

УДК 550.834

Численное решение обратной задачи для уравнений Максвелла с использованием функций Лагерра

А.Ф. Мاستрюков

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: maf@omzg.sccc.ru

Мастрюков А.Ф. Численное решение обратной задачи для уравнений Максвелла с использованием функций Лагерра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 325–335.

В работе рассматривается решение обратной задачи оптимизационным методом с использованием функций Лагерра. Численные расчеты проводятся для уравнений Максвелла в одномерной постановке в волновом и диффузионном приближениях. По известному решению в некоторой точке пространства ищется распределение диэлектрической проницаемости и проводимости среды. Минимизируется функция от гармоник Лагерра. Минимизация проводится методом сопряженных градиентов.

Приводятся результаты определения диэлектрической проницаемости и проводимости. Исследуется влияние формы источника электромагнитных волн и его спектра на точность решения обратной задачи. Сравниваются точность решения обратной задачи при использовании широкополосного и гармонического источников электромагнитных волн.

Ключевые слова: *численный алгоритм, уравнения Максвелла, электромагнитные волны, проводимость, обратная задача, метод Лагерра, конечно-разностный метод, система линейных уравнений, точность.*

Masteryukov A.F. The numerical solution of the inverse problem for Maxwell's equations based on the Laguerre functions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 325–335.

The inverse problem is solved by an optimization method using the Laguerre functions. Numerical simulations are carried out for the one-dimensional Maxwell's equations in the wave and diffusion approximations. Spatial distributions of permittivity and conductivity of the medium are determined from a known solution at a certain point. The Laguerre harmonics function is minimized. The minimization is performed by the conjugate gradient method. Results of determining permittivity and conductivity are presented. The influence of shape and spectrum of a source of electromagnetic waves on the accuracy of solution of the inverse problem is investigated. The accuracies of the solutions with a broadband and a harmonic sources of electromagnetic waves are compared.

Key words: *numerical algorithm, Maxwell's equations, electromagnetic wave, conductivity, inverse problem, the Laguerre method, finite difference, linear equations, accuracy.*

1. Введение

Одним из самых распространенных методов численного решения обратных задач для дифференциальных уравнений является оптимизационный метод [1, 2]. В основе метода лежит минимизация некоторой целевой функции по искомым параметрам. Эта целевая функция строится как функция известного решения дифференциального уравнения в некоторой подобласти решения или некоторой точке области решения. Для минимизации целевой функции используются итерационные методы. Здесь в основном используются градиентные методы, где необходимо вычислять первую производную, а иногда и

вторую производную целевой функции. Как правило, вычисление производных является самой трудоемкой операцией и зачастую занимает более 90 % времени решения обратной задачи.

Оптимизационный метод применяется для уравнений разных типов. Для волнового уравнения и уравнения диффузии гиперболического и параболического типа соответственно он используется и во временной, и в частотной области. Но в основном оптимизационный метод используется в частотной области [3], поскольку здесь производная целевой функции вычисляется значительно проще, чем во временной области.

Обычно при решении обратной задачи в частотной области используется преобразование Фурье по времени [3], и уравнение сводится к краевой задаче для гармоник Фурье. Здесь минимизируется уже целевая функция от гармоник Фурье. При этом зачастую требуется многократное решение краевой задачи для каждой гармоники Фурье на каждом шаге итерации. Естественно, это ведет к большим вычислительным затратам.

Для повышения эффективности решения обратной задачи был предложен метод [4, 5], основанный на спектральном преобразовании Лагерра. Он не уступает по точности методу, использующему преобразование Фурье. Этот метод дает более экономичный способ вычисления гармоник решения.

Это основывается на свойстве самого преобразования Лагерра. Оно состоит в том, что производная от функции при преобразовании Лагерра переходит в сумму младших гармоник функции [4, 5], но явно не зависит от номера гармоники. Если провести преобразование Лагерра дифференциального уравнения по времени, то для гармоник решения получим универсальный, не зависящий от номера гармоники, вид уравнений. Номер гармоники будет содержаться только в правой части получившихся уравнений. Для определения всех гармоник в этом случае достаточно только один раз вычислить обратный оператор [4, 5].

Метод решения задач, основанный на преобразовании Лагерра по временной переменной, был использован для уравнений теории упругости и для уравнений Максвелла. Как в одномерной постановке, так и в двумерной постановке он показал высокую эффективность в сравнении с методом, основанном на преобразовании Фурье.

Еще одним отличием преобразования Лагерра от преобразования Фурье является вид функций Лагерра [6], по которым производится разложение. В преобразовании Фурье используются периодические функции синус и косинус. Функции Лагерра не являются периодическими, и они по существу конечны только на конечном промежутке. Вне этого промежутка значений аргумента они экспоненциально малы. По этой причине спектр Лагерра для функций, имеющих вид коротких единичных импульсов, уединенных волн, зачастую оказывается существенно уже спектра Фурье этой функции.

Если решение дифференциального уравнения имеет вид уединенных волн, то для его представления можно использовать меньше гармоник Лагерра, чем гармоник Фурье. Это может давать сокращение числа операций при численном решении задачи. Поскольку при решении обратных задач оптимизационным методом необходимо вычислять производную от каждой гармоники, то это может давать значительное повышение эффективности решения в сравнении с методом Фурье.

Однако в численном счете и в практической работе лучше использовать источники волн, дающие импульс, имеющий широкий спектр Фурье. Определить строение среды можно лишь при достаточно большой величине отраженной от среды волны, большей по сравнению с различными помехами, погрешностями измерения и погрешностями вычисления. Но известно [7], что наиболее сильно отражаются волны, длина которых сравнима или близка характерному размеру неоднородности среды. Поэтому для исследова-

ния сложно построенных сред, где присутствуют неоднородности разных характерных размеров, лучше использовать источники волн, генерирующие зондирующий импульс, имеющий широкий спектр Фурье [8, 9]. Но учет большого числа гармоник ведет к понижению эффективности численного алгоритма.

Совместить высокую эффективность численного алгоритма и широкий спектр Фурье зондирующей волны можно, если в качестве широкополосного импульса использовать импульс в форме функции ряда Лагерра. Такая функция имеет широкий спектр Фурье, но представлена одной гармоникой Лагерра. Это можно использовать для повышения эффективности численного алгоритма, что и было предпринято в этой работе.

В настоящей работе рассматривается численное решение обратной задачи для одномерных уравнений Максвелла, основанное на спектральном преобразовании Лагерра. По известному решению уравнений в некоторой точке пространства ищется распределение электромагнитных параметров среды. Используется оптимизационный метод решения. Минимизируется функция от гармоник Лагерра. Минимизации проводятся методом сопряженных градиентов.

Численное решение обратной задачи оптимизационным методом сводится к многократному численному решению прямой задачи и выбору решения обратной задачи по некоторым критериям. По существу численное решение обратной задачи оптимизационным методом производится методом перебора. Естественно, здесь не рассматриваются теоретические вопросы решения обратных задач. Приводятся результаты численных экспериментов.

Конкретные результаты приведены для параметров среды и электромагнитных волн, характерных для задач геофизики в двух предельных случаях. В случае высоких частот, когда проводимостью среды можно пренебречь, уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению. Здесь решается обратная задача определения диэлектрической проницаемости среды. И в случае низких частот, когда можно пренебречь током смещения, уравнения Максвелла сводятся к уравнению диффузии. Здесь решается обратная задача определения проводимости среды.

Приводятся результаты определения электромагнитных параметров среды в зависимости от формы и спектра источника электромагнитных волн. Сравняется точность решения обратной задачи при использовании широкополосного и гармонического источника электромагнитных волн. В качестве широкополосного импульса используются импульс в виде функции ряда Лагерра.

Результаты расчетов показывают, что решение обратной задачи при использовании широкополосного импульса в виде функции ряда Лагерра всегда дает более точное решение обратной задачи в сравнении с использованием гармонических импульсов. Это достигается как для волнового уравнения, так и для уравнения диффузии.

2. Основные уравнения

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля [7] имеют вид:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{J}_s, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

где \vec{H} — напряженность магнитного поля, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ — электрическая индукция, $\vec{J}_s = (J_x, J_y, J_z)$ — ток внешнего источника, $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ — магнитная индукция.

Будем полагать, что магнитная проницаемость μ среды постоянна во времени и пространстве, а диэлектрическая проницаемость среды ε и проводимость среды σ зависят от одной пространственной переменной z . Рассмотрим модельную задачу распространения плоской волны в такой среде.

В одномерном случае уравнения Максвелла (ТЕ-мода) принимают вид:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (3)$$

Преобразование Лагерра возьмем в форме

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (4)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n u_n^\alpha(ht), \quad (5)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [6] степени n :

$$\int_0^\infty l_n^\alpha(ht) l_m^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{nm} \frac{(n+\alpha)!}{n!}, \quad u_n^\alpha(x) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht), \quad (6)$$

α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

Применим преобразование (4) к системе уравнений (2), (3). В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля:

$$\frac{\partial H_{nx}}{\partial z} = \frac{h}{2} \varepsilon E_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{ky} + \sigma E_{ny} + J_{ny}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_{ny}}{\partial z} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right). \quad (8)$$

Будем рассматривать эту систему уравнений, полагая, что гармоники электромагнитного поля принимают нулевые значения на границах области решения $[-\infty, +\infty]$.

Систему уравнений (7), (8) для n -й гармоники U_n можно записать в виде:

$$AU_n = F_n, \quad (9)$$

где оператор A не зависит от номера гармоники. От номера гармоники зависит правая часть F_n , куда входят младшие гармоники.

В случае конечно-разностного метода решения уравнения (7), (8) оператор A является матрицей системы алгебраических уравнений. Тогда обратную матрицу достаточно вычислить только один раз, и все гармоники решения получаются умножением одной матрицы $B = A^{-1}$ на правую часть F_n .

Обычно при решении такой системы уравнений обращение матрицы является самой трудоемкой операцией. Поскольку здесь обратная матрица вычисляется один раз, то это дает высокую эффективность алгоритма, использующего преобразование Лагерра, в сравнении с алгоритмом, использующим преобразование Фурье.

Отметим, что для гармоник Лагерра формально выполняются соотношения, аналогичные соотношениям для Фурье-гармоник. В рамках волнового уравнения для гармоник Лагерра при больших h , как и для высокочастотных гармоник Фурье, можно получить аналог и параболического приближения, и лучевого приближения [7]. Так, если

при малой проводимости в уравнениях (7), (8) решение для гармоники E_n представить в виде $E_n = V_n \exp(h\psi/2)$, то для ψ можно получить уравнение эйконала.

3. Постановка задачи

Пусть в пространстве область $z < 0$ — однородное полупространство (область $0 \leq z \leq L$ — слоистая среда), состоящее из P_0 горизонтально-однородных слоев. Каждый слой характеризуется диэлектрической проницаемостью ε и проводимостью σ . Ниже P_0 -го слоя полупространство однородно. В точке $z = z_s$ расположен точечный источник тока J_s .

Пусть на поверхности $z = 0$ известно N гармоник электромагнитного поля: $E_{pn} = E_{ny}(z = 0)$ и $H_{pn} = H_{nx}(z = 0)$, соответствующих распределению диэлектрической проницаемости $\varepsilon_p(z)$ и проводимости $\sigma_p(z)$, значения которых на промежутке от $z = 0$ до $z = L$ необходимо определить. Толщина слоев полагается неизвестной.

Определим величину

$$F = \sum_{n=1}^N |E_n - E_{pn}|^2 + |H_n - H_{pn}|^2, \tag{10}$$

где $E_n = E_{ny}(z = 0)$ и $H_n = H_{nx}(z = 0)$ — решения уравнений (7), (8) для некоторого распределения параметра $m(z)$. Это может быть либо диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$, либо проводимость $\sigma(z)$ при известном другом параметре. Полагается, что $m(z)$ является кусочно-постоянной функцией на промежутке от $z = 0$ до $z = L$ и определена в P слоях равной толщины.

Будем искать распределение по z параметра $m_p(z)$, минимизируя функционал F по значениям $m(z)$ в P точках. Для минимизации функционала будем использовать метод сопряженных градиентов [1, 2].

Пусть функционал $F = F(\vec{m})$ является функцией P переменных $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)$. Тогда разложение этого функционала в точке \vec{m} в ряд Тейлора по приращению $\Delta\vec{m}$ запишется в виде

$$F(\vec{m} + \Delta\vec{m}) = F(\vec{m}) + \nabla F(\vec{m})\Delta\vec{m}, \quad \Delta\vec{m} = (\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_p). \tag{11}$$

В этих обозначениях метод сопряженных градиентов записывается в виде [1, 2]:

$$\vec{m}^{l+1} = \vec{m}^l + \alpha^l \vec{S}^l, \quad \vec{S}^l = -\nabla F(\vec{m}^l) + \beta^l \vec{S}^{l-1}, \tag{12}$$

$$\alpha^l = \arg \min_{\alpha} (F(\vec{m}^l + \alpha \vec{S}^l)), \tag{13}$$

где l — номер итерации, \vec{m}^l — значение параметра \vec{m} на итерации l . Он требует вычисления только первых производных функционала на каждом шаге итераций. Формула (13) означает использование на каждом шаге итераций процедуры одномерной минимизации.

Существуют разные варианты вычисления величины β^l , но здесь использовалась формула

$$\beta^l = \frac{(\nabla F^l \cdot (\nabla F^l - \nabla F^{l-1}))}{(\nabla F^l)^2}. \tag{14}$$

Производные функционала будем вычислять по методу, изложенному в [1]. Представив систему уравнений (7), (8) в виде:

$$\frac{du}{dz} = f(u, m). \tag{15}$$

Тогда первую производную функционала можно вычислить по формуле

$$\delta F = \int_0^L (f_m^* \varphi, \delta m) dz, \quad (16)$$

где φ есть решение сопряженного уравнения

$$\frac{d\varphi}{dz} - f_u^* \varphi = \delta(z). \quad (17)$$

Для вычисления функционала F по N гармоникам необходимо N раз решать систему уравнений (7), (8). Ясно, чем шире спектр решения уравнения, чем больше гармоник в спектре решения уравнения, тем больше объем вычислений. Если использовать в обратной задаче только часть гармоник, только часть спектра решения, это может приводить к потере точности решения обратной задачи. Поэтому для повышения эффективности алгоритма численного решения необходимо использовать такие спектральные разложения, которые наиболее точно представляли бы решение уравнения и имели бы наиболее узкий спектр.

Спектр решения уравнений Максвелла (1) задается спектром источника электромагнитных волн J_s . На практике в геофизике, экологии, оптике и т. д. часто используют гармонические источники, работающие на одной частоте. Ясно, что такой источник представляет одна гармоника в Фурье-разложении, и решать обратную задачу для такого источника надо, используя преобразование Фурье.

Однако достаточно часто используют импульсные источники сигнала. Наиболее точно такие источники представляются разложением Лагерра в сравнении с разложением Фурье. Это связано с видом функций, по которым производится разложение. Функции в разложении Фурье — это периодические функции синус и косинус, а функции в разложении Лагерра имеют вид, близкий к виду самого импульса. Как правило, спектр Лагерра короткого импульса уже спектра Фурье этого импульса.

4. Свойства функций Лагерра

Функция Лагерра $l_n^\alpha(x)$ степени n — это осциллирующая функция [6], определенная на промежутке от нуля до бесконечности. Она принимает нулевые значения в $n + 1$ точках, в том числе в точках на границах области определения. Конечной эта функция является только на промежутке от 0 до x_k , где $x_k \sim 2(2n + \alpha + 1)$. При $x > x_k$ функция экспоненциально мала и имеет вид

$$l_n^\alpha(x) \sim a_n^\alpha x^{\frac{1}{2}} \exp(-x/2), \quad a_n^\alpha = \text{const}. \quad (18)$$

Поскольку функции Лагерра конечны только на некотором промежутке, то функции $u_n^\alpha(x) = (x)^{\alpha/2} l_n^\alpha(x)$ в разложении (5) имеют вид уединенных импульсов, уединенных волн. Соответственно и ряд Лагерра (5) представляет сумму уединенных волн. Вид функций $l_n^\alpha(x)$ существенно отличает разложение (4) от разложения Фурье, где функции синус и косинус — периодические функции. В отличие от метода Фурье “гармонический” импульс в методе Лагерра — это уединенный импульс.

На рис. 1а, 1б, 1в приведены несколько функций $u_n^\alpha(x) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht)$ ряда (5) при различных значениях n и α .

На рис. 1а показана функция $u_n^\alpha(x)$ с $n = 5$ и $\alpha = 0$, которая при $x = 0$ равна 1. На рис. 1б показана функция с $u_n^\alpha(x)$ с $n = 10$ и $\alpha = 1$. Для сравнения на рис. 1в приведен вид функции, часто используемой в расчетах в качестве формы импульса внешнего источника тока

$$f(x) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(x-x_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(x-x_0)), \quad (19)$$

где f_0 — несущая частота источника, x_0 — момент центра импульса источника. Это монохроматический импульс с модуляцией амплитуды. Для краткости будем называть его гармоническим импульсом.

Расстояние между нулями этой функций постоянно на всем промежутке x . Чем слабее модуляция амплитуды (большие значения γ), тем уже спектр Фурье такого импульса.

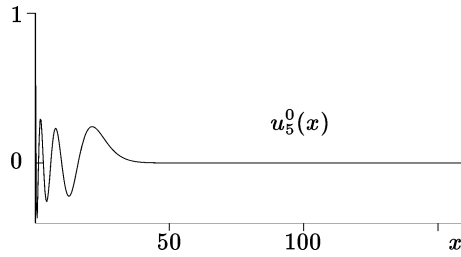


Рис. 1а. Функция ряда Лагерра $u_n^\alpha(x)$, $n = 5, \alpha = 0$

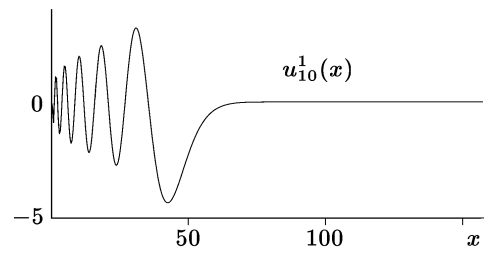


Рис. 1б. Функция ряда Лагерра $u_n^\alpha(x)$, $n = 10, \alpha = 1$

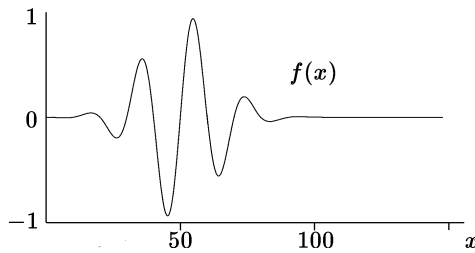


Рис. 1в. Гармонический импульс с огибающей амплитудой — функция $f(x)$

Поскольку нули функции $u_n^\alpha(x)$ совпадают с нулями функции $l_n^\alpha(x)$, то она имеет $n + 1$ нулей. Расстояние между двумя нулями δx_m функции с номером n ряда (5) растет линейно с ростом x :

$$\delta x_m \approx m/(n + 0.5(\alpha + 1)), \quad (20)$$

где m — номер нуля от начала координат и $1 \leq m \leq n$. Если рассматривать спектр Фурье-функции с номером n ряда (5), то в ней существенны гармоники с частотами, отличающимися в n раз. Так, в импульсе, показанном на рис. 1б, существенны гармоники Фурье с частотами, отличающимися в 10 раз. Практически все функции ряда Лагерра, за исключением первых двух–трех, имеют широкий спектр Фурье. Исходя из формулы (20), можно оценить характерные пределы Фурье-спектра функций $u_n^\alpha(x)$.

Отметим некоторые эти характерные пределы Фурье-спектра функций $u_n^\alpha(x)$ при малых значениях α . При $n \gg \alpha$ все функции $u_n^\alpha(x)$ имеют одну нижнюю границу Фурье-спектра, которая в этом случае определяется величиной $\delta x_n \approx 1$. Верхняя граница пропорциональна номеру функции и определяется величиной $\delta x_1 \approx 1/n$. Это значит, что спектр функций с большими n шире спектра функций с меньшими n и включает его.

Вид функций $u_n^\alpha(x)$ и их спектр Фурье существенно меняется в зависимости от параметра α . Так, при увеличении α в спектре подавляются высокие гармоники, спектр Фурье становится уже. Сумма или разность двух функций $u_n^\alpha(x)$ с близкими номерами n также существенно различаются и по форме, и по спектру. Используя здесь весовые коэффициенты с функциями, можно добиться большого разнообразия вида комбинаций функций.

Имеющиеся источники электромагнитных волн могут производить сигналы различной формы [8, 9]. Если используется гармонический источник, работающий на одной частоте Фурье, то такую задачу естественно решать методом Фурье. Если источник не является периодическим или имеет вид уединенного импульса, то он точнее аппроксимируется рядом Лагерра, чем рядом Фурье при одинаковом числе гармоник. Широкополосный импульс точнее аппроксимируется “широкополосными” функциями ряда Лагерра. Здесь можно использовать меньшее число гармоник.

Точнее аппроксимируется рядом Лагерра ступенчатая функция Хевисайда [6]. Эта функция моделирует мгновенное включение или выключение постоянного тока. Зондирование становлением тока применяется в разведочной геофизике [8].

Источник в форме (19) имеет вид, близкий к функции ряда Фурье. Аналогично методу Фурье можно рассматривать источник, имеющий форму функций ряда Лагерра (5). В этом случае естественно задачу решать методом Лагерра.

5. Результаты численных расчетов

В численных расчетах оценивались точность и эффективность решения обратной задачи оптимизационным методом при использовании спектрального разложения Лагерра в зависимости от формы импульса и ширины Фурье-спектра источника электромагнитных волн.

Источник тока в уравнениях (2) брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s), \quad (21)$$

где z_s — точка расположения источника.

Вид импульса $f(t)$ брался в виде функций $u_n^\alpha(ht)$ из ряда (5) и их комбинаций и в виде гармонической функции с огибающей (19).

Система уравнений (7), (8) решалась конечно-разностным методом. Производные по пространству аппроксимировались центральными разностями с высоким порядком точности по шагу сетки. Использовались аппроксимации 2-го, 4-го, 6-го и 8-го порядков точности. Результаты, использующие 4-й, 6-й, 8-й порядки аппроксимации, давали сопоставимые результаты. Точности 2-го порядка аппроксимации производных недостаточно для решения этой задачи. Конкретные формулы аппроксимации пространственных производных взяты из работы [10].

Чтобы уменьшить влияние отражения от границ области решения, ее размер брался большим. Источник тока и слоистая среда, где определялись электромагнитные параметры, располагались в центре области решения. Слоистая среда занимала менее одной десятой части области решения. Кроме этого, на промежутке в 1–2 длины волны у границ задавались такие значения проводимости среды, которые обеспечивали большое поглощение и падение амплитуды волны в 10–30 раз на этом промежутке.

Это, вместе с большим размером области решения, давало малую величину поля на границе и практически исключало влияние отраженной от границ волны. Большое поглощение у границ существенно для волнового характера распространения электромагнитного поля.

В случае диффузионного характера распространения поля, когда поглощение велико во всей области решения, проблем с отражением от границ нет, поскольку величина поля у границ оказывается очень малой.

Большая область решения и малая величина поля позволяют использовать нулевые значения поля на границе.

Параметры среды определяются на промежутке $[0, L]$. Для оценки точности решения использовалась относительная невязка решения

$$Q = \int_0^L \frac{|\varepsilon(z) - \varepsilon_p(z)|}{\varepsilon_p} dz. \quad (22)$$

Все результаты получены при ограниченном числе итераций. Это не предельная точность определения параметров среды, продолжая итерации, можно получить более точные решения.

Исследовалась точность решения задачи при использовании в функционале (10) относительно небольшого числа гармоник Лагерра: от 2 до 50 гармоник. Расчеты проводились при разных значениях параметров α , h в уравнениях (7), (8). На приведенных здесь графиках они получены при $\alpha = 1$, $h = 25$. На графиках сплошной линией показано точное решение, штриховой — численное решение.

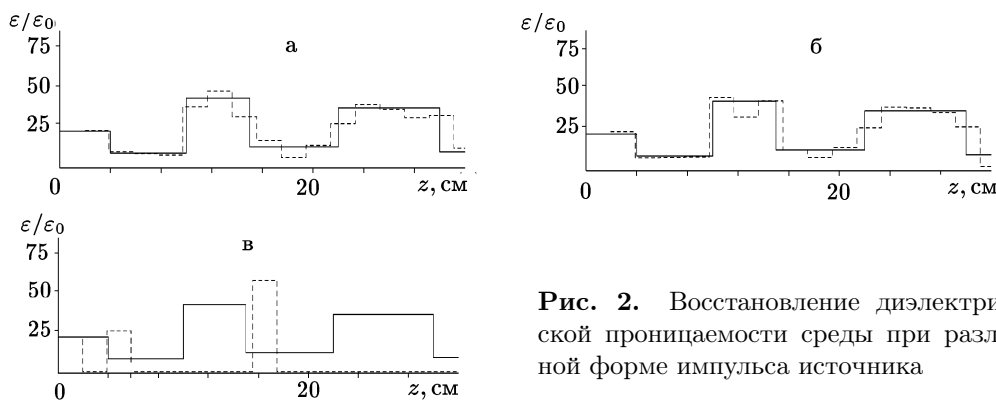


Рис. 2. Восстановление диэлектрической проницаемости среды при различной форме импульса источника

На рис. 2 приведены результаты определения диэлектрической проницаемости среды в пределах высоких частот от 50 МГц до 1 ГГц. В этой области частот распространение поля носит волновой характер. Предполагается, что проводимость известна, постоянна в пространстве и мала: $\sigma = 0.001$ См/м, $\mu = \mu_0$, ε_0 и μ_0 — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума соответственно. Результаты получены после выполнения 200 итераций, диэлектрическая проницаемость среды определялась в 19 пространственных точках промежутка $[0, L]$.

На рис. 2а показаны результаты восстановления диэлектрической проницаемости, когда импульс тока имел вид функции ряда Лагерра (5) с номером $n = 10$. Эта функция изображена на рис. 1б. Основная часть спектра Фурье этого импульса лежит в пределах $100 \text{ МГц} \div 1 \text{ ГГц}$. Использовалось 25 гармоник Лагерра: от $n = 10$ до $n = 35$, младшие гармоники $n < 10$ здесь равны нулю в силу выбранной формы импульса.

На рис. 2б показаны результаты восстановления диэлектрической проницаемости, когда импульс тока имел вид гармонического импульса (19) с модуляцией амплитуды. Основная несущая частота этого импульса составляла 120 МГц. Эта функция изображена на рис. 1в. Длительность импульса была близка к длительности импульса, показанного на рис. 2а. Использовалось 35 гармоник Лагерра: от $n = 1$ до $n = 35$.

Относительная погрешность восстановления Q диэлектрической проницаемости (22) на рис. 2а и рис. 2б близка. Но результат на рис. 2б получен перебором несущей частоты гармонического импульса. Это лучшая точность восстановления для гармонического импульса, полученная в пределах от 50 МГц до 1 ГГц.

В случае, изображенном на рис. 2а, ситуация иная. Точность определения диэлектрической проницаемости практически не зависит от номера функции, использованной как

формы импульса. Расчеты для функций с номерами от $n = 4$ и до $n = 20$ дают близкие результаты. Точность восстановления падает лишь при номерах $n < 4$. Такая закономерность дает простой способ выбора формы импульса. Достаточно взять относительно высокую гармонику Лагерра, а в случае гармонического импульса надо тщательно подбирать несущую частоту.

Для сравнения на рис. 2в приведены результаты определения диэлектрической проницаемости для гармонического импульса (19), несущая частота которого отличается от случая, изображенного на рис. 2в, на 20 %. Распределение $\varepsilon_p(z)$ не восстанавливается, не определяется даже самый верхний слой.

Расчеты с использованием импульса в форме функции $u_n^\alpha(ht)$ еще и экономичнее — здесь нет необходимости вычислять гармоники с номерами меньше n . Это же демонстрирует решение обратной задачи для уравнения диффузии.

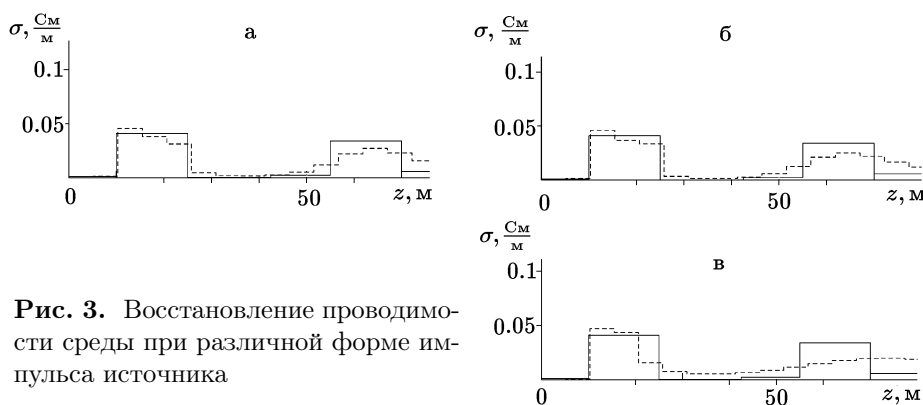


Рис. 3. Восстановление проводимости среды при различной форме импульса источника

На рис. 3 показаны результаты определения проводимости среды в пределах низких частот от 1 КГц до 100 КГц. В этой области частот величина тока смещения в уравнениях Максвелла много меньше тока проводимости, распространение поля носит характер диффузии.

Полагается, что диэлектрическая проницаемость известна и постоянна в пространстве: $\varepsilon = 7.5\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, ε_0 и μ_0 — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума соответственно. Здесь в расчетах выполнено 300 итераций, проводимость определялась в 17 пространственных точках промежутка $[0, L]$.

Качественно различие между гармоническим импульсом и импульсом в форме функции ряда Лагерра в случае определения проводимости аналогичны предыдущему случаю определения диэлектрической проницаемости.

На рис. 3а показаны результаты восстановления проводимости, когда импульс тока имел форму функции $u_n^\alpha(ht)$ с $n = 3$, $\alpha = 1$. На рис. 3б показаны результаты восстановления проводимости, когда импульс тока имел форму функции $u_n^\alpha(ht)$ с $n = 20$, $\alpha = 1$. Видно, что точность определения проводимости в этих двух случаях практически совпадает, хотя форма и длительность импульсов существенно различны. Такая же картина восстановления получается для других промежуточных форм $u_n^\alpha(ht)$, промежуточных значений n .

Нижняя граница основного спектра Фурье частот у этих импульсов одинакова и находится около значения 10 КГц, верхняя граница различается. Согласно формуле (20), эта граница двух функций пропорциональна отношению номеров n функций: для $n = 3$ это 30 КГц, для $n = 20$ это 200 КГц.

На рис. 3в приведено решение обратной задачи при гармоническом импульсе (19) источника. Это решение также получено перебором частот импульса. Оно получено при

несущей частоте импульса $f_0 = 14$ КГц. Это наилучшая точность восстановления, но существенно ниже широкополосного случая. Здесь не определяется второй, более глубокий по z , высокопроводящий слой. Хотя здесь использовалось 35 гармоник Лагерра: от $n = 1$ до $n = 35$, а это больше, чем в случаях, изображенных на рис. 3а и рис. 3б.

Были проведены расчеты при других значениях α . При больших значениях α подавляется высокочастотная часть Фурье-спектра функций $u_n^\alpha(ht)$, и уже при $\alpha \geq 3$ происходит падение точности решения обратной задачи как для волнового уравнения, так для уравнения диффузии.

Рассматривалась обратная задача, когда импульс источника имел прямоугольную форму. Это также широкополосный импульс, и в этом случае также достигалась более высокая точность решения задачи, чем в случае гармонического импульса.

Заключение

Использование при решении обратных задач для волнового уравнения и уравнения диффузии, основанных на спектральном преобразовании Лагерра, источников волн, генерирующих импульс, имеющий широкий спектр Фурье, позволяет получить более высокую точность определения искомых параметров уравнений в сравнении с монохроматическим источником. Более высокая экономичность алгоритма может быть достигнута, когда импульс имеет форму функции ряда Лагерра. При этом точность определения искомых параметров задачи слабо зависит от номера функции ряда Лагерра.

Литература

1. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
2. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
3. **Newman G.A., Alumbaugh D.L.** Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients // Geophysical J. International. — 2000. — Vol. 140, № 3. — P. 410–424.
4. **Мастрюков А.Ф.** Решение обратной задачи для уравнения диффузии на основе спектрального преобразования Лагерра // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 9. — С. 15–26.
5. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Решение обратной задачи для волнового уравнения на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика. — 2007. — Т. 44, № 7. — С. 747–754.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
7. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
8. Электроразведка. Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова — М.: Недра, 1980.
9. **Эпов М.И., Миронов В.Л., Комаров С.А., Музалевский К.В.** Распространение сверхширокополосного электромагнитного импульса в нефтенасыщенной среде // Геология и геофизика. — 2009. — Т. 50, № 1. — С. 58–66.
10. **Fornberg B., Christ M.** Spatial finite difference approximation for wave-type equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1999. — Vol. 37. — P. 105–130.

*Поступила в редакцию 4 октября 2012 г.,
в окончательном варианте 31 января 2013 г.*

