

AMS subject classification: 28A80, 41A30, 65D05, 65D07, 65D10

## Обобщенная двумерная фрактальная интерполяционная функция Эрмита

С. Джха<sup>1</sup>, А.К.Б. Чанд<sup>1</sup>, М.А. Наваску<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai, 600036, India

<sup>2</sup>Departamento de Matematica Aplicada, Escuela de Ingenieria y Arquitectura, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 500018, Spain

E-mails: sangitajha285@gmail.com (Джха С.), chand@iitm.ac.in (Чанд А.К.Б.), manavas@unizar.es (Наваску М.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

Джха С., Чанд А.К.Б., Наваску М.А. Обобщенная двумерная фрактальная интерполяционная функция Эрмита // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 2. — С. 117–129.

Фрактальная интерполяция обеспечивает эффективный способ описания гладкой или негладкой структуры, связанной с природными и научными данными. Цель данной статьи — ввести двумерную фрактальную интерполяционную формулу Эрмита, обобщающую классическую интерполяционную формулу Эрмита для двух переменных. Показано, что предлагаемая фрактальная интерполяционная функция Эрмита и ее производные всех порядков являются хорошими приближениями исходной функции, даже если частные производные исходных функций являются негладкими по своей природе.

DOI: 10.15372/SJNM20210201

**Ключевые слова:** *фрактальная интерполяция, интерполяция Эрмита, фрактальная поверхность, сходимость.*

Jha S., Chand A.K.B., Navascues M.A. Generalized bivariate Hermite fractal interpolation function // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 2. — P. 117–129.

Fractal interpolation provides an efficient way to describe the smooth or non-smooth structure associated with nature and scientific data. The aim of this paper is to introduce a bivariate Hermite fractal interpolation formula which generalizes the classical Hermite interpolation formula for two variables. It is shown here that the proposed Hermite fractal interpolation function and its derivatives of all orders are good approximations of the original function even if the partial derivatives of the original functions are non-smooth in nature.

**Keywords:** *fractals, fractal interpolation, hermite interpolation, fractal surface, convergence.*

---

### 1. Введение

Классическая задача интерполяции Эрмита связана с построением подходящей приближенной функции на основе функциональных значений и значений ее производных в заданных узловых точках. Интерполяционная формула Эрмита [19] обеспечила выражение для многочлена, проходящего через заданные точки с фиксированными значениями производной в точках сетки. Шпитцбарт [18] предложил обобщение интерполяционной формулы Эрмита одной переменной и получил многочлен  $p(x)$  степени  $N + \sum_{n=0}^N R_n$  по  $x$ , который интерполирует на значения функции и ее производных до

порядка  $R_n$  при  $x_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Производные классической функции Эрмита гладкие или кусочно-гладкие, и, следовательно, они не являются идеальными для описания изменяющейся негладкости, связанной с производными исходной функции. Метод фрактальной интерполяции, определяемый системой итерационных функций (СИФ), является эффективным способом отражения меняющейся недифференцируемости в заданной области. Этот метод является достижением, поскольку все классические методы могут быть получены как частный случай фрактальной функции. Этот метод был введен Барнсли в [2]. После этого функции фрактальной интерполяции (ФФИ) стали широко использоваться в различных областях, таких как компьютерная графика, обработка изображений, моделирование естественных поверхностей и т. д. Кроме того, можно строить фракталы с использованием гибких методов СИФ, известных как циперы [20, 21]. Барнсли и Харрингтон [4] доказали существование дифференцируемых ФФИ. Позднее Наваску [14] сконструировал семейство фрактальных функций  $f^\alpha$ , и, в зависимости от вектора масштабирования  $\alpha$ ,  $f^\alpha$  является гладкой или негладкой по своей природе. Функция  $f^\alpha$  сохраняет некоторые свойства, такие как непрерывность и интегрируемость  $f$ . Процесс получения  $\alpha$ -фрактальной функции с помощью непрерывной функции определяет оператор  $\mathcal{F}^\alpha : \mathcal{C}(I) \mapsto \mathcal{C}(I)$ ,  $f \mapsto f^\alpha$ . Отображение  $\mathcal{F}^\alpha$  связывает теорию классической аппроксимации и ФФИ [22, 23]. При некоторых условиях на коэффициенты масштабирования получена сходимость  $f^\alpha$  к  $f$  [14].

В настоящее время интерполяция поверхностных данных играет решающую роль в науке и технологиях. Чтобы описать более сложную геометрию, скрытую внутри конструкции, необходим метод фрактальных поверхностей. На основе ФФИ фрактальные поверхности, построенные при помощи СИФ, были введены Массопустом в [12]. Он рассмотрел случай, когда область треугольная, а точки интерполяции копланарны. Более общую конструкцию изучали Джеронимо и Хардин [11]. Жао [25] дал еще более общую конструкцию как аффинных, так и неаффинных поверхностей фрактальной интерполяции (ПФИ) с использованием произвольных коэффициентов сжатия в треугольных областях. После этого Кси и Сан [24] сконструировали ПФИ на прямоугольных сетках с коэффициентами масштабирования и без использования граничных условий. Однако это приводит к аттрактору, не являющемуся графом непрерывных функций. Далла [5, 9] использовал коллинеарные данные и доказал, что этот аттрактор представляет собой непрерывную поверхность. Вся вышеупомянутая конструкция приводит к получению автомобильных аттракторов.

Однако с помощью существующих методов мы не можем получить фрактальные поверхности, если существует множество функциональных значений во всех точках сетки, а также значения производных различного порядка в обоих направлениях. Таким образом, наш метод будет полезен для построения фрактальных поверхностей из множества двумерных данных Эрмита. Ахлин [1] рассматривал двумерное обобщение интерполяционной формулы Эрмита. Он разработал двумерный многочлен оскуляторной интерполяции, который согласуется с  $f(x, y)$  и ее частными и смешанными частными производными до указанного порядка в каждом из узлов декартовой сетки. Двумерное обобщение формулы Шпицбарта дано в [7], оно используется в тех случаях, когда даны только функциональные значения, но нет частных производных по направлению  $x$  или  $y$ .

В этой статье мы представляем новую конструкцию фрактальной интерполяции поверхностей с использованием двумерной интерполяции Эрмита, которая дает гладкие поверхности.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы сначала кратко представляем

фрактальную интерполяционную функцию и классическую двумерную интерполяционную формулу Эрмита. Затем в п. 3 мы расширяем эту формулу интерполяции с помощью фрактальных процедур и полученных оценок ошибки двумерных ФФИ Эрмита. Наконец, в п. 4 мы приводим пример и графики интерполированной функции и ее производных в направлениях  $x$  и  $y$ . Заключение дано в п. 5.

## 2. Основные положения и предварительная информация

В этом пункте мы рассмотрим некоторые важные общие положения по фрактальным функциям, более подробную информацию о которых можно найти в [2, 3, 6, 16, 17].

### 2.1. Основа теории ФФИ

Пусть  $I = [a, b]$  и  $\Delta := \{t_0, t_1, \dots, t_N : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$  — разбиение  $I$ . Пусть дано множество точек данных  $\{(t_n, z_n) : n \in \mathbb{N}_N \cup \{0\}\}$ , где  $\mathbb{N}_k$  — первые  $k$  натуральных числа, и  $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ . Пусть  $L_n : I \rightarrow I_n, n \in \mathbb{N}_N$ , — сжимающие гомеоморфизмы такие, что

$$L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_n. \quad (2.1)$$

Пусть  $K = I \times \mathbb{R}$  и  $N$  — непрерывные отображения,  $F_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие условиям:

$$F_n(t_0, z_0) = z_{n-1}, \quad F_n(t_N, z_N) = z_n, \quad |F_n(t, z) - F_n(t, z')| \leq |c_n| |z - z'|, \quad (2.2)$$

где  $(t, z), (t, z') \in K, c_n \in (-1, 1), n \in \mathbb{N}_N$ . Пусть  $X$  — полное метрическое пространство и  $\{w_n : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N\}$  — множество непрерывных функций на  $X$ . Тогда  $\{X; w_n : i = 1, 2, \dots, N\}$  называется системой итерационных функций (СИФ) на  $X$ . Теперь определим функции  $w_n : K \rightarrow K$  следующим образом:  $w_n(t, z) = (L_n(t), F_n(t, z)) \forall n \in \mathbb{N}_N$ . Приведем основную теорему соотношения между СИФ и фрактальными функциями.

**Теорема 1** [2]. Пусть  $\mathcal{C}(I)$ , пространство всех действительных непрерывных функций на компактном интервале  $I$ , имеет чебышёвскую норму  $\|g\|_\infty := \max\{|g(t)| : t \in I\}$ ; рассмотрим замкнутое метрическое подпространство

$$\mathcal{C}_{z_0, z_N}(I) := \{g \in \mathcal{C}(I) : g(t_0) = z_0, g(t_N) = z_N\}.$$

Верно следующее:

1. СИФ  $\{K; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  имеет единственный аттрактор  $G$ , который является графиком непрерывной функции  $f^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей  $f^*(t_n) = z_n$  для  $n = 0, 1, \dots, N$ .
2. Функция  $f^*$  является неподвижной точкой оператора Рунда–Байрактаревича (РБ)  $T$  на  $\mathcal{C}_{z_0, z_N}(I)$ :

$$(Tg)(t) = F_n\left(L_n^{-1}(t), g \circ L_n^{-1}(t)\right), \quad t \in I_n, \quad n \in \mathbb{N}_N.$$

Функция  $f^*$ , фигурирующая в предыдущей теореме, называется функцией фрактальной интерполяции (ФФИ), соответствующей  $\{(t_n, z_n) : n \in \mathbb{N}_N \cup \{0\}\}$ , и она является единственной, удовлетворяющей функциональному уравнению

$$f^*(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f^* \circ L_n^{-1}(t)) \quad \forall t \in I_n, \quad n \in \mathbb{N}_N. \quad (2.3)$$

Наиболее часто используемые фрактальные функции определяются посредством СИФ:

$$L_n(t) = a_n t + d_n, \quad F_n(t, z) = c_n z + q_n(t), \quad (2.4)$$

где  $c_n \in (-1, 1)$  называется коэффициентом вертикального масштабирования преобразования  $w_n, q_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, удовлетворяющие

$$q_n(t_0) = z_{n-1} - c_n z_0, \quad q_n(t_N) = z_n - c_n z_N$$

вследствие условий в (2.1) и (2.2).

## 2.2. $\alpha$ -фрактальные функции

Пусть  $f \in \mathcal{C}(I)$  — непрерывная функция. Для разбиения  $\Delta I$  рассмотрим случай  $q_n(t) = f \circ L_n(t) - \alpha_n b(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}_N$ , где  $b$  определяется через линейное отображение  $L : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ ,  $b = Lf$  такое, что  $L$  ограничено относительно супремум-нормы и удовлетворяет  $Lf(t_0) = f(t_0)$  и  $Lf(t_N) = f(t_N)$ . Коэффициент  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (-1, 1)^N$  называется масштабным вектором ФФИ, и в зависимости от величины масштабного вектора можно получить широкое разнообразие интерполянтов.

**Определение 1** [14]. Пусть  $f^\alpha$  — непрерывная функция, определяемая СИФ (2.3), (2.4). Функция  $f^\alpha$  является  $\alpha$ -фрактальной функцией, связанной с  $f$  относительно  $b$ , разбиения  $\Delta$  и масштабного вектора  $\alpha$ .

В соответствии с (2.3) и (2.4)  $f^\alpha$  удовлетворяет уравнению неподвижной точки:

$$f^\alpha(t) = f(t) + \alpha_n (f^\alpha - b) \circ L_n^{-1}(t), \quad t \in I_n, \quad n \in \mathbb{N}_N. \quad (2.5)$$

Равномерное расстояние между  $f^\alpha$  и  $f$  ограничено, поскольку (см., например, [14])

$$\|f^\alpha - f\|_\infty \leq \frac{|\alpha|_\infty}{1 - |\alpha|_\infty} \|f - b\|_\infty, \quad (2.6)$$

где  $|\alpha|_\infty = \max\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}_N\}$ .

В соответствии с (2.6), если  $\alpha = 0$  или  $f = b$ , то  $f^\alpha = f$ . Существование дифференцируемой ФФИ гарантирует следующее предположение.

**Предложение 1** [4]. Пусть  $\{(t_n, z_n) : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$  — данные интерполяции при  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ . Пусть  $L_n(t) = a_n t + b_n$ ,  $F_n(t, z) = \alpha_n z + q_n(t)$  для  $n = 1, 2, \dots, N$ . Предположим, что для некоторого целого числа  $s > 0$ ,  $|\alpha_n| < a_n^s$  и  $q_n \in \mathcal{C}^s[a, b]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Пусть  $F_{nk}(t, z) = \frac{\alpha_n z + q_n^k}{a_n^k}$ ,  $z_{0,k} = \frac{q_1^k(t_0)}{a_1^k - \alpha_1}$ ,  $z_{N,k} = \frac{q_1^k(t_N)}{a_N^k - \alpha_N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ . Если  $F_{n-1}(t_N, z_{N,k}) = F_n(t_0, z_{0,k})$  для  $n = 2, 3, \dots, N$  и  $k = 1, 2, \dots, s$ , то  $\{L_n(t), F_{nk}(t, z)\}_{n \in \mathbb{N}_N}$  определяет ФФИ  $f \in \mathcal{C}^s[t_0, t_N]$ .

## 2.3. Двумерная интерполяционная формула Эрмита

Напомним о существовании обобщенной двумерной интерполяционной формулы Эрмита, предложенной Чавла с соавторами в [7].

**Теорема 2.** Предположим, что множество значений  $f_{m,n}^{(r,s)}$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $r = 0, 1, \dots, R_m$ ,  $s = 0, 1, \dots, S_n$ ) получено из функции  $\Phi$ :  $f_{m,n}^{(r,s)} = \frac{\partial^{r+s} \phi(x_m, y_n)}{\partial x^r \partial y^s}$ . Тогда единственный многочлен  $H_{P,Q}(x, y)$  степени  $P = M + \sum_{m=0}^M R_m$  по  $x$  и степени  $Q = N + \sum_{n=0}^N S_n$  по  $y$  такой, что

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} H_{P,Q}(x_m, y_n) = f_{m,n}^{(r,s)}, \quad m=0, 1, \dots, M; n=0, 1, \dots, N; r=0, 1, \dots, R_m; s=0, 1, \dots, S_n, \quad (2.7)$$

задается следующим образом:

$$H_{P,Q}(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} A_{mr}(x) B_{ns}(y) f_{m,n}^{(r,s)}, \quad (2.8)$$

где  $A_{mr}(x)$  и  $B_{ns}(y)$  задаются в виде

$$A_{mr}(x) = \frac{p_m(x)(x-x_m)^r}{r!} \sum_{t=0}^{R_m-r} \frac{g_m^{(t)}(x_m)(x-x_m)^t}{t!},$$

$$B_{ns}(y) = \frac{q_n(y)(y-y_n)^s}{s!} \sum_{t=0}^{S_n-s} \frac{h_n^{(t)}(y_n)(y-y_n)^t}{t!},$$

$$p_m(x) = (x-x_0)^{R_0+1} \dots (x-x_{m-1})^{R_{m-1}+1} (x-x_{m+1})^{R_{m+1}+1} \dots (x-x_M)^{R_M+1},$$

$$q_n(y) = (y-y_0)^{S_0+1} \dots (y-y_{n-1})^{S_{n-1}+1} (y-y_{n+1})^{S_{n+1}+1} \dots (y-y_N)^{S_N+1},$$

$$g_m(x) = [p_m(x)]^{-1}, \quad h_n(y) = [q_n(y)]^{-1}.$$

Если  $\frac{\partial^{R_m+S_n} \Phi}{\partial x^{R_m} \partial y^{S_n}}$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ) являются негладкими по своей природе, то  $H_{P,Q}$  не является идеальной аппроксимирующей поверхностью для  $\Phi$ . Таким образом, мы построили фрактальное возмущение  $H_{P,Q}$  с использованием  $\alpha$ -фрактального метода.

### 3. Обобщение функции Эрмита двух переменных путем фрактальной интерполяции

Наваску и Себастьян [15] сконструировали фрактальную функцию Эрмита для одной переменной. В данной статье нас будет интересовать следующее обобщение теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть дано конечное множество равноудаленных данных  $x_0 < x_1 < \dots < x_M$ ,  $y_0 < y_1 < \dots < y_N$  и  $\left\{ f_{m,n}^{(r,s)}, m = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N, r = 0, 1, \dots, R_m, s = 0, 1, \dots, S_n \right\}$ . Пусть фиксированные коэффициенты вертикального масштабирования  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_M$ , и  $\beta_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_N$ , выбраны такими, что

$$|\alpha_i| < \frac{1}{M^k}, \quad k = \max\{R_m : m = 0, 1, \dots, M\},$$

$$|\beta_j| < \frac{1}{N^l}, \quad l = \max\{S_n : n = 0, 1, \dots, N\}.$$

Тогда для фиксированных  $m$ ,  $n$  и любых  $r = 0, 1, \dots, R_m$ ,  $s = 0, 1, \dots, S_n$  существуют фрактальные функции  $A_{mr}^\alpha(x)$  и  $B_{ns}^\beta(y)$  такие, что

$$(A_{mr}^\alpha)^{(\xi)}(x_m) = (A_{mr})^{(\xi)}(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad \xi = 0, 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

и

$$(B_{ns}^\beta)^{(\eta)}(y_n) = (B_{ns})^{(\eta)}(y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \eta = 0, 1, \dots, l. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Приведем здесь конструкцию  $A_{mr}^\alpha(x)$  фрактального возмущения  $A_{mr}(x)$ . Для равноудаленных данных в направлении  $x$  рассмотрим  $a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_M - x_0} = \frac{1}{M}$ ,  $i \in \mathbb{N}_M$ . Определим подходящую ФФИ  $A_{mr}^\alpha(x)$ , удовлетворяющую предложению 1. Рассмотрим СИФ  $\{\mathbb{R}^2; (L_i, F_i^{mr}) : i \in \mathbb{N}_M\}$ , где  $L_i(x) = \frac{x}{M} + d_i$  удовлетворяет (2.1) и  $F_i^{mr}(x, y) = \alpha_i y + q_i^{mr}(x)$  так, что

$$q_i^{mr}(x) = A_{mr} \circ L_i(x) - \alpha_i b_{mr}(x). \quad (3.3)$$

Возьмем  $b_{mr}(x)$  такое, что  $b_{mr} \in \mathcal{C}^k(I)$  и (3.1) удовлетворяется. Из (3.3) имеем

$$f_{M,\xi}^{mr} = \frac{(q_M^{mr})^{(\xi)}(x_M)}{a_M^\xi - \alpha_M} = \frac{A_{mr}^{(\xi)}(x_M) - M^\xi \alpha_M b_{mr}^{(\xi)}(x_M)}{1 - M^\xi \alpha_M},$$

$$f_{0,\xi}^{mr} = \frac{(q_1^{mr})^{(\xi)}(x_0)}{a_1^\xi - \alpha_1} = \frac{A_{mr}^{(\xi)}(x_0) - M^\xi \alpha_1 b_{mr}^{(\xi)}(x_0)}{1 - M^\xi \alpha_1}.$$

Используя эти конечные точки в условиях соединения  $F_{(i-1)\xi}^{mr}(x_M, f_{M,\xi}^{mr}) = F_{i\xi}^{mr}(x_0, f_{0,\xi}^{mr})$ ,  $i \in \mathbb{N}_M$ , имеем

$$\alpha_{i-1} \left[ \frac{A_{mr}^{(\xi)}(x_M) - M^\xi \alpha_M b_{mr}^{(\xi)}(x_M)}{1 - M^\xi \alpha_M} - b_{mr}^{(\xi)}(x_M) \right] = \alpha_i \left[ \frac{A_{mr}^{(\xi)}(x_0) - M^\xi \alpha_1 b_{mr}^{(\xi)}(x_0)}{1 - M^\xi \alpha_1} - b_{mr}^{(\xi)}(x_0) \right].$$

Если все  $\alpha_i = \alpha^*$ , приведенное выше условие дает

$$A_{mr}^{(\xi)}(x_M) - b_{mr}^{(\xi)}(x_M) = A_{mr}^{(\xi)}(x_0) - b_{mr}^{(\xi)}(x_0),$$

что верно, если мы будем считать  $b_{mr}$  интерполяционной функцией Эрмита относительно  $x_0, x_M$  такой, что

$$\left. \begin{aligned} b_{mr}^{(\xi)}(x_0) &= A_{mr}^{(\xi)}(x_0) \\ b_{mr}^{(\xi)}(x_M) &= A_{mr}^{(\xi)}(x_M) \end{aligned} \right\}, \quad \xi = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

СИФ, связанная с  $(A_{mr}^\alpha)^{(\xi)}(x)$ , имеет вид  $\{\mathbb{R}^2; (L_i(x), F_{i\xi}^{mr}(x, y)) : i \in \mathbb{N}_M\}$ , где

$$L_i(x) = \frac{x}{M} + d_i,$$

$$dF_{i\xi}^{mr}(x, y) = M^\xi \alpha^* x + M^\xi (q_i^{mr})^{(\xi)}(x) = M^\xi \alpha^* x + A_{mr}^{(\xi)}(L_i(x)) - M^\xi \alpha^* b_{mr}^{(\xi)}(x). \quad (3.5)$$

Тогда из (3.3) и (3.4) получим

$$(A_{mr}^\alpha)^{(\xi)}(x_0) = f_{0,\xi}^{mr} = \frac{(q_1^{mr})^{(\xi)}(x_0)}{a_1^\xi - \alpha_1} = \frac{1}{a_1^\xi - \alpha_1} \left( \frac{A_{mr}^{(\xi)}(L_1(x_0))}{M^\xi} - \alpha^* b_{mr}^{(\xi)}(x_0) \right)$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha^* M^\xi} \left( A_{mr}^{(\xi)}(x_0) - \alpha^* M^\xi b_{mr}^{(\xi)}(x_0) \right) = A_{mr}^{(\xi)}(x_0).$$

Аналогичным образом имеем  $(A_{mr}^\alpha)^{(\xi)}(x_M) = A_{mr}^{(\xi)}(x_M)$ . Для всех других точек разбиения  $i = 1, 2, \dots, M - 1$

$$\begin{aligned}
(A_{mr}^\alpha)^\xi(x_i) &= F_{i\xi}^{mr} \left( L_i^{-1}(x_i), (A_{mr}^\alpha)^\xi \circ L_i^{-1}(x_i) \right) \\
&= M^\xi \alpha^* (A_{mr}^\alpha)^\xi \circ L_i^{-1}(x_M) + A_{mr}^\xi(x_i) - M^\xi \alpha^* b_{mr}^\xi \circ L_i^{-1}(x_i) \\
&= M^\xi \alpha^* (A_{mr}^\alpha)^\xi(x_M) + A_{mr}^\xi(x_i) - M^\xi \alpha^* b_{mr}^\xi(x_M) \\
&= A_{mr}^\xi(x_i).
\end{aligned}$$

То есть  $A_{mr}^\alpha$  — требуемая фрактальная функция Эрмита в направлении  $x$ .

Аналогично СИФ для  $B_{ns}^\beta$  задается путем  $\{\mathbb{R}^2; (L_j^*(y), F_{j\eta}^{*ns}(y, z)) : j \in \mathbb{N}_N\}$ , где

$$\begin{aligned}
L_j^*(y) &= \frac{y}{N} + d_j, \\
F_{j\eta}^{*ns}(y, z) &= N^\eta \beta^* z + N^\eta (q_j^{*ns})^\eta(y) = N^\eta \beta^* z + B_{ns}^\eta(L_j^*(y)) - N^\eta \beta^* b_{ns}^{\eta*}(y).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

□

**Определение 2.** Обобщенная двумерная функция фрактальной интерполяции Эрмита определяется с помощью функций Эрмита  $A_{mr}^\alpha(x)$  и  $B_{ns}^\beta(y)$  как

$$H_{P,Q}^{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} A_{mr}^\alpha(x) B_{ns}^\beta(y) f_{m,n}^{(r,s)}. \tag{3.7}$$

**Замечание 1.** Если рассматривать масштабирующие векторы  $\alpha = 0, \beta = 0$ , то  $A_{mr}^\alpha = A_{mr}, B_{ns}^\beta = B_{ns}$ . Следовательно,  $H_{P,Q}^{\alpha\beta} = H_{P,Q}$ , и мы получим классическую двумерную функцию Эрмита как частный случай.

Пусть  $I, J$  — два компактных интервала в  $\mathbb{R}$ . Для фиксированного разбиения  $\Delta$  и масштабирующих векторов  $\alpha, \beta$  мы можем определить оператор  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{C}^\kappa(I \times J)$  так, что  $\mathcal{H}(f)$  является обобщенной двумерной ФФИ Эрмита для фиксированного  $f \in \mathcal{C}^\kappa(I \times J)$ , где  $\kappa = \min(k, l)$ .

**Предложение 2.**  $\mathcal{H}$  — ограниченный линейный оператор на  $\mathcal{C}^\kappa(I \times J)$ .

**Доказательство.** Для данных  $f, g \in \mathcal{C}^\kappa(I \times J)$  и действительного скаляра  $c$  имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f + g) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} A_{mr}^\alpha(x) B_{ns}^\beta(y) (f + g)_{m,n}^{(r,s)} = \mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(g), \\
\mathcal{H}(cf) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} A_{mr}^\alpha(x) B_{ns}^\beta(y) (cf)_{m,n}^{(r,s)} = c\mathcal{H}(f).
\end{aligned}$$

Для функции  $f$  двух переменных рассмотрим норму  $\|f\|_{\mathcal{C}^\kappa(I \times J)} = \max_{i+j \leq \kappa} \sup_{x \in I, y \in J} \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial^i x \partial^j y} \right|$ .

Теперь

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^{u+v} H}{\partial^u x \partial^v y} \right\|_\infty &= \sup_{x, y \in I} \left| \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} (A_{mr}^\alpha(x))^{(u)} (B_{ns}^\beta(y))^{(v)} f_{m,n}^{(r,s)} \right| \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{C}^\kappa(I \times J)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \|(A_{mr}^\alpha)^{(u)}\|_\infty \|(B_{ns}^\beta)^{(v)}\|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя СИФ (3.5), мы получим вертикальный масштабирующий вектор  $M^\xi \alpha^*$ . Теперь, используя предложение 1, для  $\xi = 0, 1, 2, \dots, \kappa$  имеем

$$\|(A_{mr}^\alpha)^\xi - A_{mr}^\xi\|_\infty \leq \frac{M^\xi |\alpha^*|}{1 - M^\xi |\alpha^*|} \|A_{mr}^\xi - b_{mr}^\xi\|_\infty \leq \frac{M^\kappa |\alpha^*|}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)}.$$

Таким образом,

$$\|(A_{mr}^\alpha)^\xi\|_\infty \leq \frac{M^\kappa |\alpha^*|}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)} + \|A_{mr}\|_{C^\kappa(I)}. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом для функции Эрмита в направлении  $y$  получаем

$$\|(B_{ns}^\beta)^\eta\|_\infty \leq \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} + \|B_{ns}\|_{C^\kappa(J)}. \quad (3.10)$$

Используя (3.8)–(3.10), получим верхнюю границу для оператора  $\mathcal{H}$ :

$$\|\mathcal{H}\| \leq \left( \frac{M^\kappa |\alpha^*|}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)} + \|A_{mr}\|_{C^\kappa(I)} \right) \times \\ \left( \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^{S_n} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} + \|B_{ns}\|_{C^\kappa(J)} \right). \quad \square$$

### 3.1. Верхняя граница ошибки

Используем следующий результат, чтобы получить оценку ошибки.

**Теорема 4** [7]. Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_M$  и  $y_0, y_1, \dots, y_N$  — различные точки в  $[a, b] \times [c, d]$ . Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$ , и предположим, что все ее частные производные существуют. Если мы сохраним  $y$  фиксированным, то мы можем записать  $f(x, y)$  следующим образом:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{r=0}^{R_m} A_{mr}(x) \frac{\partial^r}{\partial x^r} f(x_m, y) + \frac{\lambda(x)}{(P+1)!} \frac{\partial^{P+1}}{\partial x^{P+1}} f(\xi, y),$$

где  $\lambda(x) = (x - x_0)^{R_0+1} \dots (x - x_M)^{R_M+1}$ ,  $\min(x, x_0, \dots, x_M) \leq \xi \leq \max(x, x_0, \dots, x_M)$ . Аналогично, если мы сохраним  $x$  фиксированным, то

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{s=0}^{S_n} B_{ns}(y) \frac{\partial^s}{\partial y^s} f(x, y_n) + \frac{\mu(y)}{(Q+1)!} \frac{\partial^{Q+1}}{\partial y^{Q+1}} f(x, \eta),$$

где  $\mu(y) = (y - y_0)^{S_0+1} \dots (y - y_N)^{S_N+1}$ ,  $\min(y, y_0, \dots, y_N) \leq \eta \leq \max(y, y_0, \dots, y_N)$ . Таким образом,

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} A_{mr}(x) B_{ns}(y) \frac{\partial^{r+s} f(x_m, y_n)}{\partial x^r \partial y^s} + \\ \frac{\lambda(x)}{(P+1)!} \sum_{n=0}^N \sum_{s=0}^{S_n} B_{ns}(y) \frac{\partial^{P+s+1} f(\xi, y_n)}{\partial x^{P+1} \partial y^s} + \\ \frac{\mu(y)}{(Q+1)!} \sum_{m=0}^M \sum_{r=0}^{R_m} A_{mr}(x) \frac{\partial^{r+Q+1} f(x_m, \eta)}{\partial x^r \partial y^{Q+1}} + \\ \frac{\lambda(x)\mu(y)}{(P+1)!(Q+1)!} \frac{\partial^{P+Q+2}}{\partial x^{P+1} \partial y^{Q+1}},$$

которое можно записать в виде



$$f(x, y) = H_{P,Q}(x, y) + E_{P,Q}(x, y),$$

где  $H_{P,Q}(x, y)$  – интерполяционная функция Эрмита  $f$  и  $E_{P,Q}(x, y)$  – функция ошибки.

**Теорема 5.** Пусть  $\Phi \in C^\kappa(I \times J)$  – исходная функция, аппроксимированная обобщенной ФФИ Эрмита  $H_{P,Q}^{\alpha\beta}$  так, что  $|\alpha^*| < \frac{1}{M^k}$  для  $k = \max\{R_m : m = 0, 1, \dots, M\}$  и  $|\beta^*| < \frac{1}{N^l}$ , для  $l = \max\{S_n : n = 0, 1, \dots, N\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi - H_{P,Q}^{\alpha\beta}\|_{C^\kappa(I \times J)} &\leq \|\Phi - H_{P,Q}\|_{C^\kappa(I \times J)} + \\ &\|\Phi\|_{C^\kappa(I \times J)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \left[ \|A^{(u)}\|_\infty \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} + \right. \\ &\left. \frac{M^\kappa |\alpha^*|}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)} \left( \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} + \|B_{ns}\|_{C^\kappa(J)} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Для  $u + v = 0, 1, \dots, \kappa$  имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^{u+v} H_{P,Q}^{\alpha\beta}}{\partial^u x \partial^v y} - \frac{\partial^{u+v} H_{P,Q}}{\partial^u x \partial^v y} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \|f^{(r,s)}\|_\infty \|(A_{mr}^\alpha)^{(u)} (B_{ns}^\beta)^{(v)} - (A_{mr})^{(u)} (B_{ns})^{(v)}\|_\infty \\ &\leq \|f\|_{C^\kappa(I \times J)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \left( \|(A_{mr}^\alpha)^{(u)} - (A_{mr})^{(u)}\|_\infty \|(B_{ns}^\beta)^{(v)}\|_\infty + \right. \\ &\quad \left. \|(A_{mr})^{(u)}\|_\infty \|(B_{ns}^\beta)^{(v)} - (B_{ns})^{(v)}\|_\infty \right) \\ &\leq \|f\|_{C^\kappa(I \times J)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \left( \frac{M^\kappa |\alpha^*|}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)} \|(B_{mr}^\beta)^{(v)}\|_{C^\kappa(J)} + \right. \\ &\quad \left. \|A_{mr}^{(u)}\|_\infty \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} \right) \\ &\leq \|f\|_{C^\kappa(I \times J)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^{R_m} \sum_{s=0}^{S_n} \left[ \left( \|A_{mr}^{(u)}\|_\infty \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{M^\kappa |\alpha^*| \|A_{mr} - b_{mr}\|_{C^\kappa(I)}}{1 - M^\kappa |\alpha^*|} \left( \frac{N^\kappa |\beta^*|}{1 - N^\kappa |\beta^*|} \|B_{ns} - b_{ns}^*\|_{C^\kappa(J)} + \|B_{ns}\|_{C^\kappa(J)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Верхняя граница ошибки следует из неравенства треугольника:

$$\|\Phi - H_{P,Q}^{\alpha\beta}\|_{C^\kappa(I \times J)} \leq \|\Phi - H_{P,Q}\|_{C^\kappa(I \times J)} + \|H_{P,Q} - H_{P,Q}^{\alpha\beta}\|_{C^\kappa(I \times J)}. \quad \square$$

Следующее предложение может использоваться для вычисления  $\|A_{mr} - b_{mr}\|_\infty$  и  $\|B_{ns} - b_{ns}^*\|_\infty$ .

**Предложение 3** [8]. Пусть  $h(x) \in C^s[x_0, x_M]$  при  $s \geq 2p + 2$ . Пусть  $\Delta$  – любое разбиение  $[x_0, x_M]$ ,  $\Delta : x_0 < x_1 < \dots < x_M$ , и пусть  $\Phi(x)$  – единственная интерполяция Эрмита  $h(x)$  такая, что  $h^{(\xi)}(x_m) = \phi^{(\xi)}(x_m)$  для всех  $0 \leq m \leq M$ ,  $0 \leq \xi \leq p$ . Тогда для всех  $k$  при  $0 \leq k \leq p$  выполняется неравенство

$$\|h^{(k)} - \phi^{(k)}\|_{\infty} \leq \frac{\|\Delta\|^{2p+2-k}}{2^{2p+2-2k} p! (2p+2-2k)!} \|h^{(2p+2)}\|_{\infty}. \quad (3.11)$$

**Замечание 2.** Взяв  $h(x) = A_{mr}(x)$ ,  $\Phi(x) = b_{mr}(x)$  и  $k = \xi$ , мы можем найти границу  $\|A_{mr}^{(\xi)} - b_{mr}^{(\xi)}\|_{\infty}$ , используя (3.11).

#### 4. Примеры и графики

**Пример.** Рассмотрим  $M = 2$ ,  $N = 2$ ,  $R_m = 1$ ,  $S_n = 1$ ,  $I = [-2, 2]$ ,  $J = [-1, 1]$ . Тогда  $H_{5,5}$  — многочлен степени 5 по  $x$  и степени 5 по  $y$ . Множество точек данных приведено в следующей таблице.

Таблица. Значения данных

$x \backslash y$	-1	0	1
-2	(4, 1, 2, 5)	(-1, 0, 5, 8)	(0, 5, -6, -3)
0	(18, 6, 0, 4)	(6, -3, 1, -7)	(-5, -9, 4, 2)
2	(22, -10, 10, 0)	(11, 4, -4, 1)	(10, 8, 3, -4)

Здесь четверки представляют значения  $(f, f_x, f_y, f_{xy})$  при  $(x_m, y_n)$  для  $m, n = 0, 1, 2$ . Используя таблицу, мы можем построить базисные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{00}(x) &= \frac{(3x+8)x^2(x-2)^2}{128}, & A_{01}(x) &= \frac{x^2(x-2)^2(x+2)}{64}, & A_{10}(x) &= \frac{(x+2)^2(x-2)^2}{16}, \\ A_{11}(x) &= \frac{xx(x-2)^2(x+2)^2}{16}, & A_{20}(x) &= \frac{x^2(x+2)^2(8-3x)}{128}, & A_{21}(x) &= \frac{x^2(x-2)(x+2)^2}{64}, \\ B_{00}(y) &= \frac{y^2(4+3y)(y-1)^2}{4}, & B_{01}(y) &= \frac{y^2(y-1)^2(y+1)}{4}, & B_{10}(y) &= (y+1)^2(y-1)^2, \\ B_{11}(y) &= y(y+1)^2(y-1)^2, & B_{20}(y) &= \frac{y^2(y+1)^2(4-3y)}{4}, & B_{21}(y) &= \frac{y^2(y+1)^2(y-1)}{4}. \end{aligned}$$

Для построения фрактальных функций Эрмита рассмотрим равномерное разбиение  $I$  в виде  $\{-2, 0, 2\}$  и, следовательно,  $a_i = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2$ , в направлении  $x$  и  $\{-1, 0, 1\}$  в направлении  $y$  при  $a_j^* = \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2$ . Согласно теореме 3, нам нужно рассмотреть  $|\alpha_i| < \frac{1}{2^i}$  и  $|\beta_j| < \frac{1}{2^j}$ . Также рассмотрим базовые функции, используя (3.4), в виде

$$\begin{aligned} b_{00}(x) &= \frac{(4+x)(x-2)^2}{32}, & b_{01}(x) &= \frac{(2+x)(x-2)^2}{16}, & b_{10}(x) &= (\sin x - \sin 2)^2(\sin x + \sin 2)^2, \\ b_{11}(x) &= (e^x - e^2)^2(e^x - e^{-2})^2, & b_{20}(x) &= \frac{(4-x)(x+2)^2}{32}, & b_{21}(x) &= \frac{(x-2)(x+2)^2}{16}, \\ b_{00}^*(y) &= \frac{(y+2)(y-1)^2}{4}, & b_{01}^*(y) &= \frac{(y+1)(y-1)^2}{4}, & b_{10}^*(y) &= (e^y - e)^2(e^y - e^{-1})^2, \\ b_{11}^*(y) &= (\sin y - \sin 1)^2(\sin y + \sin 1)^2, & b_{20}^*(y) &= \frac{(y+1)^2(2-y)}{4}, & b_{21}^*(y) &= \frac{(y-1)(y+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Исходя из (3.5), СИФ для обобщенных фрактальных функций Эрмита имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} L_i(x) &= \frac{x}{2} + d_i \\ F_i^{mr}(x, y) &= \alpha_i y + A_{mr} \circ L_i(x) - \alpha_i b_{mr}(x) \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} L_j^*(y) &= \frac{y}{2} + d_j^* \\ F_j^{*ns}(y, z) &= \beta_j z + B_{ns} \circ L_j^*(y) - \beta_j b_{ns}^*(y) \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2. \quad (4.2)$$

Здесь мы взяли  $\alpha = 0.2$  и  $\beta = -0.3$ . При сделанном выше выборе векторов масштабирования и функций  $A_{mr}$ ,  $b_{mr}$ ,  $B_{ns}$ ,  $b_{ns}^*$  и с использованием СИФ (4.1), (4.2) мы строим фрактальные функции  $A_{mr}^\alpha(x)$  и  $B_{ns}^\beta(y)$ . Используя  $A_{mr}^\alpha(x)$ ,  $B_{ns}^\beta(y)$  и (3.7), мы построили обобщенные двумерные фрактальные функции Эрмита (см. рисунок 1). Кроме того, мы выбрали  $\alpha^* = 0 = \beta^*$  и построили второй график на рис. 1, который согласуется с классической двумерной функцией Эрмита. Затем мы построили график обеих функций частных производных предложенной функции в направлениях  $x$  и  $y$  (см. рис. 2 и рис. 3). Из рисунков 2 и 3 ясно, что для значения  $\alpha = 0 = \beta$  фрактальные производные функции согласуются с классической производной функции.

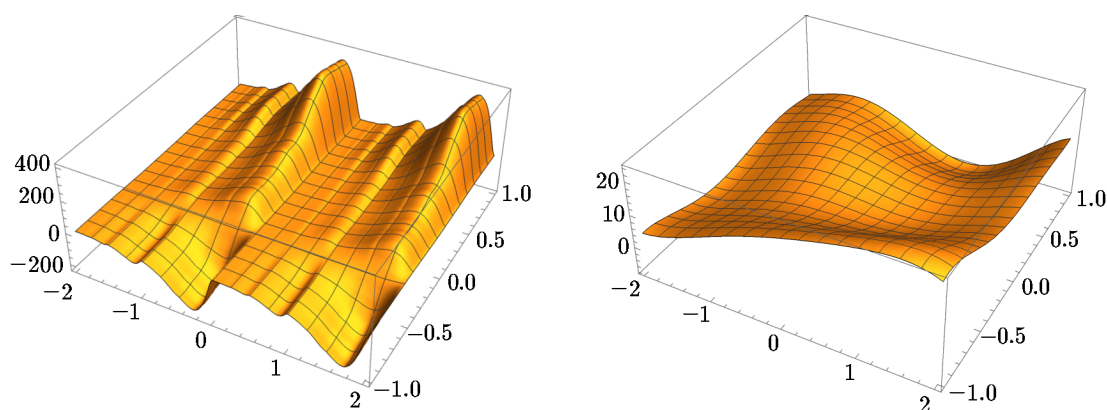


Рис. 1. Двумерная фрактальная функция Эрмита для различных значений  $\alpha, \beta$

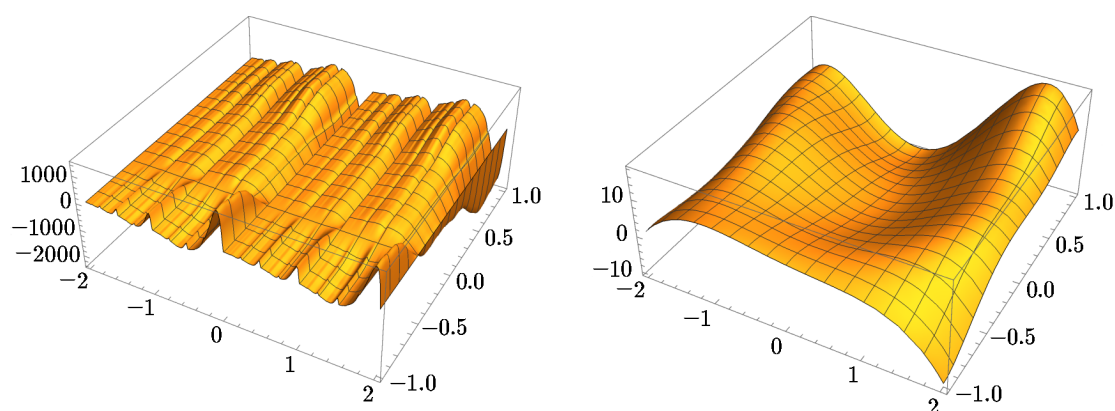
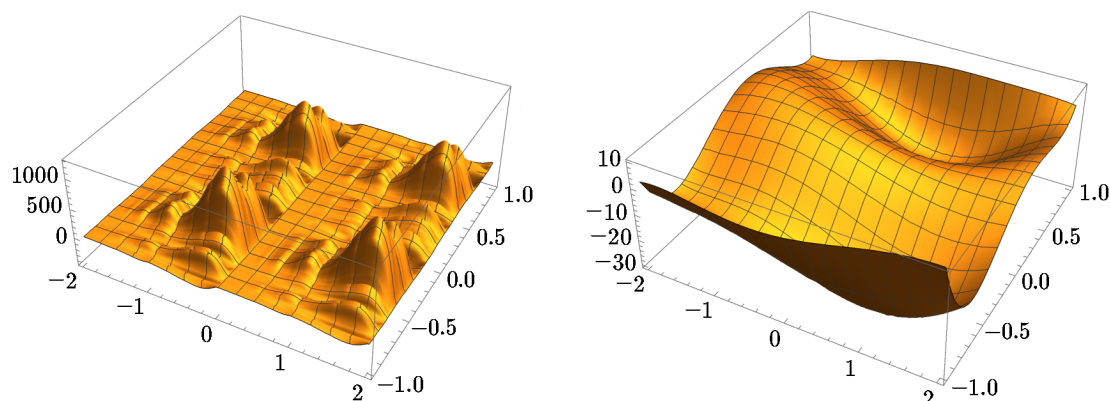


Рис. 2. Частная производная по  $x$  двумерной фрактальной функции Эрмита для различных значений  $\alpha, \beta$



**Рис. 3.** Частная производная по  $y$  двумерной фрактальной функции Эрмита для различных значений  $\alpha, \beta$

**Замечание 3.** Некоторые авторы (см., например, статьи Массопуста [12, 13] и Дракопулоса с соавторами [10]) предложили строить фрактальные поверхности с помощью ориентированных симплексов или параллелепипедов. Это универсальная и очень интересная модель для определения негладких поверхностей фрактальной размерности. Однако в случае, когда в узлах заданы значения производной, эта полигональная модель сопряжена с большими техническими трудностями, которые очень усложняют формулировку. Подход, описанный в этой статье, состоит в простом определении условий сопряжения поверхностей в узлах с дополнительным преимуществом, заключающимся в обобщении классических функций Эрмита.

## 5. Выводы

В данной статье описан метод построения двумерной фрактальной функции Эрмита. Основным преимуществом представленного метода интерполяции является конструктивность, т. е. возможность реализации метода для аппроксимации негладких производных исходных функций. Численные примеры приведены для иллюстрации возможности использования нашего метода для наилучшего выбора масштабных коэффициентов. Негладкость фрактальных интерполированных поверхностей можно регулировать с помощью векторов масштабирования. Используя одни и те же данные интерполяции, мы можем получить различные формы двумерной ФФИ, изменяя значения векторов масштабирования. Предлагаемый двумерный алгоритм ФФИ Эрмита может использоваться для задач моделирования поверхностей в компьютерной графике, компьютерном геометрическом дизайне (CAGD) и визуализации данных, когда в частных производных исходной функции имеется фрактальность.

*Благодарности.* Мы хотели бы поблагодарить рецензентов за ценные и конструктивные предложения, которые помогли улучшить рукопись.

## Литература

1. **Ahlin A.C.** A bivariate generalization of Hermite's interpolation formula // Math. Comp. — 1964. — Vol. 18. — P. 264–273.
2. **Barnsley M.F.** Fractal functions and interpolation // Constr. Approx. — 1986. — Vol. 2, № 4. — P. 303–329.
3. **Barnsley M.F.** Fractals Everywhere. — Boston: Academic Press, 1988.

4. **Barnsley M.F. and Harrington A.N.** The calculus of fractal interpolation functions // J. Approx. Theory. — 1989. — Vol. 57, № 1. — P. 14–34.
5. **Bouboulis P. and Dalla L.** Fractal interpolation surfaces derived from fractal interpolation functions // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 336, № 2. — P. 919–936.
6. **Chand A.K.B. and Navascues M.A.** Generalized Hermite fractal interpolation // Rev. R. Acad. Cienc. Zaragoza. — 2009. — Vol. 64, № 2. — P. 107–120.
7. **Chawla M.M. and Jayarajan N.** A generalization of Hermite's interpolation formula in two variables // J. Austral. Math. Soc. — 1974. — Vol. 18. — P. 402–410.
8. **Ciarlet P.G., Schultz M.H., and Varga R.S.** Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One Dimensional Problem // Numer. Math. — 1967. — Vol. 9. — P. 394–430.
9. **Dalla L.** Bivariate fractal interpolation functions on grids // Fractals. — 2002. — Vol. 10, № 1. — P. 53–58.
10. **Drakopoulos V. and Manousopoulos P.** Bivariate fractal interpolation surfaces: theory and applications // Intern. J. Bifur. Chaos. — 2012. — Vol. 22, № 9. — P. 1250220. — <https://doi.org/10.1142/S0218127412502203>.
11. **Geronimo J.S. and Hardin D.** Fractal interpolation surfaces and a related 2-D multiresolution analysis // J. Math. Anal. Appl. — 1993. — Vol. 176, № 2. — P. 561–586.
12. **Massopust P.R.** Fractal surfaces // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — Vol. 151, № 1. — P. 275–290.
13. **Massopust P.R.** Smooth interpolating curves and surfaces generated by iterated function systems // Z. Anal. Anwendungen. — 1993. — Vol. 12, № 2. — P. 201–210.
14. **Navascues M.A.** Fractal polynomial interpolation // Z. Anal. Anwendungen. — 2005. — Vol. 24, № 2. — P. 401–418.
15. **Navascues M.A. and Sebastian M.V.** Generalization of Hermite functions by fractal interpolation // J. Approx. Theory. — 2004. — Vol. 131, № 1. — P. 19–29.
16. **Navascues M.A. and Sebastian M.V.** Smooth fractal interpolation // J. Inequal. Appl. — 2006. — Vol. 20. — Art. ID 78734. — <https://doi.org/10.1155/JIA/2006/78734>.
17. **Samuel M. and Tetenov A.V.** On attractors of iterated function systems in uniform spaces // Sib. Elektron. Mat. Izv. — 2017. — Vol. 14. — P. 151–155.
18. **Spitzbart A.** A generalization of Hermite's interpolation formula // Amer. Math. Monthly. — 1960. — Vol. 67. — P. 42–46.
19. **Stoer J. and Bulirsch R.** Introduction to Numerical Analysis. — Springer-Verlag, 1980.
20. **Tetenov A.V.** On self-similar Jordan arcs on a plane // Sib. Zh. Ind. Mat. — 2004. — Vol. 7, № 3. — P. 148–155.
21. **Tetenov A.V.** Self-similar jordan arcs and the graph directed systems of similarities // Siberian Math. J. — 2006. — Vol. 47, № 5. — P. 940–949.
22. **Viswanathan P., Navascues M.A., and Chand A.K.B.** Associate fractal functions in  $L_p$ -spaces and in one-sided uniform approximation // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — Vol. 433, № 2. — P. 862–876.
23. **Viswanathan P., Navascues M.A., and Chand A.K.B.** Fractal polynomials and maps in approximation of continuous functions // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2016. — Vol. 37, № 1. — P. 106–127.
24. **Xie H. and Sun H.** The study on bivariate fractal interpolation functions and creation of fractal interpolated surfaces // Fractals. — 1997. — Vol. 5, № 4. — P. 625–634.
25. **Zhao N.** Construction and application of fractal interpolation surfaces // The Visual Computer. — 1996. — Vol. 12, № 3. — P. 132–146.

*Поступила в редакцию 1 ноября 2018 г.  
После исправления 22 января 2020 г.  
Принята к печати 4 февраля 2021 г.*

