

УДК 539.3, 539.89, 531.3

## ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕХ СТРУКТУР: ДВУХ ВЛОЖЕННЫХ ОДНА В ДРУГУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ИХ ЛОКАЛЬНОГО РЕБРА

В. А. Крысько, С. С. Вецель, В. В. Добрян, О. А. Салтыкова

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.,  
410054 Саратов, Россия  
E-mails: anton.krysko@gmail.com, sergikvec@mail.ru, dobriy88@yandex.ru,  
olga\_a\_saltykova@mail.ru

Исследуется хаотическая динамика двух цилиндрических оболочек, вложенных одна в другую с зазором, и подкрепляющей их балки также с зазором, на которую действует распределенная знакопеременная нагрузка. Задача решается с помощью методов нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений. В качестве исходных уравнений используются уравнения Новожилова для геометрически нелинейных структур. Контактное давление определяется методом Кантора. С помощью метода конечных элементов по пространственным переменным уравнения в частных производных для балки и оболочек сводятся к задаче Коши, которая решается методом явного интегрирования (методом Эйлера). Изучается хаотическая синхронизация исследуемой системы.

**Ключевые слова:** хаотическая динамика, метод конечных элементов, замкнутая цилиндрическая оболочка, балка, контактное взаимодействие, хаотическая синхронизация.

DOI: 10.15372/PMTF20170313

Исследованию нелинейной динамики балок, пластин и оболочек посвящено большое количество работ российских и зарубежных авторов [1–6]. Контактные задачи теории оболочек и пластин изучаются в [7, 8]. Проблемы нелинейной динамики слоистых механических систем рассматриваются в работах [9, 10]. В настоящей работе исследуется сильнонелинейная динамика контактных задач теории распределенных механических структур. Поставленная задача является принципиально новой.

**Постановка задачи.** Рассматривается нелинейная динамика сложных механических систем в виде двухслойных замкнутых цилиндрических оболочек, подкрепленных локально расположенной балкой. Между элементами структуры имеются зазоры, взаимодействие элементов учитывается в краевых условиях (рис. 1).

К внешней поверхности балки приложена распределенная знакопеременная нагрузка  $q_2(x, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$ , где  $\omega_p$  — частота;  $q_2(x, t)$  — амплитуда вынужденных колебаний.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-11-10138).

© Крысько В. А., Вецель С. С., Добрян В. В., Салтыкова О. А., 2017

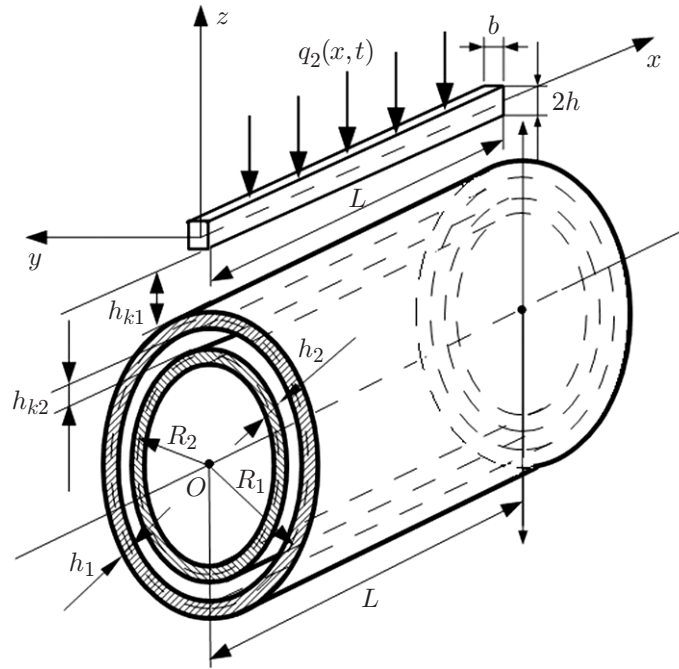


Рис. 1. Исследуемые структуры и схема их нагружения

При решении задачи в качестве исходных дифференциальных уравнений приняты уравнения Новожилова [1] для балки, полученные из уравнения для пластины в предположении, что перемещение  $v = 0$ . При этом задача сводится к задаче об изгибе балки:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx} + z\chi_{xx} + z^2\gamma_{xx},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \right], & \chi_{xx} &= \left( 1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \gamma_{xx} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right], & \theta &= -\frac{\partial \hat{w}}{\partial x}, & \chi &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, \end{aligned}$$

$\hat{u}$ ,  $\hat{w}$  — перемещение срединной линии балки. Материал балки полагается упругим, изотропным, его поведение подчиняется закону Гука.

Из работы [1] для оболочек, как и для балки, получаем исходные уравнения, в которых учитываются квадраты первых производных от перемещения срединной поверхности оболочки  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  [1]. Заметим, что компоненты деформации приняты в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx_i} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{xy_i} &= \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \frac{\partial w_i}{\partial y_i}. \end{aligned}$$

Выражения для  $\varepsilon_{yy_i}$ ,  $\varepsilon_{zz_i}$ ,  $\varepsilon_{xz_i}$ ,  $\varepsilon_{yz_i}$  можно получить аналогичным образом путем круговой подстановки индексов. В такой постановке задачи не имеет решений ни в статическом случае, ни в случае нелинейной динамики.

Граничные условия задаются в следующем виде:

— при  $x = 0$  для балки

$$y \in [-b/2; b/2], z \in [-h; h]: \quad u(x, y, z) = 0, \quad v(x, y, z) = 0, \quad w(x, y, z) = 0; \quad (1)$$

— при  $x = 0$  для оболочек

$$y \in [0 \pm R_i; 0 \pm (R_i + h_i)], z \in [-h_i; h_i]: \quad u_i(x, y, z) = 0, \quad v_i(x, y, z) = 0, \quad w_i(x, y, z) = 0;$$

— при  $x = L$  для балки

$$y \in [-b/2; b/2], z \in [-h; h]: \quad u(x, y, z) = 0, \quad w(x, y, z) = 0;$$

— при  $x = L$  для оболочек

$$y \in [0 \pm R_i; 0 \pm (R_i + h_i)], z \in [-h_i; h_i]: \quad u_i(x, y, z) = 0, \quad w_i(x, y, z) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(0, x, y, z) = v_i(0, x, y, z) = w_i(0, x, y, z) = 0, \\ \dot{u}_i(0, x, y, z) = \dot{v}_i(0, x, y, z) = \dot{w}_i(0, x, y, z) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

**Метод решения.** С помощью метода конечных элементов по пространственным переменным уравнения в частных производных для балки и оболочек сводятся к задаче Коши. Задача рассматривается в упругой постановке с учетом геометрической нелинейности по В. В. Новожилову [1]. Задача Коши решается с использованием метода явного интегрирования (метода Эйлера). Рассматриваемая система является консервативной.

Конечно-элементная модель каждой оболочки содержит 25 000 узлов, балки — 16 000 элементов. По толщине балка разбивается на три конечных элемента, по длине — на 50. Количество элементов по толщине и длине объектов выбиралось в соответствии с принципом Рунге.

Расчеты проводились с использованием трехмерного объемного восьмиузлового конечного элемента с равномерным распределением напряжений по объему. Для исключения искажений формы элементов использовалась процедура Фланагана — Бельчико.

Оболочки и балка изготавливались из стали марки 12X18H10T со следующими физико-механическими характеристиками [11]: модулем Юнга  $E = 209 \cdot 10^9$  Па, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , плотностью  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Длина балки и оболочек  $L = 200$  мм, радиусы оболочек  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 98$  мм, толщины оболочек  $h_1 = h_2 = 2$  мм. Расстояние между слоями структуры  $h_{k1} = h_{k2} = 2$  мм, толщина балки  $2h = 2$  мм, значение частоты действующих на балку вынужденных колебаний  $\omega_p = 142$  Гц находится в окрестности резонансной частоты.

Граничные условия несимметричны, при  $x = 0$  балка и оболочки жестко закреплены (1), при  $x = L$  — шарнирно оперты (2). Используются начальные условия (3).

**Анализ результатов расчетов.** Анализ численных результатов осуществляется с помощью методов нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений, для каждого элемента структуры строятся сигналы, фазовые портреты, сечения Пуанкаре, автокорреляционные функции, фурье-спектры, применяются двумерные и трехмерные вейвлет-преобразования Морле, с использованием различных методов [12–14] анализируются знаки показателей Ляпунова, вычисляются размерность Каплана — Йорке и энтропия Колмогорова. С помощью вейвлет-преобразований можно исследовать изменение частотных характеристик сигнала в каждый момент времени, а не интегрально (как при фурье-анализе), что очень важно при изучении хаотической динамики механических систем. Вейвлет-анализ позволяет определять частотные характеристики исследуемой структуры. В работе [9] проведено сравнение вейвлетов различного вида и сделан

Значения старшего показателя Ляпунова, вычисленные с помощью различных алгоритмов, а также значения размерности Каплана — Йорке, энтропии Колмогорова при  $q_2 = 5884, 11\,770$  Па

Тип элемента	Старший показатель Ляпунова			Размерность Каплана — Йорке	Энтропия Колмогорова
	Алгоритм Вольфа [12]	Алгоритм Кантца [13]	Алгоритм Розенштейна [14]		
$q_2 = 5884$ Па					
Балка	1,418 41	3,322 626	4,338 235	2,095 65	0,049 84
Внешняя оболочка	5,249 66	2,169 120	2,100 928	2,057 43	0,365 67
Внутренняя оболочка	1,417 53	3,718 784	3,070 476	2,357 63	0,363 50
$q_2 = 11\,770$ Па					
Балка	5,635 84	4,588 060	4,906 143	2,051 00	0,031 21
Внешняя оболочка	1,038 29	3,435 726	3,231 477	1,133 01	0,051 36
Внутренняя оболочка	1,910 45	2,984 282	2,930 141	1,670 46	0,070 36

вывод о том, что при изучении нелинейной динамики описываемой структуры предпочтительно использовать вейвлет-преобразование Морле.

Хаотическая динамика рассматриваемой структуры исследуется при различных амплитудах вынужденных колебаний действующей на балку знакопеременной нагрузки. Изучаются перемещения элементов структуры в различные моменты времени при каждом значении рассматриваемых амплитуд вынужденных колебаний. При выполнении условия непроникания друг в друга элементов структуры (необходимое требование при решении контактных задач) исключаются вычислительные погрешности. Следует отметить, что колебания структуры являются хаотическими, причем переход в хаотическое состояние происходит непосредственно после соприкосновения элементов структуры.

В таблице приведены значения старшего показателя Ляпунова, вычисленные с помощью алгоритмов Вольфа [12], Кантца [13], Розенштейна [14], а также значения размерности Каплана — Йорке и энтропии Колмогорова для каждого элемента изучаемой структуры при  $q_2 = 5884, 11\,770$  Па. Сечение Пуанкаре для балки представляет собой странный аттрактор. Показатель Ляпунова является знакопеременным на всем изучаемом временном интервале при  $q_2 = 5884, 11\,770$  Па. При  $q_2 = 5884$  Па сечение Пуанкаре для внешней оболочки близко к аттрактору для балки. Значения старшего показателя Ляпунова в основном являются положительными. Для внутренней оболочки аттрактор сечения Пуанкаре является хаотическим, значения показателя Ляпунова находятся в области положительных значений, что свидетельствует о хаотической динамике изучаемой структуры. При  $q_2 = 11\,770$  Па сечения Пуанкаре оболочек идентичны и представляют собой рассеянный аттрактор балки. Значения старшего показателя Ляпунова не всегда положительны, для внутренней оболочки отрицательных значений меньше, чем для внешней. Из таблицы следует, что старший показатель Ляпунова положителен во всех случаях для каждого элемента структуры и для каждого метода расчета. Это позволяет говорить о достоверности полученных результатов. При  $q_2 = 5884$  Па значения показателя Ляпунова для балки и внутренней оболочки, вычисленные по алгоритму Вольфа, совпадают с точностью до третьего знака после запятой. Для внутренней оболочки значение показателя Ляпунова в несколько раз больше, чем для других элементов системы. Значения показателя Ляпунова, вычисленные по алгоритмам Кантца и Розенштейна, близки, в некоторых случаях совпадают с точностью до целой части числа. Идентичность сечений Пуанкаре всех элементов рассматриваемой структуры свидетельствует о хаотической синхронизации колебательного процесса. С увеличением нагрузки колебания становятся более синхронными.

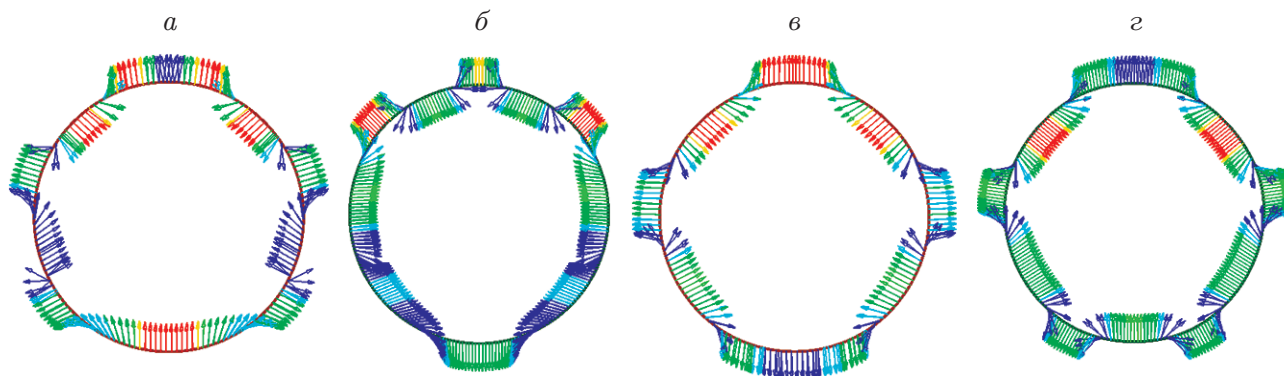


Рис. 2. Векторы перемещений элементов внешней (*a*, *в*) и внутренней (*б*, *г*) оболочек в момент времени  $t = 0,0035$  с при  $q_2 = 5884$  Па (*a*, *б*),  $q_2 = 11770$  Па (*в*, *г*)

Для исследования фазовой синхронизации колебаний элементов структуры разработан метод построения двумерных вейвлет-спектров Морле по разности частот изучаемых элементов, позволяющий получить наиболее точные результаты. С помощью этого метода построена и изучена фазовая синхронизация следующих вариантов сочетаний элементов структуры: балка и внешняя оболочка, балка и внутренняя оболочка, внешняя оболочка и внутренняя оболочка. Результаты проведенного анализа позволяют сделать вывод об увеличении количества частот на двумерных вейвлетах фазовой синхронизации при увеличении амплитуды нагрузки. Полная хаотическая синхронизация характерна для внутренней и внешней оболочек. Результаты анализа контактного взаимодействия элементов структуры свидетельствуют о переходе от режима колебаний структуры с хаотической синхронизацией к режиму колебаний с общей синхронизацией всех элементов.

Частоты на двумерных вейвлет-спектрах Морле для всех элементов структуры совпадают. Отчетливо видна перемежаемость (исчезновение и появление на некотором временном интервале) частот. Для всех элементов структуры на вейвлет-спектрах помимо значения  $\omega_p = 142$  Гц имеются еще две линейно зависимые частоты:  $\omega_1 \approx 16$  Гц,  $\omega_2 \approx 126$  Гц ( $\omega_p - \omega_1 = \omega_2$ ). При увеличении амплитуды нагрузки частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  исчезают на вейвлет-спектрах балки и внутренней оболочки. При увеличении амплитуды вынужденных колебаний исчезают частоты, находящиеся между значениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Сравнение вейвлет- и фурье-спектров показывает, что последние являются недостаточно информативными. На вейвлет-спектрах можно наблюдать большее количество частот, а также перемежаемость частот на всем временном интервале.

На рис. 2 для амплитуд вынужденных колебаний  $q_2 = 5884, 11770$  Па в момент времени  $t = 0,0035$  с (когда все элементы системы соприкасаются) приведены векторы перемещений элементов внешней и внутренней оболочек. Видно, что увеличение амплитуды нагрузки приводит к значительному увеличению перемещений оболочек и балки. Оболочки вдавливаются балкой, и в моменты соприкосновений их колебания синхронны. Когда балка не касается внешней оболочки (при  $q_2 = 11770$  Па), их колебания также остаются синхронными. При меньшем значении амплитуды ( $q_2 = 5884$  Па) подобного эффекта не наблюдается, т. е., как отмечено выше, колебания элементов структуры синхронизируются с увеличением амплитуды вынужденных колебаний. Происходит переход от хаотической к полной синхронизации колебаний элементов структуры.

Результаты анализа трехмерных изображений балки и оболочек позволяют сделать вывод, что наибольшие перемещения элементов оболочек имеют место в областях их соприкосновения.

При  $q_2 = 5884$  Па в сечении внешней оболочки наблюдается пять выпуклостей (см. рис. 2, *a*), в сечении внутренней оболочки — четыре (см. рис. 2, *b*). Векторы перемещений внешней оболочки в области, расположенной напротив балки, направлены внутрь структуры, перемещения внутренней оболочки — к внешней оболочке. При  $q_2 = 11\,770$  Па векторы перемещений внешней оболочки направлены наружу, внутренней — внутрь (см. рис. 2, *z*). В сечении внешней оболочки четыре выпуклости, внутренней — пять.

Таким образом, происходит перестройка колебательного процесса изучаемой системы, а также наблюдается явление прохлопывания оболочек.

**Заключение.** В работе исследованы нелинейная динамика и контактное взаимодействие сложной механической структуры, состоящей из двух замкнутых цилиндрических оболочек, вложенных одна в другую и подкрепленных балкой, на которую действует внешняя знакопеременная нагрузка различной интенсивности. Между элементами структуры имеются зазоры, взаимодействие элементов учитывается в краевых условиях. Построена математическая модель и проведен численный эксперимент. Установлено, что для исследования частотных характеристик подобных систем предпочтительно использовать вейвлет-преобразование Морле. Сравнение значений старшего показателя Ляпунова, вычисленных с помощью трех различных алгоритмов, свидетельствует о достоверности полученных результатов. Исследование синхронизации структуры позволяет сделать вывод, что при увеличении внешней нагрузки происходит полная синхронизация колебаний элементов. Выявлены и описаны явления прохлопывания оболочек и перестройки колебательного процесса изучаемой структуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: ОГИЗ, 1948.
2. Awrejcewicz J. Nonclassic thermoelastic problem in nonlinear dynamics of shells / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2003.
3. Awrejcewicz J. Nonlinear dynamics of continuous elastic systems / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, A. F. Vakakis. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2004.
4. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Yakovleva T. V., et al. Chaotic synchronization of vibrations of a coupled mechanical system consisting of a plate and beams // Latin Amer. J. Solids Structures. 2013. N 10. P. 161–172.
5. Крысько В. А., Жигалов М. В., Солдатов В. В., Салтыкова О. А. Исследования сложных колебаний балок в рамках кинематической модели Шереметьева — Пелеха с привлечением вейвлет-преобразования // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 12–17.
6. Крысько В. А., Жигалов М. В., Салтыкова О. А., Десятова А. С. Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли — Эйлера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 6. С. 128–136.
7. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1990.
8. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Изгиб двухслойной балки с нежестким контактом между слоями // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 1. С. 112–121.
9. Крысько В. А., Жигалов М. В., Салтыкова О. А., Крысько А. В. Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 5. С. 186–193.
10. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Saltykova O. A., et al. Investigations of chaotic dynamics of multi-layer beams using taking into account rotational inertial effects // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. V. 19, N 8. P. 2568–2589.

11. **Анурьев В. И.** Справочник конструктора-машиностроителя: В 3 т. М.: Машиностроение, 2001.
12. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. 16. P. 285–317.
13. **Kantz H.** A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series // Phys. Lett. A. 1994. V. 185. P. 77–87.
14. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Physica D. 1993. V. 65, N 1/2. P. 117–134.

*Поступила в редакцию 14/XII 2015 г.,  
в окончательном варианте — 1/VII 2016 г.*

---