

УДК 532.517.2:536.24

Ламинарная смешанная конвекция в вертикальном плоском канале с постоянной температурой стенок

Е.П. Валуева

*Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»*

E-mail: ep.valueva@gmail.com

Рассмотрена задача о ламинарной смешанной конвекции в плоском вертикальном канале при подъемном и опускном течении и нагревании жидкости, т.е. для случаев совпадения направлений свободной и вынужденной конвекции, а также их противоположных направлений. Решение системы уравнений движения, неразрывности и энергии выполнено методом конечных разностей. Получены данные по профилям продольной скорости, температуры, числам Нуссельта при подъемном и опускном течении. Дано объяснение особенностям этих величин при воздействии силы плавучести. Проанализированы все составляющие коэффициента гидравлического сопротивления для подъемного и опускного течения. Рассмотрено влияние числа Прандтля и профиля скорости на входе в канал на гидродинамические и тепловые характеристики течения.

Ключевые слова: ламинарная смешанная конвекция, плоский канал, теплоотдача, гидравлическое сопротивление.

Введение

Процессы конвективного теплообмена во многих технических устройствах протекают в условиях, когда на вынужденное течение и теплообмен оказывает влияние сила плавучести, т.е. в условиях смешанной конвекции. Представляет научный и практический интерес изучение ламинарной смешанной конвекции. Ламинарное течение осуществляется в теплоотводах, планарных теплообменных аппаратах, состоящих из щелевых микроканалов [1]. Такие теплообменники обладают высоким коэффициентом компактности и большими значениями коэффициента теплопередачи. Они могут применяться для охлаждения элементов электронной аппаратуры, криогенных установок, химических реакторов.

В настоящее время достаточно широко исследуется теплообмен при ламинарных свободно-конвективных течениях. Интерес к этой тематике обусловлен проблемами пассивного охлаждения электронного оборудования. Однако задачи свободной и смешанной конвекции принципиально различаются как по их постановке и параметрам, от которых зависит решение, так и по эффектам, вызванным влиянием силы плавучести на течение и теплообмен.

Рассмотрим работы, в которых исследовалась смешанная ламинарная конвекция в вертикальных каналах.

Еще в первой половине прошлого века стало понятно, что на процессы теплообмена, протекающие во многих технических устройствах, может оказывать влияние сила тяжести. Одними из первых приближенно оценили это влияние применительно к течению и теплообмену в вертикальной трубе с постоянной температурой стенки Р.К. Мартинелли, Л.М.К. Болтер в работе [2], опубликованной в 1942 г. Теоретическое изучение этой проблемы для ламинарного течения началось в 1950-х годах с работ выдающегося советского ученого Г.А. Остроумова [3, 4], в которых рассматривались термические явления, происходящие в буровых скважинах. Эти работы имели важное прикладное значение. В трудах Г.А. Остроумова обращается внимание на существующую «неясность научных представлений о конвективных процессах в поле силы тяжести» и в значительной степени восполнен этот пробел. В частности, впервые решена задача о ламинарной смешанной конвекции при установившемся подъемном и опускном течении в круглой трубе с граничными условиями второго рода.

Некоторые сведения о проведенных до начала 70-х годов прошлого века работах по исследованию смешанной ламинарной конвекции в вертикальных каналах содержатся в монографиях Б.С. Петухова [5] и Б. Гебхадта с соавторами [6]. Проведем обзор этих, а также более поздних работ. Сначала рассмотрим течение в каналах с граничным условием второго рода.

В работе [7] представлено приближенное аналитическое решение задачи об установившейся ламинарной смешанной конвекции в вертикальной круглой трубе, которое распространено на случай наличия в потоке жидкости внутренних источников тепла. Автором [8] предложен другой метод решения указанной задачи, однако он применим лишь при совпадении направлений вынужденной и свободной конвекции (т.е. при подъемном течении и нагревании или при опускном течении и охлаждении). В работе [9] определены границы и характер влияния термогравитации на течение и теплообмен в наклонных, в частности, вертикальных круглых трубах на начальном участке при граничном условии второго рода. Проведено аналитическое решение системы уравнений конвективного теплообмена для малых отклонений температуры и составляющих вектора скорости от их известных значений при вынужденной конвекции.

Течение в плоском канале с граничными условиями второго рода рассмотрено лишь в нескольких работах. Наиболее содержательное исследование установившейся смешанной конвекции, включающее формулы для профилей скорости, температуры и числа Нуссельта Nu , провел автор [10]. Однако аналитический метод, использованный в [10], как и в [8] для течения в круглой трубе, применим лишь при совпадении направлений вынужденной и свободной конвекции. Для такого же случая в [11] получено приближенное аналитическое решение указанной задачи на начальном участке для двух граничных условий — первого и второго рода. В [12] на основе аналитического метода рассмотрено влияние термогравитации и переменной вязкости капельной жидкости на профили скорости, коэффициенты сопротивления трения, числа Нуссельта при линейном распределении температуры между поверхностями вертикального плоского канала. В [13] выполнено аналитическое решение задачи о смешанной конвекции при подъемном течении в плоском вертикальном канале для случая, когда плотности теплового потока на горячей стенке q_h и холодной стенке q_c различны: $q_c = kq_h$, $-1 \leq k \leq 1$. Метод решения задачи в этой работе аналогичен методу, использованному в [10]; он применим для неотрицательного изменения по длине канала средней массовой

температуры жидкости. Получено, что, когда холодная стенка является адиабатической ($k = 0$) или охлаждается с той же плотностью теплового потока, с которой нагревается горячая стенка ($k = -1$), при достаточно сильном влиянии свободной конвекции у холодной стенки появляются возвратные течения. Такое же явление, как показано в [14], наблюдается и при симметричном охлаждении. Число Нуссельта на горячей стенке ниже, чем при симметричном обогреве, но превышает значение Nu на холодной стенке. При определенном значении параметра k имеется разрыв числа Нуссельта на холодной стенке, связанный с близкими значениями температуры холодной стенки и средней массовой температуры жидкости.

В работе [14] было получено аналитическое решение задачи о ламинарной установившейся смешанной конвекции в плоском вертикальном канале для двух случаев: I — совпадения направлений свободной и вынужденной конвекции (нагревание жидкости при ее подъемном течении, что равносильно охлаждению жидкости при опускном течении), II — их противоположных направлений. Для случая II задача решена впервые. Для обоих случаев получены ранее отсутствующие данные по гидравлическому сопротивлению и сопротивлению трения; вклад последнего в суммарное сопротивление существен при относительно малом влиянии свободной конвекции. Решение задачи зависит от режимного параметра, пропорционального числу Грасгофа, базирующемуся на заданной плотности теплового потока на стенке Gr_q , и обратно пропорционального числу Рейнольдса Re . При нагревании для подъемного и опускного течений при сравнительно небольшом значении параметра $Gr_q/Re < 100$ теплоотдача и сопротивление трения зависят от него в одинаковой степени, хотя влияние силы плавучести для этих случаев имеет противоположный характер. По сравнению с вынужденным течением в случае I коэффициенты теплоотдачи и сопротивления трения увеличиваются, в случае II — уменьшаются. С возрастанием значения режимного параметра наблюдается более существенное влияние силы плавучести на Nu и коэффициент сопротивления трения при опускном течении по сравнению с подъемным течением. Получено, что влияние силы плавучести на теплоотдачу при течении в плоском канале более значительно, чем при течении в круглой трубе, особенно в случае II. Если в случае I число Нуссельта для круглой трубы приблизительно на 15 % ниже, чем для плоского канала, то в случае II это различие достигает сотен процентов.

Для граничного условия первого рода на стенках канала строгое аналитическое решение задачи получить невозможно. Поэтому практически все имеющиеся по этой тематике расчетно-теоретические исследования выполнены численными методами. При постановке задачи необходимо одновременно рассматривать развивающееся течение и теплообмен.

Проведем обзор работ в указанной области. Заметим, что подавляющее большинство имеющихся исследований проведены для случая совпадения направлений вынужденной и свободной конвекции (т.е. для случая I). Авторы работы [2] для круглой и плоской трубы решили задачу приближенно аналитически с использованием известного решения Левека, справедливого вблизи входа в обогреваемый участок трубы. Получена корреляционная зависимость для среднего по длине числа Нуссельта $\overline{Nu}^x$. На больших расстояниях от входа x влияние на теплообмен развития течения и свободной конвекции ослабевает; среднее число Нуссельта стремится к его предельному значению для стабилизированных течения и теплообмена с граничными условиями первого рода:

$\overline{\text{Nu}}^x = \frac{\text{Pe}}{2} \frac{d}{x} = 1/X$ ($\text{Pe} = \text{RePr}$ — число Пекле). Результаты экспериментов [15] тех же

авторов, полученные для воды и минерального масла, лишь качественно согласуются с расчетными данными, что объясняется весьма приближенным способом решения задачи.

Расчеты для круглой трубы проведены в работах [16–19]. В [16, 17] использован интегральный метод расчета, учитывалась зависимость от температуры плотности и динамического коэффициента вязкости. Отметим, что возможность применения интегрального метода для решения подобной задачи недостаточно обоснована. В [18, 19] использовался метод конечных разностей. В [18] на входе задавался развитый (параболический) профиль скорости. Для $\text{Pr} = 1$, $\text{Gr}/\text{Re} = 120$ (где $\text{Gr} = \beta g(d/2)^3(t_w - t_0)/\nu^2$ — число Грасгофа) представлены изменения вдоль трубы профилей скорости и температуры, а также числа Нуссельта. Корреляция, предложенная в [2], хорошо описывает изменение вдоль трубы среднего числа Нуссельта только для больших чисел Прандтля ($\text{Pr} = 10^3$). Интересно, что падение локального числа Нуссельта с ростом X в определенном диапазоне X становится менее заметным: на зависимости $\text{Nu}(X)$ появляется своеобразная «полка». Аналогичный характер изменения $\text{Nu}(X)$ получен в [19]. Рассмотрены два случая: на входе в трубу задавался либо параболический профиль скорости (развитое течение), либо равномерный профиль скорости (развивающееся течение). Для $\text{Pr} = 0,505$, $\text{Gr}/\text{Re} = 30$ представлены изменения вдоль трубы локального и среднего по длине числа Нуссельта, а также плотности теплового потока на стенке. Сравнение расчетных и экспериментальных данных, полученных авторами [19] для воздуха при $\text{Gr}/\text{Re} = 33$ по профилям скорости, температуры при средней массовой температуре жидкости, показало их некоторое количественное расхождение, особенно вблизи входа в канал. Сделан вывод о том, что при $\text{Gr}/\text{Re} < 1$ влиянием свободной конвекции на течение и теплообмен можно пренебречь.

Для плоского канала опубликовано также только несколько расчетных работ [11, 20–22]. Автор [11] провел аналитическое решение задачи путем разложения по малому параметру для граничных условий на стенке первого и второго рода. Для условия $t_w = \text{const}$ сделан вывод о том, что влиянием свободной конвекции можно пренебречь при $\text{Gr}/\text{Re} < 1$.

В работе [20] конвективные члены в уравнениях движения и энергии были линеаризованы. Решение этих уравнений записано в виде сумм бесконечных рядов, количество членов в которых при численном решении ограничивалось. Рассмотрена как свободная, так и смешанная конвекция, а число Прандтля Pr принималось равным 0,7. На входе в канал задавался равномерный профиль скорости, имелся предвключенный адиабатический участок, длина которого варьировалась. Для смешанной конвекции представлены результаты расчета средней по длине безразмерной плотности теплового потока на стенке при отсутствии указанного участка. Безразмерный параметр, выбранный авторами для характеристики степени влияния свободной конвекции, — число Рэлея $\text{Ra} = \text{Gr}_1 \text{Pr}$, $\text{Gr}_1 = \beta g(h/2)^4(t_w - t_0)/\nu^2$ (l — длина канала). При $\text{Ra} = 1 - 10^2$ влияние сво-

бодной конвекции незначительно в диапазоне чисел Грэтца $\text{Gz} = 0,1 - 100$, $\text{Gz} = \frac{(\text{Pe}/4)}{(l/h)}$.

Для больших значений числа Рэлея ($\text{Ra} = 10^3$) расчетные данные представлены лишь на значительном удалении от входа в канал и свидетельствуют о повышении средней плотности теплового потока на стенке при $\text{Gz} = 10$.

Авторы [21] исследовали смешанную конвекцию в плоском канале с учетом аксиального переноса импульса и тепла в уравнениях движения и энергии. Уравнение движения записано для переменных вихрь – функция тока. Перед обогреваемым участком (длина его равна ширине канала h) и за ним имелись адиабатические участки длиной h . Задача решена методом конечных разностей, причем с использованием условно устойчивой разностной схемы; длина $l/h = 3$ разбивалась на 30 интервалов. Рассматривалось подъемное течение при нагревании и охлаждении для $Pe = 5, 20$; $Re = 50, 100$; $Gr < 5 \cdot 10^4$. Представлены изменения вдоль канала профилей скорости и температуры, средней массовой температуры жидкости, а также зависимости от числа Грасгофа средних по длине числа Нуссельта и плотности теплового потока на стенке. Отметим, что эти данные носят частный характер, поскольку длина участка обогрева недостаточна для стабилизации течения и теплообмена, особенно при высоких значениях параметра $G = Gr/Re$. Кроме того, большой шаг сетки по продольной координате и невыполнение условия устойчивости схемы могут привести к значительной погрешности решения. Из результатов работы следует очевидный вывод: влияние аксиальной теплопроводности, проявляющееся при $Pe = 5$, ослабляет влияние свободной конвекции.

В работе [22] рассматривалось подъемное течение при нагревании для симметричного нагрева обеих стенок и для их несимметричного нагрева (разные температуры стенок). В расчетах задавался равномерный профиль скорости на входе в канал. Расчеты выполнены для $Pr = 0,72$ и $G = Gr/Re < 500$. Задача решена методом конечных разностей. Для симметричного нагрева представлены следующие результаты. На зависимости продольной скорости на оси канала от расстояния от входа при высоких значениях параметра G имеется минимум. Длина участка стабилизации продольной скорости возрастает с увеличением G . Перепад давления, необходимый для создания подъемного движения жидкости, рассчитанный с учетом гидростатического давления, с ростом G сначала уменьшается до нуля, а затем становится отрицательным. Это означает, что движение жидкости вверх обеспечивается силой плавучести. Этот вывод не совсем верен, что будет показано ниже при обсуждении результатов расчета. Из тепловых величин представлено только изменение вдоль канала средней массовой температуры жидкости, которая на начальном участке заметно возрастает с увеличением G . Несимметричность нагрева приводит к асимметрии профилей скорости и температуры и к уменьшению средней массовой температуры жидкости.

Из проведенного тематического обзора работ можно сделать следующие выводы. Исследован лишь случай совпадения направлений свободной и вынужденной конвекции, причем в ограниченном диапазоне режимных параметров. Отсутствуют данные по коэффициентам сопротивления.

Решение задачи для противоположного направления вынужденной и свободной конвекции связано с некоторыми трудностями. При значительном влиянии последней вблизи стенки появляется возвратное течение. Численные схемы для решения уравнений, записанных в приближении узкого канала, становятся неустойчивыми. Возникает вопрос, надо ли решать задачу с возвратными течениями для ламинарного режима. Влияние силы плавучести способствует переходу от ламинарного режима к турбулентному. Об этом свидетельствуют имеющиеся экспериментальные данные, приведенные, например, в [5, 23], и некоторые теоретические работы [11, 24]. Появление точки перегиба на профиле продольной скорости и тем более возвратного течения приводит к переходу ламинарного режима течения к турбулентному. Однако на практике существуют факторы, подавляющие турбулентность, например, термическое ускорение потока или

продольное магнитное поле при течении электропроводной жидкости. Безусловно, представляет интерес расчет ламинарной смешанной конвекции при наличии возвратных течений. В этом случае для решения задачи следует использовать полные уравнения Навье–Стокса, что выходит за рамки представленной работы.

В настоящей работе задача решена на основе приближения узкого канала. Поэтому диапазон значений параметра G , определяющих степень влияния свободной конвекции, в случае для подъемного течения (и нагревания) был существенно больше, чем для опускного течения. Расчеты проведены для плоского канала. Плоский канал является предельным случаем прямоугольного щелевого канала с малым отношением длин его сторон. Как отмечено выше, такие каналы используются в высокоэффективных теплообменных аппаратах. Гидродинамические и тепловые (при $t_w = \text{const}$) характеристики для течений в щелевом и плоском каналах близки друг к другу [25]. Для двух случаев исследовано влияние параметра G , числа Прандтля, а также влияние профиля скорости на входе (развивающегося или развитого течения) на профили скорости, температуры, число Нуссельта, коэффициенты сопротивления.

1. Постановка задачи

Решалась система уравнений движения, неразрывности и энергии для ламинарного течения жидкости с постоянными свойствами в плоском вертикальном канале. В уравнении движения учитывалась сила плавучести, в уравнении энергии пренебрегалось аксиальной теплопроводностью, сжимаемостью и диссипацией. Система имеет вид

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} \pm \rho_w g \pm \beta g \rho (t_w - t) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Здесь u , v — продольная и поперечная составляющие скорости, t — температура, p — давление, x , y — продольная и поперечная координаты, ρ , μ , λ , c_p , β — плотность, динамический коэффициент вязкости, теплопроводность, изобарная теплоемкость, коэффициент термического расширения соответственно; g — ускорение свободного падения; индексом «w» обозначены значения при температуре стенки.

Поясним физический смысл второго и третьего членов в уравнении движения (1). Их сумма равна ρg , а плотность представлена согласно соотношению Буссинеска: $\rho - \rho_w = -\beta \rho (t - t_w)$. Верхний знак указанных членов в (1) и в последующем соответствует одинаковому направлению вектора скорости и ускорения свободного падения, т.е. опускному течению жидкости, нижний знак — подъемному течению жидкости.

Система уравнений (1)–(3) решалась со следующими граничными условиями. На стенках канала $u = v = 0$, $t = t_w$ при $y = \pm h/2$ (h — ширина канала), на оси $\partial u / \partial y = \partial t / \partial y = 0$ при $y = 0$. На входе в канал при $x = 0$ задается равномерный профиль температуры $t = t_0$ и равномерный или развитый профиль скорости: $u = u_0$ либо $u / u_0 = 1,5[1 - (2y/h)^2]$, где u_0 — средняя по сечению скорость.

Приведем систему (1)–(3) к безразмерному виду:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = P + \theta G + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{4}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}, \quad (6)$$

здесь $U = u/u_0$, $V = 2\nu \text{Re}/u_0$ — безразмерные продольная и поперечная скорость, $\theta = (t_w - t)/(t_w - t_0)$ — температура, $X = x/(h \text{Re})$, $Y = 2y/h$ — расстояния от входа и оси канала, $P = \frac{h^2}{4\mu u_0} \left(-\frac{dp}{dx} \pm g\rho_w \right)$ — безразмерный градиент давления, включающий гидравлическое и гидростатическое сопротивление; $G = \pm \text{Gr}/\text{Re}$, $\text{Gr} = \beta g h^3 (t_w - t_0)/\nu^2$ — число Грасгофа; $\text{Re} = u_0 h/\nu$ — число Рейнольдса.

Поскольку имеется ось симметрии ($Y=0$), решение задачи находится в области $Y \in [0, 1]$. Приведем граничные условия для уравнений (4)–(6). При $X=0$ $U=1$ (равномерный профиль скорости) или $U=1,5(1-Y^2)$ (развитый профиль скорости); $V=0$; $\theta=1$. При $Y=0$ имеем $\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$, при $Y=1$ — $U=V=\theta=0$.

Решение задачи зависит от параметра G и числа Прандтля Pr . Параметр G учитывает влияние силы плавучести на течение и теплообмен. Знак G зависит от относительных направлений движения жидкости и вектора силы тяжести, а также от того, нагревается ли жидкость при движении ($t_w > t_0$) или охлаждается ($t_w < t_0$). Знак G является отрицательным в случае I — совпадения направлений вынужденной и свободной конвекции при подъемном течении и нагревании (или при опускном течении и охлаждении) и положительным в случае II — противоположных направлений вынужденной и свободной конвекции при опускном течении и нагревании (или при подъемном течении и охлаждении).

2. Метод численного решения

Задача решена методом конечных разностей с использованием итерационной двухслойной неявной безусловно устойчивой схемы первого порядка точности по X и второго — по Y . На каждом слое по X решение уравнений (4), (6) находилось прогонкой по Y . Безразмерный градиент давления P вычислялся методом расщепления с привлечением интегрального уравнения неразрывности: $\int_0^1 U(Y) dY = 1$. Безразмерная поперечная скорость V определялась из уравнения неразрывности (5).

По X применялось логарифмическое разбиение со сгущением сетки вблизи входа в канал. При безразмерной длине канала $X_{\text{ch}} = 0,5$, на которой течение и теплообмен стабилизируются, число разбиений по X составляло 10^4 . По Y использовалось равномерное разбиение с числом точек, равным 200. Верификация полученных результатов численного решения задачи в рамках принятой физической постановки может быть проведена лишь путем вычисления погрешности решения. На основании серии специальных расчетов

установлено, что такие шаги сетки обеспечивают погрешность расчета, не превышающую 5 % вблизи входа в канал и менее 1,5 % у его выхода.

В результате расчета находились безразмерные продольная, поперечная скорости и температура: $U(X, Y)$, $V(X, Y)$, $\theta(X, Y)$. Вычислялись безразмерные тепловой поток на стенке $Q = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=1}$ и средняя массовая температура жидкости $\theta_b = \int_0^1 \theta(Y) U(Y) dY$.

Баланс уравнения энергии, т.е. равенство θ_b балансовой температуре $1 - 4XQ / Pr$, выполнялся с погрешностью до нескольких процентов вблизи входа в канал и менее 1 % на участке стабилизации.

Число Нуссельта $Nu = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=h/2} h / (t_w - t_b)$ находилось по соотношению $Nu = Q / \theta_b$.

Проинтегрировав по сечению канала уравнение движения, получим соотношение для коэффициента гидравлического сопротивления $\xi^P = -(dp / dx) 2h / (\rho u_0^2)$:

$$\xi^P = \xi^\tau + \xi^c + \xi^g + \xi_0^g,$$

где $\xi^\tau = \frac{-4\mu(\partial u / \partial y)_{y=h/2}}{\rho u_0^2}$ — коэффициент сопротивления трения, $\xi^c = 4 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h/2} \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 dy$ —

коэффициент сопротивления, к которому приводит наличие конвективных членов в левой части уравнения движения, $\xi^g = -2 \frac{G}{Re} \int_0^1 \theta dY$ — коэффициент сопротивления, связанного с силой плавучести, $\xi_0^g = \mp 2gh / u_0^2$ — коэффициент гидростатического сопротивления, обусловленного весом столба жидкости.

Для развитого вынужденного ламинарного течения в плоском канале имеем $\xi^c = \xi^g = \xi_0^g = 0$, $\xi^P = \xi^\tau = \xi_0 = 24 / Re$.

Кратко поясним физический смысл коэффициентов сопротивления ξ^c , ξ^g , ξ_0^g . Коэффициент ξ^c учитывает вклад в перепад давления, необходимый для обеспечения продвижения жидкости вдоль канала, сопротивления, обусловленного перестройкой профиля скорости. При ускорении потока $\xi^c > 0$, при замедлении — $\xi^c < 0$.

При движении жидкости вниз (опускное течение) наличие столба жидкости приводит к уменьшению требуемого перепада давления ($\xi_0^g < 0$); при движении жидкости вверх (подъемное течение) перепад давления возрастает ($\xi_0^g > 0$).

Коэффициент ξ_0^g учитывает изменение веса столба жидкости благодаря уменьшению ее плотности при нагревании или увеличению плотности при охлаждении. Как следует из уравнения движения (4), знак этого коэффициента противоположен знаку параметра G . При нагревании жидкости знаки ξ^g и ξ_0^g совпадают.

Приведенные выше коэффициенты вычислялись следующим образом:

$$\xi^\tau / \xi_0 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=1}, \quad \xi^c / \xi_0 = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial X} \int_0^1 U^2 dY,$$

$$\xi^g / \xi_0 = -\frac{1}{12} G \int_0^1 \theta dY, \quad (\xi^p - \xi_0^g) / \xi_0 = P / 12.$$

Поскольку функция P — безразмерный градиент давления, включающий гидростатическое сопротивление, — находится из системы гидродинамических уравнений, можно оценить выполнение баланса импульса:

$$P = -4 \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=1} + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^1 U^2 dY - G \int_0^1 \theta dY.$$

Этот баланс выполнялся с погрешностью до нескольких процентов вблизи входа в канал и менее 1 % на участке стабилизации.

3. Результаты расчетов

Расчеты проведены для двух случаев течения на входе в канал: 1) для развивающегося течения (на входе задан равномерный профиль скорости) и 2) для развитого течения (на входе задан параболический профиль скорости) и для двух значений числа Прандтля $Pr = 0,7$ и 7 . Диапазон изменения параметра G ограничен значениями, при которых появляется возвратное течение, когда разностная схема становится неустойчивой. При нагревании, когда температура стенки t_w выше температуры жидкости на входе t_0 , и подъемном течении возвратные течения возникают вблизи оси канала. Этот случай аналогичен случаю охлаждения ($t_w < t_0$) и опускного течения. Расчеты возможно провести для $|G| < 500 - 600$. При нагревании и опускном течении (или при охлаждении и подъемном течении) возвратное течение появляется у стенки при значениях параметра $G > 150 - 200$.

В качестве безразмерной продольной координаты на рисунках, приведенных ниже, выбрано расстояние от входа в канал $X = x / (h Re Pr)$, поскольку длина участка стабилизации течения и теплообмена обратно пропорциональна значению числа Прандтля. Рис. 1–8 построены для равномерного профиля скорости на входе в канал.

На рис. 1 показано изменение числа Нуссельта Nu вдоль канала для подъемного течения и нагревания. При увеличении параметра $|G|$ число Нуссельта возрастает, особенно вблизи входа в канал. Вдали от входа Nu стремится к его значению для ламинарного развитого течения в плоском канале при тепловом граничном условии на стенке первого рода: $Nu_\infty = 3,77$. Длина участка стабилизации также возрастает с ростом $|G|$. Результаты расчета качественно согласуются с расчетными данными, приведенными в [19]. На некотором расстоянии от входа изменение Nu вдоль канала замедляется. Своеобразная «полка» на зависимости $Nu(X)$ отмечена и в расчетах [19]. Как будет показано ниже, такой характер зависимости

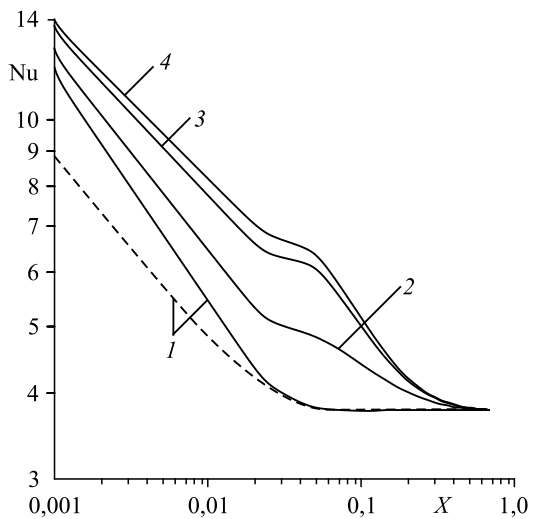


Рис. 1. Изменение числа Нуссельта вдоль канала для подъемного течения при нагревании жидкости.

$|G| = 0$ (1), 200 (2), 500 (3), 600 (4),
сплошные линии — $Pr = 0,7$,
штриховые линии — $Pr = 7$.

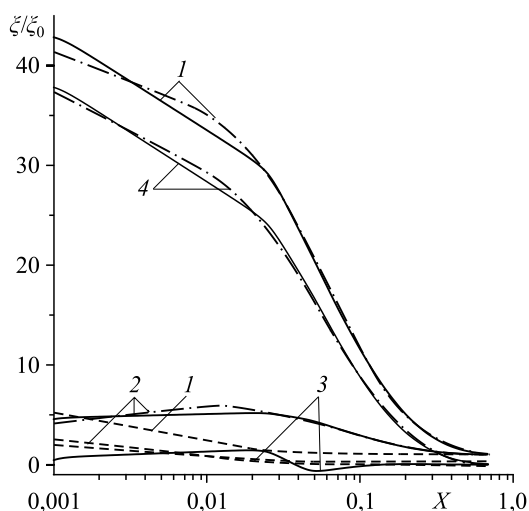


Рис. 2. Изменение коэффициентов сопротивления вдоль канала для подъемного течения при нагревании жидкости.

1 — ξ_Σ^p / ξ_0 , 2 — ξ^τ / ξ_0 , 3 — ξ^c / ξ_0 ,

4 — ξ^g / ξ_0 , сплошные линии — $|G| = 500$,

$Pr = 0,7$, штриховые линии — $|G| = 0$, $Pr = 0,7$,

штрихпунктирные линии — $|G| = 500$, $Pr = 7$.

обусловлен влиянием силы плавучести на продольную скорость. Увеличение числа Прандтля приводит к уменьшению числа Нуссельта на начальном участке, однако это уменьшение становится менее заметным при высоких значениях $|G|$.

На рис. 2 представлены результаты расчета коэффициентов сопротивления. Вклад в гидравлическое сопротивление $\xi_\Sigma^p = \xi^p - \xi_0^g$ конвективного сопротивления ξ^c , обусловленного перестройкой профиля скорости, значителен только при $G = 0$ на начальном участке. Однако при высоких значениях $|G|$ на некотором участке канала наблюдается замедление потока: $\xi^c < 0$. Коэффициент сопротивления трения ξ^τ сопоставим с коэффициентом гидравлического сопротивления ξ^p лишь при $G = 0$. При $|G| = 500$ сопротивление трения в несколько раз выше, чем при $G = 0$. При существенном влиянии термогравитационной конвекции основной вклад в коэффициент ξ_Σ^p на начальном участке дает коэффициент ξ^g .

Следует отметить, что на зависимость $\xi_\Sigma^p(X)$ влияет то, какая плотность выбрана базовой в определении коэффициентов сопротивления. Если базовая плотность — это плотность не при температуре стенки t_w , а при температуре на входе t_0 , как в работе [22], то на рис. 2 кривые 1, 4 (для $|G| = 500$) опустятся вниз на величину $|G|$. Вдали от входа отношение ξ_Σ^p / ξ_0 не будет стремиться к 1. Перепад давления, необходимый для обеспечения движения жидкости вверх, станет отрицательным, как в работе [22]. Это неверно с физической точки зрения.

В действительности для нахождения градиента давления, необходимого для прокачки жидкости по всей длине канала, нельзя пользоваться соотношением Буссинеска. Это соотношение справедливо только вблизи базовой температуры, поскольку является лишь первым членом разложения в ряд Тейлора плотности по температуре. На входе в канал средняя по сечению температура $\bar{t}$ близка к t_0 , а на участке стабилизации — к t_w . Для вычисления коэффициента сопротивления, обусловленного силой плавучести, правильнее использовать соотношение:

$$\xi^g(X) = \mp g \frac{2h}{u_0^2} \int_0^1 \frac{\rho[t(X)]}{\rho_0} dY = \mp g \frac{2h}{u_0^2} \bar{\rho} / \rho_0.$$

Должен быть задан еще один режимный параметр $\xi_0^g = \mp gh / u_0^2$, а также зависимость $\rho(t)$. В условиях действия силы плавучести для нагревания и подъемного течения дополнительный перепад давления расходуется на преодоление веса столба жидкости,

который уменьшается благодаря термогравитационной силе, поскольку средняя по сечению плотность $\bar{\rho}$ падает вдоль канала. Напротив, при опускном течении и нагревании вес столба жидкости способствует появлению дополнительного перепада давления, который также уменьшается вдоль канала под действием свободной конвекции. В обоих случаях вклад термогравитационной силы в коэффициент гидравлического сопротивления равен $\xi^g = \mp \xi_0^g (\bar{\rho}(X)/\rho_0 - 1)$.

Для каплярной жидкости при вычислении коэффициента гидростатического сопротивления зависимостью плотности от температуры можно пренебречь, поэтому $\xi^g = \mp \xi_0^g$. Для газа можно положить $\bar{\rho}/\rho_0 = T_0/\bar{T} = 1/[\Theta + \bar{\theta}(1 - \Theta)]$, где $\Theta = T_w/T_0$ — температурный фактор. Поскольку значение средней по сечению безразмерной температуры $\bar{\theta}$ всегда меньше единицы, при нагревании ($\Theta > 1$) имеем $|\xi^g| < \xi_0^g$, при охлаждении ($\Theta < 1$) получим $|\xi^g| > \xi_0^g$.

На рис. 3, 4 показаны профили продольной скорости и температуры. На их изменение вдоль канала определяющее влияние оказывает сила плавучести. В этих условиях возрастает длина стабилизации течения и теплообмена, что видно на рисунках. Между сечениями $X = 0,048$ и $X = 0,072$ (кривые 2 и 3) происходит наиболее значительное преобразование профиля скорости, который принимает М-образную форму; падение по длине числа Нуссельта замедляется (см. рис. 1). Как было отмечено выше, между указанными сечениями наблюдается также и замедление потока жидкости ($\xi^c < 0$), поскольку скорость в большой области у оси канала уменьшается. Благодаря действию силы плавучести вблизи входа в канал возрастают градиенты скорости и температуры на стенке, что приводит к увеличению сопротивления трения и плотности теплового потока.

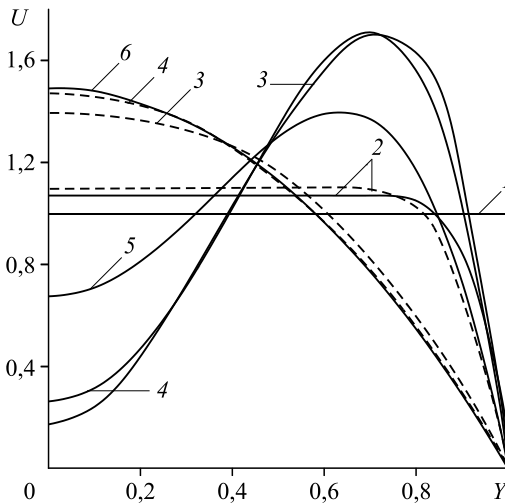


Рис. 3. Профиль скорости для подъемного течения при нагревании жидкости; $Pr = 0,7$.

$X = 0$ (1), 0,024 (2), 0,048 (3), 0,072 (4), 0,097 (5), 0,70 (6); сплошные линии — $|G| = 500$, штриховые линии — $|G| = 0$.

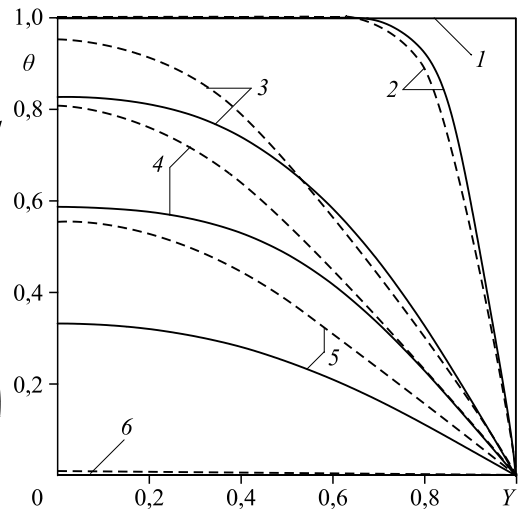


Рис. 4. Профиль температуры для подъемного течения при нагревании жидкости; $Pr = 0,7$.

Обозначения см. на рис. 3.

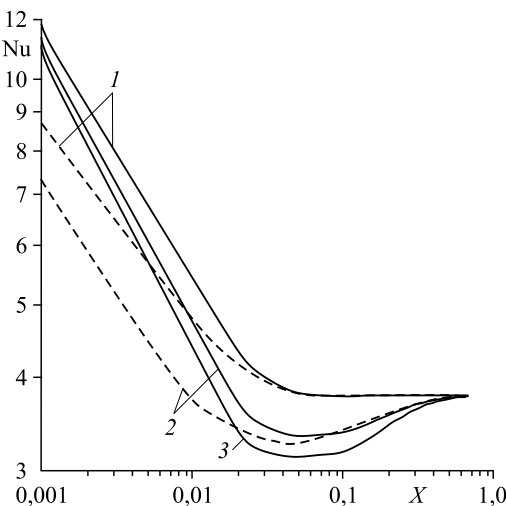


Рис. 5. Изменение числа Нуссельта вдоль канала для опускного течения при нагревании жидкости.
 $G = 0$ (1), 100 (2), 150 (3), сплошные линии — $Pr = 0,7$, штриховые линии — $Pr = 7$.

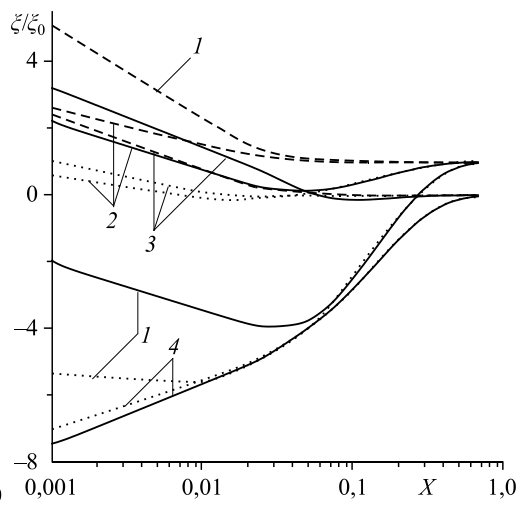


Рис. 6. Изменение коэффициентов сопротивления вдоль канала для опускного течения при нагревании жидкости.
1 — ξ_{Σ}^p / ξ_0 , 2 — ξ^{τ} / ξ_0 , 3 — ξ^c / ξ_0 , 4 — ξ^g / ξ_0 ;
сплошные линии — $G = 100$, $Pr = 0,7$, штриховые линии — $G = 0$, $Pr = 0,7$, пунктирные линии — $G = 100$, $Pr = 7$.

На рис. 5–8 представлены результаты расчета для опускного течения и нагревания. Влияние свободной конвекции на число Нуссельта, коэффициенты сопротивления, профили продольной скорости и температуры носит прямо противоположный характер по сравнению со случаем подъемного течения. На зависимостях $Nu(X)$, $\xi^{\tau}(X)$ при опускном течении наблюдается минимум (рис. 5, 6). Скорость течения уменьшается у стенки и возрастает вблизи оси канала (рис. 7). Влияние свободной конвекции приводит к уменьшению градиента температуры на стенке (рис. 8) и плотности теплового потока.

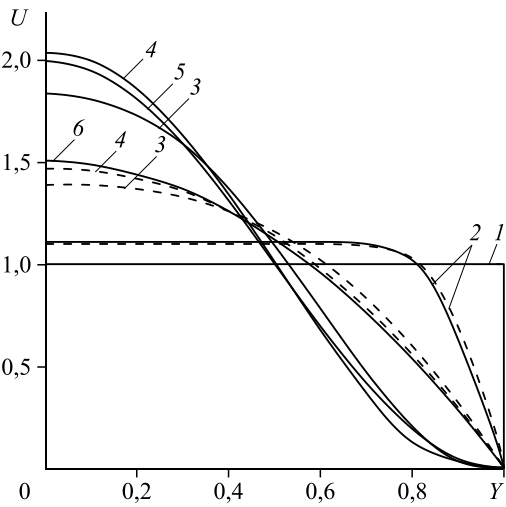


Рис. 7. Профиль скорости для опускного течения при нагревании жидкости; $Pr = 0,7$.
 $X = 0$ (1), 0,024 (2), 0,048 (3), 0,072 (4), 0,097 (5), 0,70 (6);
сплошные линии — $G = 150$, штриховые линии — $G = 0$.

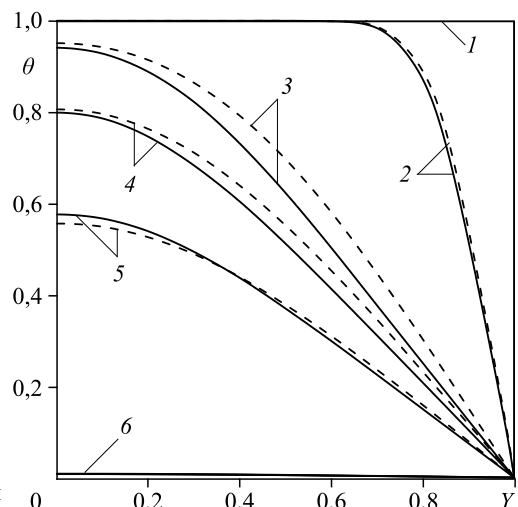


Рис. 8. Профиль температуры для опускного течения при нагревании жидкости; $Pr = 0,7$.
Обозначения см. на рис. 7.

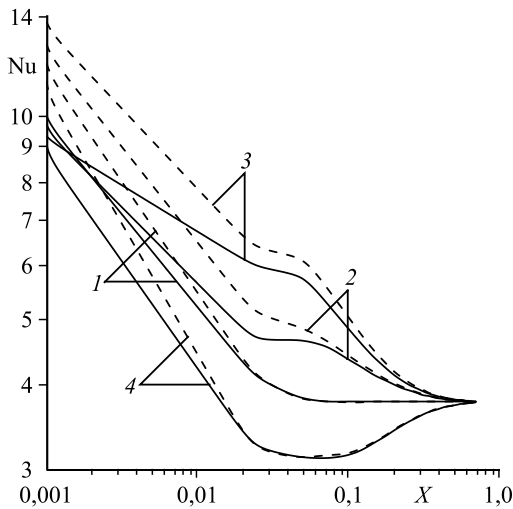


Рис. 9. Изменение числа Нуссельта вдоль канала для развитого течения на входе; $Pr = 0,7$.

1 — $G = 0, 2, 3$ — подъемное течение,
 $|G| = 200$ (2), 500 (3); 4 — опускное течение $G = 150$;
 сплошные линии — параболический профиль скорости на входе, штриховые линии — равномерный профиль скорости на входе.

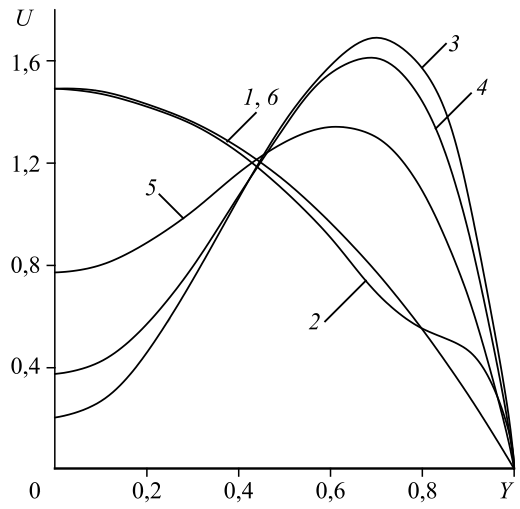


Рис. 10. Профиль скорости для подъемного течения при развитом течении на входе.

$|G| = 500$; $Pr = 0,7$;
 $X = 0$ (1), 0,024 (2), 0,048 (3), 0,072 (4),
 0,097 (5), 0,70 (6).

Как и для подъемного течения, длина участка стабилизации течения и теплообмена возрастает. Увеличение числа Прандтля ведет к некоторому ослаблению степени влияния свободной конвекции на гидродинамические и тепловые величины.

Расчеты проведены не только для равномерного профиля скорости на входе (случай 1), но и для развитого течения на входе в канал (случай 2). Характер изменений числа Нуссельта, а также коэффициентов сопротивления вдоль канала одинаков в обоих случаях. Однако вблизи входа в канал в случае 2 наблюдается менее значительное влияние свободной конвекции на течение и теплообмен, чем в случае 1. При увеличении расстояния от входа значения всех гидродинамических и тепловых величин для обоих случаев совпадают.

На рис. 9 видно, что число Нуссельта при подъемном течении вблизи входа для случая 2 выше, а для случая 1 — ниже, чем при $G = 0$. Сравнивая профили продольной скорости для подъемного течения на рис. 3 и 10, можно сделать вывод, что заметное различие этих профилей для случаев 1 и 2 наблюдается только при $X < 0,048$. Примечательно, что на длину стабилизации не влияет форма профиля скорости на входе в канал. Расчеты показали, что изменение числа Прандтля приводит к качественно одинаковым для обоих случаев изменениям гидродинамических и тепловых характеристик течения.

Заключение

Получены новые, важные для практических приложений данные о влиянии свободной конвекции на теплоотдачу и сопротивление при граничном условии $t_w = \text{const}$ для подъемного и опускного течения (при нагревании жидкости) в плоском канале. Подробное исследование гидродинамики и теплообмена при противоположном направлении свободной и вынужденной конвекции (при нагревании и опускном течении, что равносильно охлаждению при подъемном течении) ранее не проводилось.

Изучены вклады различных составляющих в коэффициент гидравлического сопротивления. Рассмотрены причины увеличения коэффициента сопротивления трения при подъемном течении и его уменьшения при опускном течении по сравнению со случаем отсутствия влияния силы плавучести. Предложен способ расчета коэффициента гидростатического сопротивления.

Показано, что форма профиля скорости на входе в канал (развивающееся или развитое течение) влияет на гидродинамические и тепловые характеристики только на небольших расстояниях от входа и не влияет на длину стабилизации течения и теплообмена.

В результате расчетов получено, что увеличение числа Прандтля приводит к ослаблению влияния свободной конвекции на течение и теплообмен.

Список литературы

1. Валуева Е.П., Гаряев А.Б., Клименко А.В. Особенности гидродинамики и теплообмена при течении в микроканальных технических устройствах. М.: Изд. дом МЭИ, 2016. 138 с.
2. Martinelli R.C., Boelter L.M.K. The analytical prediction of superposed free and forced viscous convection in vertical pipe // Univ. Calif. Publ. Engng. 1942. Vol. 5, No. 2. P. 23–58.
3. Остроумов Г.А. Математическая теория установившейся теплопередачи в круглой вертикальной скважине при суперпозиции вынужденной и свободной ламинарной конвекции // Журн. техн. физики. 1950. Т. 20, вып. 6. С. 750–757.
4. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1952. 283 с.
5. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
6. Гебхардт Б., Джалурия Й., Махаджан Р.Л., Саммакеа Б. Свободноконвективные течения. Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991. 678 с.
7. Hallman T.M. Combined forced and free-laminar heat transfer in vertical tubes with uniform internal heat generation // Trans. ASME. Ser. C. 1956. Vol. 78. P. 1831–1841.
8. Tao L.N. Heat transfer of combined free and forced convection in circular and sector tubes // Appl. Sci. Res. 1960. Vol. A9, No. 5. P. 357–368.
9. Поляков А.Ф. Вязкостно-гравитационное течение в трубах при малом влиянии термогравитации // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 1. С. 122–130.
10. Tao L.N. On combined free and forced convection on channels // Trans. ASME. Ser. C. 1960. Vol. 82, No. 3. P. 233–238.
11. Yao L.S. Free and forced convection in the entry region of a heated vertical channel // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1983. Vol. 26, No. 1. P. 65–72.
12. Поляков А.Ф. Установившееся вязкостно-термогравитационное течение капельной жидкости и теплообмен в вертикальной полости при асимметричных тепловых условиях // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52, № 1. С. 78–83.
13. Поляков А.Ф. Вязкостно-термогравитационная конвекция и теплообмен в вертикальной полости при различных тепловых условиях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 5. С. 758–764.
14. Валуева Е.П. Ламинарная смешанная конвекция в вертикальном плоском канале с постоянной плотностью теплового потока на стенке // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 408–415.
15. Martinelli R.C., Southwell C.J., Alves G. et al. Heat transfer and pressure drop for a fluid flowing in the viscous region through a vertical pipe // Trans. ASME. 1942. Vol. 38, No. 3. P. 493–530.
16. Pigford R.L. Nonisothermal flow and heat transfer inside vertical tubes // Chem. Eng. Progr. Symp. Ser. 1955. Vol. 51. P. 79–92.
17. Rosen E.M., Hanratty T.J. Use of boundary layer theory to predict the effect of heat transfer on the laminar flow field in a vertical tube with a constant temperature wall // AIChE J. 1961. Vol. 7, No. 1. P. 112–123.
18. Marnier W.J., McMillan H.K. Combined free and forced laminar convection in a vertical tube with constant wall temperature // J. Heat Transfer. 1970. Vol. 92, No. 3. P. 559–562.
19. Zeldin B., Schmidt F.W. Developing flow with combined forced-free convection in an isothermal vertical tube // J. Heat Transfer. 1972. Vol. 94, No. 2. P. 211–221.
20. Quintiere J., Mueller W.K. An analysis of laminar free and forced convection between finite vertical parallel plates // J. Heat Transfer. 1973. Vol. 95, No. 1. P. 53–59.
21. Чжоу Л.К., Хусейн С.Р., Кампо А. Влияние свободной конвекции и осевой теплопроводности на теплообмен в условиях вынужденной конвекции в вертикальном канале при низких числах Пекле // Теплопередача. 1984. Т. 106, № 2. С. 40–46.

22. **Aung W., Worku G.** Developing flow and flow reversal in a vertical channel with asymmetric wall temperature // J. Heat Transfer. 1986. Vol. 108, No. 2. P. 299–304.
23. **Steiner A.** On the reverse transition of a turbulent flow under the action of buoyancy forces // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 47. P. 503–512.
24. **Collins M.W.** Heat transfer by laminar combined convection// Proc. 6th Intern. Heat Transfer Conf. Toronto. 1978. Vol. 1. P. 25–30.
25. **Валуева Е.П., Пурдин М.С.** Теплообмен при ламинарном течении в прямоугольных каналах // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 893–904.

*Статья поступила в редакцию 15 декабря 2022 г.,
после переработки — 6 февраля 2023 г.,
принята к публикации 2 марта 2023 г.*