 0,125$ при начальных условиях $\alpha = \alpha_{j0}$, $\sqrt{Re_x} = \sqrt{Re_{x_0}}$ ($n = 0$).

Соответствующее поведение ω и $S = \ln a$ вдоль $\alpha_j(\alpha_{j0}, x)$ представлено на фиг. 2, 3; положение нейтральных точек нарастания практически не отличается от даваемых «непараллельной» теорией [2]. Деформация спектра (по α) в различные моменты t_n (линии $n - n$) характеризуется зависимостью $S(t) = S(\alpha(t))$, представленной на фиг. 4. Отмечается смещение в длинноволновую область колебаний.

Случай пространственных (трехмерных возмущений) потока легко обобщается в рамках данного подхода.

Таким образом, поле возмущенного произвольным образом пограничного слоя может быть прослежено вниз по течению. С другой стороны, по известному в $x > x_0$ распределению восстанавливается начальный спектр. Последнее может быть использовано для оценки области перехода. Действительно, если известны характерные параметры движения в переходной зоне, то восстановленный вверх по потоку спектр можно сравнить с реальным (измеренным) и указать критическую траекторию $\alpha_j(x, \alpha_{j0})$ и значение $x_{п}$ перехода. При этом подразумевается, что нелинейные эффекты существенны на малых интервалах x , а турбулизация обусловлена «внутренним» развитием неустойчивости [2, 16, 17]. Для каждого класса потоков критическая интенсивность каждого значения $\omega(\alpha_{j0}, x_0)$ может быть затабулирована.

Возможные соображения об условиях в переходной зоне могут быть сформулированы на основе представлений о двух типах процесса [2, 22—24]. В [23] получены данные о переходе, связанном с возбуждением пространственных субгармоник волн ТШ. Другой тип (Клебановский), на наш взгляд, является результатом развития волн с нелинейным критическим слоем и их дальнейшего разрушения [24, 25]. Важно, что в обоих случаях эффективно, нелинейные явления проявляются в окрестности верхней ветви кривой нейтральной устойчивости $\alpha_k = \alpha(x)$ при интенсивностях колебаний $O(10^{-2})$. Выбирая $a(x_k, \alpha_j(x_k)) \approx 10^{-2}$, найдем

$a(x_0, \alpha_{j0}) = a_j(x_k) \exp - S_j(x_0, x_k)$ и $\omega(x_0, \alpha_{j0})$ из (20), (21) в сечении x_0 . Сравнивая измеренный и рассчитанный критический спектры, определяем траекторию $\alpha_j(x)$ и точку ее пересечения $\alpha_k(x_k) = \alpha_j(x_k, \alpha_{j0})$. В известном смысле, такой подход объединяет «метод e^n » [2, 16], где рассчитываются нарастания (но не амплитуды) до некоторого положения на верхней ветви нейтральной кривой, и «амплитудный метод», связывающий точку перехода только с величиной интенсивности [2, 17]. Очевидно, что для «замкнутости» применения критерия желательно установить соответствие начального спектра с его источниками, т. е. решение задачи восприимчивости (см., например, [2, 15]).

В заключение авторы выражают благодарность В. Я. Левченко за внимание и полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетчев Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Дрыжов А. С. Об устойчивости сжимаемого пограничного слоя относительно локального возмущения.— ПМТФ, 1973, № 3.
4. Gustavsson L. H. Initial-value problem for boundary layer flows.— Phys. Fluids, 1979, vol. 22, N 9.
5. Gaster M. Propagation of linear wave packets in laminar boundary layers.— AIAA J., 1981, vol. 19, N 4.
6. Gaster M. The development of a two-dimensional wavepacket in a growing boundary layer.— Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A., 1982, vol. 384, p. 317.
7. Itoh N. Linear stability theory for wavepacket disturbances in parallel flows.— In: Laminar-turbulent transition/Ed. R. Eppler, H. Fasel. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
8. Nayfeh A. H. Three-dimensional stability of growing boundary layers.— Ibid.
9. Benney V. J., Maslow S. A. The evolution in space and time of non-linear waves in parallel shear flows.— Stud. Appl. Math., 1975, vol. 54, N 3.
10. Cebeci T., Stewartson K. On stability and transition of threedimensional flows.— AIAA J., 1980, vol. 18, N 4.
11. Grosch C. E., Salwen H. The continuous spectrum of Orr — Sommerfeld equation. Pt 1.— J. Fluids Mech., 1978, vol. 87, N 1.
12. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в слабонеоднородных потоках несжимаемого газа.— В кн.: Гидродинамика и физическая кинетика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1974. Зельман М. Б., Какоткин А. Ф. О слабонелинейной устойчивости непараллельных пограничных слоев.— ЧММСС, 1982, т. 13, № 3.
13. Чин В. К. Влияние диссипации и дисперсии на распространение медленно изменяющихся пучков волн.— РТК, 1980, т. 18, № 4.
14. Тумин А. М., Федоров А. В. Возбуждение волн неустойчивости в пограничном слое на вибрирующей поверхности.— ПМТФ, 1983, № 3.
15. Жигулев В. Н. О возбуждении и развитии неустойчивостей в трехмерных стационарных пограничных слоях.— ПМТФ, 1983, № 4.
16. Reshotko E. Remark on engineering aspects of transition.— In: Transition and turbulence. N. Y.: Acad. Press, 1981.
17. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.— В кн.: Модели мех. сплош. среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983.
18. Михайловский А. Б. Теория плазменной неустойчивости. Т. 1. М.: Атомиздат, 1970.
19. De Coninck F., Guiraur J. P., Zeytonian R. Kh. A short look at non-linear hydrodynamic stability theory.— Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 36, pt 1.
20. Рабинович М. И., Штильман Л. Е. О самовоздействии и взаимодействии волн с непрерывным спектром в слабонелинейных средах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, № 11.
21. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964, № 4.
22. Volodin A. G., Zelman M. B. On the nature of differences of some forms of transition in the boundary layer.— AIAA J., 1981, vol. 19, N 7.
23. Зельман М. Б., Масленникова И. И. Резонансное возбуждение пространственных возмущений в пограничном слое.— В кн.: Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
24. Зельман М. Б. Развитие возмущений конечной интенсивности в параллельных потоках. Препринт № 10—81. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
25. Реутов В. П. Нелинейная стадия двумерной неустойчивости в пограничном слое. Препринт 57. Горький: ИПФ АН СССР, 1982.

Поступила 29/XI 1983 г.