

ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА

А. Е. Алексеев
(Новосибирск)

Рассматривается задача плоской деформации о вдавливании твердого гладкого штампа в жестко-пластическую среду, ограниченную плоскостью. В предельном состоянии штамп с плоским основанием движется вниз со скоростью v_0 .

1. Непрерывное решение для скоростей. На фиг. 1 показана сетка линий скольжения, соответствующая решению, предложенному Прагером [3], которое является комбинацией решений Прандтля [1] и Хилла [2].

Ниже наряду с декартовой системой координат (x, y) используется криволинейная система координат (ρ, θ) где

$$x = 1 + \rho \sin \theta, \quad y = -\rho \cos \theta.$$

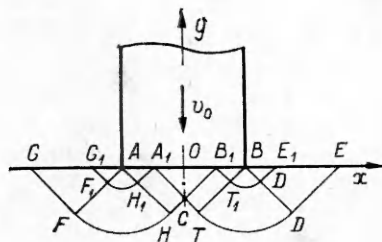
Ширина штампа полагается равной 2.

Длина отрезка A_1B_1 равна 2λ . Параметр λ может быть произвольным на отрезке $0 \leq \lambda \leq 1$ и определяет размеры треугольника A_1B_1C .

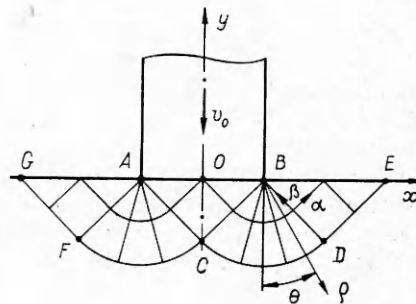
Поле скоростей для сетки линий скольжения Прагера (см. фиг. 1) имеет вид

$u = 0,$	$v = -v_0$	в треугольнике $A_1B_1C_*$
$u = v_0,$	$v = -v_0$	в треугольнике $B_1T_1B_*$
$u = v_0/2,$	$v = -v_0/2$	в прямоугольнике $CB_1T_1T_*$
$u = \sqrt{2}v_0 \cos \theta,$	$v = \sqrt{2}v_0 \sin \theta$	в сегменте $T_1B_1D,$
$u = (v_0/\sqrt{2}) \cos \theta,$	$v = (v_0/\sqrt{2}) \sin \theta$	в области $TT_1D_1D,$
$u = v_0,$	$v = v_0$	в треугольнике $BD_1E_1,$
$u = v_0/2,$	$v = v_0/2$	в области $D_1E_1ED_*$

где u, v — компоненты вектора скорости по осям x, y соответственно. Вдоль линий $CB_1, CTDE, B_1T_1D_1E_1$ касательная составляющая скорости разрывна. В предельных случаях при $\lambda = 1$ и 0 получаем решения Прандтля и Хилла. Другие возможные решения для скоростей рассматриваются в работе [4].



Фиг. 1



Фиг. 2.

В рассматриваемом ниже решении сетка линий скольжения соответствует фиг. 2 и совпадает с сеткой линий скольжения Прандтля. Поле скоростей имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{cases} u = v_0 x, & v = -v_0(1+y) & \text{в треугольнике } ABC, \\ u = -v_0 \cos \theta (\rho - \sqrt{2}), \\ v = -v_0 \sin \theta (\rho - \sqrt{2}) & & \text{в области } CDB, \\ u = v = -(v_0/2)(x-y-3) & & \text{в треугольнике } BDE. \end{cases}$$

При этом поле скоростей (1.1) непрерывно всюду в области течения. Проверим условие положительности мощности диссипации

$$D = \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau \gamma,$$

где σ_x, σ_y, τ — компоненты тензора напряжений; e_x, e_y, γ — компоненты тензора скоростей деформаций,

$$e_x = \partial u / \partial x, \quad e_y = \partial v / \partial y, \quad \gamma = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x.$$

Выражение для D можно записать в виде

$$D = \tau_s (-2e_x \sin 2\xi + \gamma \cos 2\xi),$$

где ξ — угол наклона касательной к линии α (см. фиг. 2), отсчитываемый в положительном направлении от оси x . В треугольнике ABC $\xi = -\pi/4$, в области CBD $\xi = \theta$ и в треугольнике BDE $\xi = \pi/4$. Согласно выражениям для скоростей, компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид

$$\begin{array}{ll} e_x = -e_y = v_0, \quad \gamma = 0 & \text{в треугольнике } ABC, \\ e_x = -e_y = -v_0 \sin 2\theta / \sqrt{2}\rho, \quad \gamma = 2v_0 \cos 2\theta / \sqrt{2}\rho & \text{в области } CBD, \\ e_x = -e_y = v_0/2, \quad \gamma = 0 & \text{в треугольнике } BDE. \end{array}$$

Соответствующие значения мощности диссипации равны: в области ABC — $2\tau_s v_0$; в области BCD — $\sqrt{2}\tau_s v_0/\rho$; в области BDE — $\tau_s v_0$. Следовательно, условие положительности мощности диссипации выполнено всюду в пластической области.

2. Непрерывное поле скоростей как предел последовательности разрывных решений. Разобьем отрезок единичной длины OB (см. фиг. 1) на n равных частей и обозначим $\lambda_i = i/n$, $0 \leq i \leq n$. Тогда, согласно изложенному выше, для каждого λ_i имеем разрывное поле скоростей (u_i^n, v_i^n) , соответствующее решению Прагера для значений $\lambda = \lambda_i$ (см. фиг. 1). Рассмотрим поле скоростей (u^n, v^n) , которое является комбинацией решений (u_i^n, v_i^n) и имеет вид

$$u^n = \frac{1}{1+n} \sum_{i=0}^n u_{i_1}^n, \quad v^n = \frac{1}{1+n} \sum_{i=0}^n v_i^n.$$

Поля скоростей (u_i^n, v_i^n) по построению являются решениями рассматриваемой задачи. Можно показать, что в этом случае скорости (u^n, v^n) также являются решением задачи.

Обозначим (u_*, v_*) непрерывное поле скоростей, определяемое по формулам (1.1). Покажем, что в метрике пространства L_2 -функций, суммируемых с квадратом, поле скоростей (u_*, v_*) является пределом последовательности $\{u^n, v^n\}$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_* - u^n)^2 d\Omega = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_* - v^n)^2 d\Omega = 0.$$

Докажем справедливость первого равенства, для второго доказательство проводится аналогично. Имеем

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_* - u^n)^2 d\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} u_*^2 d\Omega - \frac{2}{(1+n)} \sum_{i=0}^n \int_{\Omega} u_* u_i^n d\Omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1+n)^2} \sum_{i,j=0}^n \int_{\Omega} u_i^n u_j^n d\Omega \right).$$

Используя вид функций u_i^n и u_* , а также известные формулы теории рядов, после интегрирования получаем

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} u_*^2 d\Omega = \frac{5+\pi}{12}, \quad \frac{1}{(1+n)} \sum_{i=0}^n \int_{\Omega} u_* u_i^n d\Omega = \frac{5+\pi}{12} - \frac{1}{48n}, \\ \frac{1}{(1+n)^2} \sum_{i,j=0}^n \int_{\Omega} u_i^n u_j^n d\Omega = \frac{5+\pi}{12} + \frac{4+\pi-2n}{48n(1+n)}.$$

Подставляя соотношения (2.2) в (2.1), имеем

$$\int_{\Omega} (u_* - u^n)^2 d\Omega = \frac{6+\pi}{48n(1+n)},$$

где при $n \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю. Таким образом доказано, что непрерывное решение для скоростей (1.1) является пределом последовательности разрывных решений.

Поступила 10 IX 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел.— В кн.: Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956.
3. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956.
4. Быковцев Г. И. О поле скоростей при вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство.— ПММ, 1967, № 3.

УДК 622.235

ИЗМЕНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ НАСЫЩЕННОГО КОЛЛЕКТОРА ПРИ КАМУФЛЕТНОМ ВЗРЫВЕ

А. Н. Бовт, К. С. Коенков, В. И. Мусинов,
В. Н. Николаевский, Е. А. Шурыгин

(Москва)

1. К настоящему времени вполне определенно установлено, что проницаемость монолитной горной породы типа гранита после взрывного камуфлетного воздействия возрастает до 4—5 порядков [1—2] по сравнению с начальной, которая весьма мала (0,01 мД). Проницаемость угля после взрыва возрастает более умеренно (на 2 порядка), начальная проницаемость порядка 100 мД [1, 3]. В обоих случаях отмечен монотонный спад проницаемости от взрывной полости к периферийному начальному значению проницаемости. В этих средах улучшение проницаемости связано с взрывной генерацией радиальных и иных систем трещин.