

УДК 532.517:539.3

## КОМПЛЕКСНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ И ДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДЕМПФИРУЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

В. Н. Паймушин<sup>\*,\*\*</sup>, В. А. Фирсов<sup>\*</sup>, В. М. Шишкин<sup>\*\*\*</sup>

\* Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия

\*\* Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия

\*\*\* Вятский государственный университет, 610000 Киров, Россия

E-mails: vpaismushin@mail.ru, vafirsov\_49@mail.ru, tism1@rambler.ru

Рассмотрены классические способы поверхностного демпфирования изгибных колебаний тонкостенных конструкций и перспективный интегрированный способ демпфирования с использованием покрытия, состоящего из двух слоев материала с выраженными вязкоупругими свойствами, между которыми располагается тонкий армирующий слой высококомодульного материала. Создан конечный элемент с 14 степенями свободы для моделирования удлиненной пластины с указанным демпфирующим покрытием, позволяющий учитывать поперечное обжатие демпфирующих слоев при высокочастотных колебаниях пластины. С использованием метода итераций решена обобщенная задача определения комплексных собственных значений нижней части спектра комплексных форм и частот свободных колебаний демпфированной пластины с учетом частотной зависимости динамических модулей упругости материала. По мнимым частям комплексных собственных частот и относительному рассеянию энергии при резонансе определены демпфирующие свойства пластины.

Ключевые слова: пластина, демпфирующее покрытие, логарифмический декремент колебаний, конечный элемент, комплексная частота.

DOI: 10.15372/PMTF20200414

**Введение.** Традиционные конструкционные материалы (металлы и их сплавы), характеризующиеся большими значениями упругих и прочностных параметров, как правило, обладают слабыми демпфирующими свойствами [1, 2]. Поэтому для уменьшения виброактивности и динамической напряженности элементов тонкостенных конструкций используются различные покрытия из вязкоупругих материалов, впервые рассмотренные в работах [3–6]. Актуальность проблемы и внимание исследователей к ней отмечены в работе [7], в которой изучалось влияние на демпфирование различных физических факторов: температуры, частоты колебаний, толщины слоев, уровня нагружения и т. д. Результаты этих исследований положены в основу американского стандарта, в соответствии с которым проводятся измерения демпфирующих характеристик материалов [8].

Согласно [7] существуют два классических способа поверхностного демпфирования, зависящие от характера доминирующих деформаций в демпфирующем слое: 1) демпфи-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 19-19-00058).

© Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шишкин В. М., 2020

вание со свободным слоем (в соответствии с международной классификацией — free layer damping (FLD)); 2) демпфирование со связанным слоем (constraining layer damping (CLD)).

При использовании первого способа демпфирующий слой вязкоупругого материала жестко соединяется с демпфируемой тонкостенной конструкцией, при изгибе которой в случае поперечных колебаний в демпфирующем слое возникают циклические деформации растяжения-сжатия и соответствующие им демпфирующие силы. Однако данный способ демпфирования является малоэффективным [7], поскольку демпфирующие силы максимальны только в областях наибольшей кривизны демпфирующего слоя и имеют плечи малого размера (сопоставимого с толщинами слоев) относительно срединной поверхности демпфируемого тонкостенного элемента.

При использовании второго способа слой демпфирующего материала дополнительно покрывается жестким подкрепляющим слоем и при циклических изгибах конструкции испытывает в основном деформации поперечного сдвига. При одной и той же массе покрытия этот способ более эффективен, чем способ демпфирования со свободными слоями [9–13]. Это объясняется тем, что при поперечном сдвиге демпфирующего слоя демпфирующие силы перпендикулярны срединной поверхности демпфируемой панели, а размеры их плеч относительно узловых точек (линий) сопоставимы с половиной длины волны изгибных колебаний и во много раз больше, чем в случае свободного слоя. Однако максимальные демпфирующие силы возникают только в областях максимального сдвига демпфирующего слоя (вблизи узловых точек или линий), в которых в случае демпфирования со свободным слоем энергия изгибных колебаний практически не поглощалась. В значительной части демпфирующего слоя, как и в первом случае, энергия изгибных колебаний практически не поглощается (области пассивного демпфирования). В случае гашения колебаний в широком спектре эксплуатационных частот такие области присутствуют всегда.

Результаты анализа классических способов демпфирования колебаний тонкостенных конструкций показывают, что более эффективным является использование комбинированного способа поверхностного демпфирования. Это позволяет учесть преимущества обоих указанных выше способов. Слой, получаемый в результате такого учета, называется интегральным демпфирующим слоем (integral layer damping (ILD)) (рис. 1). При использовании данного способа демпфирующий слой из вязкоупругого материала в его срединной плоскости армирован тонким слоем, имеющим большую жесткость на растяжение-сжатие и пренебрежимо малую жесткость на изгиб (металлическая фольга, стекло или углеткань) (см. рис. 1, *а*). Нижний слой демпфирующего покрытия при изгибных колебаниях тонкостенной конструкции работает в основном на сдвиг и выполняет роль связанного демпфирующего слоя (CLD), а верхний слой испытывает деформации растяжения-сжатия и выполняет функции свободного демпфирующего слоя (FLD) (см. рис. 1, *б*). Это позволяет создавать области активного демпфирования колебаний, практически избавляясь от областей пассивного деформирования при любой форме изгибных колебаний в широком спектре

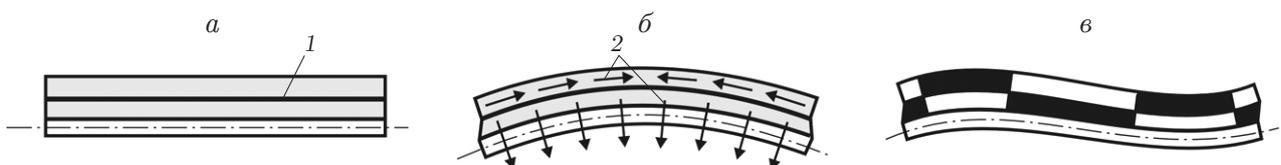


Рис. 1. Поверхностное демпфирование с использованием интегрального демпфирующего покрытия:

*а* — недеформированное состояние, *б* — деформированное состояние, *в* — области активного демпфирования; 1 — армирующий слой, 2 — демпфирующие силы

эксплуатационных частот. Так, в случае колебаний по второй изгибной форме шарнирно опертой полосы области активного демпфирования (темные области на рис. 1, в) покрывают практически всю поверхность демпфируемой конструкции. Кроме того, внешний слой интегрального демпфирующего покрытия не только способствует гашению колебаний, но и предохраняет тонкий армирующий слой от потери устойчивости и отслоения в фазе циклического сжатия при изгибных колебаниях конструкции, что увеличивает срок эксплуатации данного покрытия.

Увеличение эффективности демпфирования при использовании слоев из вязкоупругих материалов возможно за счет уменьшения массы покрытия, что для ряда отраслей, особенно аэрокосмической, является определяющим. При этом необходимо определить характеристики демпфирования при частотах, близких к собственным частотам колебаний конструкции. Для решения данной задачи применяются методики, позволяющие определить динамические характеристики конструкции по заданным характеристикам демпфирования вязкоупругого материала, которые обычно считаются постоянными (не зависящими от амплитуды деформации). В этом случае для определения характеристик демпфирования конструкции можно использовать известный метод комплексных собственных чисел (см., например, [14, 15]). При этом модули упругости материала конструкции обычно считаются постоянными, что существенно ограничивает использование данного метода для модального анализа конструкций в случае частотно-зависимых характеристик упругости материала. В работе [14] предложена постановка задачи о комплексных собственных числах для случая частотно-зависимой комплексной матрицы жесткости конструкции. Однако данная задача не была решена в [14], что обусловлено чрезвычайно большими вычислительными затратами, связанными с многократным пересчетом и преобразованием указанной матрицы.

При динамическом анализе конструкций с демпфирующими слоями перемещения всех слоев в направлении нормали к поверхности конструкции обычно полагаются одинаковыми, т. е. не учитывается поперечное обжатие слоев [16–18], что допустимо в статических и низкочастотных режимах деформирования. В этом случае для тонкостенных конструкций с интегральным демпфирующим покрытием можно использовать классическую модель, в которой связанный демпфирующий слой находится в состоянии однородного поперечного сдвига, а свободный слой — в состоянии неоднородного растяжения-сжатия. Однако при резонансных колебаниях на более высоких частотах напряженно-деформированное состояние демпфирующих слоев может быть другим вследствие влияния на него сил инерции, что приводит к необходимости учета всех компонент тензора напряженного состояния при определении рассеяния энергии в демпфирующих слоях конструкции.

### 1. Комплексная матрица жесткости изотропного вязкоупругого материала.

Известно, что при деформировании вязкоупругого материала по гармоническому закону деформация  $\varepsilon$  отстает от напряжения  $\sigma$  на некоторый фазовый угол  $\varphi$  [2, 19]. При резонансных колебаниях, когда частота деформирования материала  $\omega$  совпадает с одной из частот  $\omega_j$  свободных колебаний конструкции,  $\operatorname{tg} \varphi = \delta/\pi$  ( $\delta$  — логарифмический декремент колебаний (ЛДК) материала, являющийся одной из мер внутреннего трения в материале) [2].

Фазовые соотношения целесообразно записать в комплексной форме

$$\sigma_0 e^{i\omega t} = E^* \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  — амплитуда напряжения и амплитуда деформации соответственно;  $E^*$  — комплексный модуль упругости;  $t$  — время;  $i$  — мнимая единица. Из (1.1) следует

$$E^* = \sigma_0 e^{i\omega t} / (\varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}) = \sigma_0 \cos \varphi (1 + i\delta/\pi) / \varepsilon_0. \quad (1.2)$$

Величина  $\sigma_0 \cos \varphi$  представляет собой составляющую комплексного напряжения  $\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}$ , совпадающую по фазе с комплексной деформацией  $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$ , а отношение  $\sigma_0 \cos \varphi / \varepsilon_0$  есть модуль упругости  $E$  при циклическом деформировании материала. С учетом этого выражение (1.2) принимает вид  $E^* = E(1 + i\delta/\pi)$ . Таким образом, вместо (1.1) можно записать зависимость

$$\sigma^* = E(1 + i\delta/\pi)\varepsilon^*, \quad (1.3)$$

которая является основной зависимостью известной модели Е. С. Сорокина (гипотезы комплексного внутреннего трения) в случае гармонического закона деформирования материала, находящегося в одноосном напряженном состоянии [19, 20].

Зависимость (1.3) можно обобщить на случай сложного напряженного состояния изотропного вязкоупругого материала:

$$\sigma^* = D^* \varepsilon^*.$$

Здесь  $\sigma^*$ ,  $\varepsilon^*$  — векторы, содержащие соответственно комплексные напряжения и комплексные деформации;  $D^* = D + iD_g$  — комплексная матрица жесткости, содержащая матрицу жесткости  $D$  и матрицу демпфирования  $D_g$  рассматриваемого материала. Для изотропного вязкоупругого материала, находящегося в плоском напряженном состоянии, матрицы  $D$  и  $D_g$  имеют вид

$$D = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\nu/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad D_g = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2) & E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2) & E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G\delta_\gamma \end{bmatrix}.$$

Здесь  $E$ ,  $G$ ,  $\delta_\varepsilon$ ,  $\delta_\gamma$  — модули упругости и ЛДК материала при растяжении-сжатии и сдвиге соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В случае зависимости характеристик упругости материала от частоты деформирования  $\omega$  в качестве  $E$ ,  $G$  необходимо использовать соответствующие динамические модули упругости материала [21].

**2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием.** Создан четырехслойный конечный элемент с 14 степенями свободы (рис. 2), моделирующий удлиненную пластину с интегральным демпфирующим покрытием: слой I (основной материал) работает в рамках гипотез Кирхгофа — Лява; демпфирующие слои II, IV находятся в плоском напряженном состоянии; армирующий слой III работает на растяжение-сжатие (толщина данного слоя считается пренебрежимо малой). Независимыми узловыми параметрами элемента являются перемещения  $u_i$ ,  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) и углы поворота  $\varphi_1$ ,  $\varphi_4$  поперечных сечений слоя I, представляющие собой компоненты вектора

$$\mathbf{r}^{(e)} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, u_3, w_3, u_4, w_4, \varphi_4, u_5, w_5, u_6, w_6\}.$$

Перемещения  $u^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  произвольной точки, расположенной на оси  $x$  пластины, аппроксимируются зависимостями

$$u^{(1)} = \{H_1, 0, 0, H_2, 0, 0\}^T \mathbf{r}^{(1)}, \quad w^{(1)} = \{0, N_1, N_2, 0, N_3, N_4\}^T \mathbf{r}^{(1)} \quad (2.1)$$

с вектором узловых перемещений  $\mathbf{r}^{(1)} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_4, w_4, \varphi_4\}$  и базисными функциями

$$H_1 = 1 - x/l, \quad H_2 = x/l, \quad N_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, \quad N_2 = x - 2x^2/l + x^3/l^2, \\ N_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, \quad N_4 = -x^2/l + x^3/l^2.$$

Деформация  $\varepsilon_x^{(1)}$  в точке, расположенной на расстоянии  $z_1$  от оси слоя I, определяется геометрической зависимостью

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{d}{dx} (u^{(1)} - \varphi^{(1)} z_1) = \frac{d}{dx} (u^{(1)} - w^{(1)} z_1) = u'^{(1)} - w''^{(1)} z_1.$$

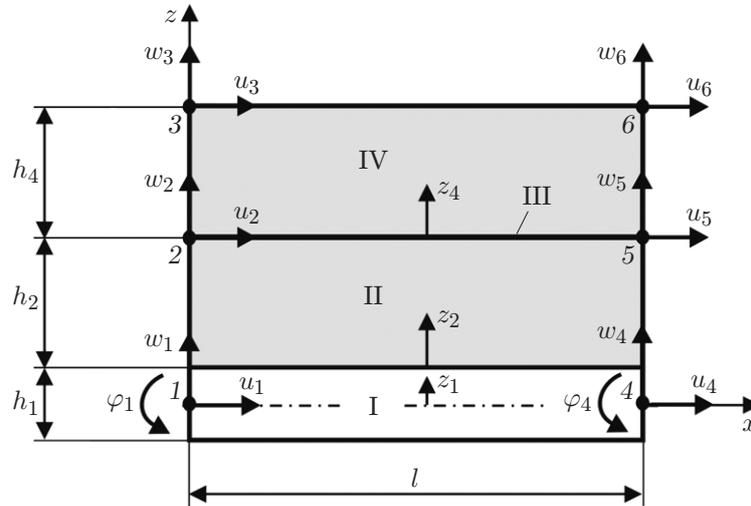


Рис. 2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием:

I–IV — номера слоев покрытия, 1–6 — номера узлов

С учетом аппроксимаций (2.1) эту зависимость можно привести к виду

$$\varepsilon_x^{(1)} = (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{B}^{(1)} = \{H'_1, 0, 0, H'_2, 0, 0\} - \{0, N''_1, N''_2, 0, N''_3, N''_4\} z_1.$$

Перемещения  $u^{(2)}$ ,  $w^{(2)}$ ,  $u^{(4)}$ ,  $w^{(4)}$  произвольных точек слоев II, IV представляются билинейными зависимостями

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= [(u_1 - 0,5h_1\varphi_1)(1 - \bar{x}) + (u_4 - 0,5h_1\varphi_4)\bar{x}](1 - \bar{z}_2) + [u_2(1 - \bar{x}) + u_5\bar{x}]\bar{z}_2, \\ w^{(2)} &= [w_1(1 - \bar{x}) + w_4\bar{x}](1 - \bar{z}_2) + [w_2(1 - \bar{x}) + w_5\bar{x}]\bar{z}_2, \\ u^{(4)} &= [u_2(1 - \bar{x}) + u_5\bar{x}](1 - \bar{z}_4) + [u_3(1 - \bar{x}) + u_6\bar{x}]\bar{z}_4, \\ w^{(4)} &= [w_2(1 - \bar{x}) + w_5\bar{x}](1 - \bar{z}_4) + [w_3(1 - \bar{x}) + w_6\bar{x}]\bar{z}_4. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\bar{x} = x/l$ ,  $\bar{z}_2 = z_2/h_2$ ,  $\bar{z}_4 = z_4/h_4$  — безразмерные координаты. Деформации  $\varepsilon_x^{(i)}$ ,  $\varepsilon_z^{(i)}$ ,  $\gamma_{xz}^{(i)}$  ( $i = 2, 4$ ) демпфирующих слоев определяются геометрическими зависимостями (соотношениями Коши)

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_i}, \quad \gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z_i}.$$

С учетом представлений (2.3) выражения для величин  $\varepsilon_x^{(i)}$ ,  $\varepsilon_z^{(i)}$ ,  $\gamma_{xz}^{(i)}$  можно представить в виде

$$\varepsilon^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_z^{(i)} \\ \gamma_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = B^{(i)} \mathbf{r}^{(e)} = [B_1^{(i)} \ B_2^{(i)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(e)} \\ \mathbf{r}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -(1 - \bar{z}_2)/l & 0 & h_1(1 - \bar{z}_2)(2l) & -\bar{z}_2/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \bar{x})/h_2 & 0 & 0 & (1 - \bar{x})/h_2 & 0 & 0 \\ -(1 - \bar{x})/h_2 & -(1 - \bar{z}_2)/l & (1 - \bar{x})h_1/(2h_2) & (1 - \bar{x})/h_2 & -\bar{z}_2/l & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} (1 - \bar{z}_2)/l & 0 & -h_1(1 - \bar{z}_2)(2l) & \bar{z}_2/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{x}/h_2 & 0 & 0 & \bar{x}/h_2 & 0 & 0 \\ -\bar{x}/h_2 & (1 - \bar{z}_2)/l & \bar{x}h_1/(2h_2) & \bar{x}/h_2 & \bar{z}_2/l & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_1^{(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1 - \bar{z}_4)/l & 0 & -\bar{z}_4/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 - \bar{x})/h_4 & 0 & (1 - \bar{x})/h_4 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \bar{x})/h_4 & -(1 - \bar{z}_4)/l & (1 - \bar{x})/h_4 & -\bar{z}_4/l \end{bmatrix}, \\
B_2^{(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1 - \bar{z}_4)/l & 0 & \bar{z}_4/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}/h_4 & 0 & \bar{x}/h_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{x}/h_4 & (1 - \bar{z}_4)/l & \bar{x}/h_4 & \bar{z}_4/l \end{bmatrix}, \\
\mathbf{r}_1^{(e)} &= \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, u_3, w_3\}, \quad \mathbf{r}_2^{(e)} = \{u_4, w_4, \varphi_4, u_5, w_5, u_6, w_6\}.
\end{aligned}$$

Перемещение  $u^{(3)}$  произвольной точки армирующего слоя III аппроксимируется линейной зависимостью  $u^{(3)} = u_2(1 - \bar{x}) + u_5\bar{x}$ , из которой следует, что в пределах элемента деформация постоянна:

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{1}{l}\{-1, 1\}^T \mathbf{r}^{(3)}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_5 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Матрицу жесткости  $K^{(e)}$ , матрицу демпфирования  $C^{(e)}$  и матрицу масс  $M^{(e)}$  конечного элемента нетрудно получить путем сложения соответствующих матриц слоев, записанных относительно его узловых перемещений  $\mathbf{r}^{(e)}$ :

$$K^{(e)} = \sum_{i=1}^4 K^{(i)}, \quad C^{(e)} = \sum_{i=1}^4 C^{(i)}, \quad M^{(e)} = \sum_{i=1}^4 M^{(i)}.$$

Матрицы  $K^{(i)}$  можно получить из выражений для потенциальной энергии деформации  $U^{(i)}$  слоев элемента. Найдем  $U^{(1)}$ :

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} b E_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l (\varepsilon_x^{(1)})^2 dx dz_1.$$

Здесь  $b$  — ширина элемента;  $E_1$  — модуль упругости материала слоя I. С учетом (2.2) последнее выражение принимает вид

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} b E_1 (\mathbf{r}^{(1)})^T \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^T dx dz_1 \mathbf{r}^{(1)}.$$

Вычислив определенные интегралы, выражение для  $U^{(1)}$  можно привести к виду

$$U^{(1)} = 0,5 (\mathbf{r}^{(1)})^T K_0^{(1)} \mathbf{r}^{(1)},$$

где  $K_0^{(1)}$  — матрица жесткости слоя I относительно перемещений  $\mathbf{r}^{(1)}$ :

$$K_0^{(1)} = \begin{bmatrix} EF_1/l & 0 & 0 & -EF_1/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 & 0 & -12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 \\ 0 & 6EI_1/l^2 & 4EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 2EI_1/l \\ -EF_1/l & 0 & 0 & EF_1/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 & 0 & 12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 \\ 0 & 6EI_1/l^2 & 2EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 4EI_1/l \end{bmatrix}, \\
EF_1 = E_1 b h_1, \quad EI_1 = E_1 b h_1^3 / 12.$$

Для перехода к матрице  $K^{(1)}$ , записанной относительно вектора  $\mathbf{r}^{(e)}$ , необходимо использовать преобразование

$$K^{(1)} = (L^{(1)})^T K_0^{(1)} L^{(1)},$$

где  $L^{(1)}$  — матрица, связывающая вектор  $\mathbf{r}^{(1)}$  с вектором  $\mathbf{r}^{(e)}$ :

$$\mathbf{r}^{(1)} = L^{(1)} \mathbf{r}^{(e)}, \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации слоев II, IV определяется по формуле

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} b \int_0^{h_i} \int_0^l (\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)})^T D^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} dx dz_i \quad (i = 2, 4).$$

Здесь  $D^{(i)}$  — матрица жесткости материала  $i$ -го слоя. С учетом (2.4) выражение для  $U^{(i)}$  можно представить в виде

$$U^{(i)} = 0,5 (\mathbf{r}^{(e)})^T K^{(i)} \mathbf{r}^{(e)} \quad (i = 2, 4),$$

где

$$K^{(i)} = b \int_0^{h_i} \int_0^l (B^{(i)})^T D^{(i)} B^{(i)} dx dz_i. \quad (2.6)$$

В результате замены координат

$$x = (1 + \xi)l/2, \quad z_i = (1 + \eta)h_i/2, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

выражение (2.6) принимает вид

$$K^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B^{(i)})^T D^{(i)} B^{(i)} d\xi d\eta.$$

Для точного вычисления интеграла можно использовать квадратурную формулу Гаусса с двумя точками в каждом координатном направлении [22, 23]:

$$K^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (B^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T D^{(i)} B^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n. \quad (2.7)$$

Здесь  $\xi_1 = \eta_1 = -0,57735$ ,  $\xi_2 = \eta_2 = 0,57735$  — координаты точек Гаусса;  $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 1$  — весовые множители.

Потенциальная энергия деформации слоя III равна

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} EF_3 \int_0^l (\varepsilon_x^{(3)})^2 dx.$$

Здесь  $EF_3$  — жесткость слоя при растяжении-сжатии. С учетом зависимости (2.5) выражение для  $U^{(3)}$  можно записать в виде

$$U^{(3)} = 0,5 (\mathbf{r}^{(3)})^T K_0^{(3)} \mathbf{r}^{(3)},$$

где  $K_0^{(3)}$  — матрица жесткости армирующего слоя, записанная относительно узловых перемещений  $\mathbf{r}^{(3)} = \{u_2 \ u_5\}$ :

$$K_0^{(3)} = \frac{EF_3}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для перехода к матрице  $K^{(3)}$ , записанной относительно вектора перемещений  $\mathbf{r}^{(e)}$ , используется преобразование

$$K^{(3)} = (L^{(3)})^T K_0^{(3)} L^{(3)},$$

где  $L^{(3)}$  — матрица, связывающая вектор  $\mathbf{r}^{(3)}$  с вектором  $\mathbf{r}^{(e)}$ :

$$\mathbf{r}^{(3)} = L^{(3)} \mathbf{r}^{(e)}, \quad L^{(3)} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}^T.$$

При построении матриц демпфирования  $C^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) слоев элемента полагается, что ЛДК материала данных слоев постоянны (не зависят от амплитуд деформаций). В этом случае в соответствии с (1.3) матрицы демпфирования слоев I, III могут быть получены путем умножения матриц жесткости  $K^{(i)}$  ( $i = 1, 3$ ) на величины  $\delta_i/\pi$  ( $\delta_i$  — ЛДК материала данных слоев при циклическом растяжении-сжатии):

$$C^{(i)} = K^{(i)} \delta_i/\pi \quad (i = 1, 3).$$

Матрицы демпфирования слоев II, IV получаются путем замены в соотношении (2.7) матриц  $D^{(i)}$  ( $i = 2, 4$ ) на матрицы демпфирования материала  $D_g^{(i)}$ :

$$C^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (B^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T D_g^{(i)} B^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n \quad (i = 2, 4).$$

Матрицы масс  $M^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) слоев элемента могут быть получены путем приведения выражений для кинетических энергий  $T^{(i)}$  данных слоев к однородным квадратичным формам относительно вектора узловых скоростей  $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ :

$$T^{(i)} = 0,5(\dot{\mathbf{r}}^{(e)})^T M^{(i)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}.$$

При определении  $T^{(i)}$  полагалось, что кинетическая энергия слоев элемента обусловлена только скоростями  $\dot{w}^{(i)}$ .

**3. Определение комплексных форм и частот свободных колебаний пластины.** С использованием введенных в п. 1 понятий комплексного модуля упругости  $E^*$  и комплексной матрицы жесткости  $D^* = D + iD_g$  в случае гармонического закона деформирования вязкоупругого материала можно построить комплексную матрицу жесткости конечного элемента пластины с интегральным демпфирующим покрытием, учитывающую его упругие и демпфирующие свойства:

$$K^{*(e)} = K^{(e)} + iC^{(e)}.$$

Уравнения свободных колебаний демпфированного элемента записываются относительно его комплексных узловых перемещений  $\mathbf{r}^{*(e)}$ :

$$M^{(e)} \ddot{\mathbf{r}}^{*(e)} + K^{*(e)} \mathbf{r}^{*(e)} = 0.$$

После объединения данных уравнений по общим для смежных элементов узловым перемещениям получаем уравнения свободных колебаний для конечно-элементной модели демпфированной пластины:

$$M \ddot{\mathbf{r}}^* + K^* \mathbf{r}^* = 0.$$

Здесь  $M$ ,  $K^*$ ,  $\mathbf{r}^*$  — матрица масс, комплексная матрица жесткости и вектор комплексных узловых перемещений отмеченной модели соответственно. В результате подстановки  $\mathbf{r}^* = \mathbf{F}^* e^{i\omega^* t}$  имеем обобщенную задачу о собственных значениях

$$(K^* - \lambda^* M)\mathbf{F}^* = 0, \quad (3.1)$$

где  $\lambda^* = (\omega^*)^2$  — комплексное собственное значение;  $\omega^*$  — комплексная частота;  $\mathbf{F}^*$  — комплексная форма колебаний. Демпфирующие свойства пластины при колебаниях по некоторой форме  $\mathbf{F}_j^*$  можно определить ЛДК  $\delta_j = 2\pi\omega_j''/\omega_j'$  ( $\omega_j'$ ,  $\omega_j''$  — вещественная и мнимая части комплексной частоты  $\omega_j^*$  соответственно) [14].

Для того чтобы решить задачу (3.1), можно использовать встроенные функции (решатели) пакетов программ MATLAB, Mathcad, Mathematica, определяющие полный спектр комплексных форм и частот, но это требует значительных вычислительных затрат, приблизительно в три раза превышающих затраты на решение задачи без учета демпфирования [24]. Следует отметить, что для практики представляют интерес лишь несколько низших собственных пар (форм и частот). Поэтому более предпочтительными являются методы, основанные на итерировании матриц [25, 26], среди которых наиболее подходящим является метод итераций в подпространстве [25], позволяющий итерировать одновременно несколько низших форм и частот. Однако даже при определении только нижней части спектра собственных комплексных форм и частот вычислительные затраты на решение задачи (3.1) достаточно большие. Эти затраты можно значительно уменьшить (для задачи определения комплексных частот колебаний демпфированной удлиненной пластины — приблизительно на порядок), если учесть симметрию и ленточную структуру матриц  $K^*$  и  $M$ , записывая их не в квадратных (как обычно), а в прямоугольных массивах, столбцами которых являются соответствующие диагонали ленты [27].

В случае зависимости модулей упругости материалов слоев пластины от частоты деформирования  $\omega$  матрица  $K^*$  при определении  $\omega_j^*$  и  $\mathbf{F}_j^*$  должна строиться в зависимости от получаемых на частоте  $\omega_j'$  динамических модулей упругости материала. Поскольку при построении матрицы  $K^*$  данная частота неизвестна, решение задачи (3.1) необходимо итерировать. В качестве критерия завершения итераций при определении  $\omega_j^*$  можно использовать условие

$$|1 - \omega_j'^{(k)}/\omega_j'^{(k-1)}| \leq \varepsilon, \quad (3.2)$$

где  $k$  — номер итерации;  $\varepsilon$  — заданная точность. Однако при использовании метода итераций в подпространстве все необходимые комплексные частоты  $\omega_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) находятся одновременно. Поэтому возникает вопрос: при каких частоте  $\omega_j'$  и динамических модулях упругости материала следует строить комплексную матрицу жесткости  $K^*$  при решении задачи (3.1)? Предлагается следующий алгоритм построения матрицы  $K^*$ .

Организуется цикл по  $j = 1, 2, \dots, n$ .

При каждом значении  $j$  выполняется итерационная процедура:

1. Задается вещественная частота  $\omega_j'^{(k-1)}$ .
2. Строится матрица  $K^*$  с динамическими модулями упругости на частоте  $\omega_j'^{(k-1)}$ .
3. Решается задача (3.1).
4. Из полученного спектра комплексных частот  $\omega_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) выбирается вещественная часть  $\omega_j'$  при текущем значении  $j$ , которая становится частотой  $\omega_j'^{(k)}$  на следующей итерации.
5. Проверяется условие (3.2). Если данное условие выполняется, то в качестве искомой комплексной частоты  $\omega_j^*$  выбирается частота  $\omega_j'^{(k)}$ . В противном случае  $\omega_j'^{(k-1)}$  заменяется на  $\omega_j'^{(k)}$ , после чего пп. 1–5 повторяются.

При каждом значении  $j$  итерационный процесс начинается со значения  $k = 1$  и заданных начальных частот  $\omega_j^{(0)}$  (для всех  $j$  эти частоты можно выбрать одинаковыми и практически произвольными).

**4. Численные эксперименты.** Определялись 15 низших комплексных форм  $F_j^*$  и комплексных циклических частот  $f_j^* = \omega_j^*/(2\pi)$  свободных колебаний шарнирно опертой пластины с интегральным демпфирующим покрытием. Принимались следующие геометрические параметры пластины: длина  $L = 250$  мм, ширина  $b = 20$  мм, толщина  $h_1 = 1$  мм. Толщины демпфирующих слоев равны  $h_2 = h_4 = 1,8$  мм. Армирующий слой имеет толщину  $h_3 = 0,12$  мм.

Материал пластины — алюминиевый сплав Д16АТ (плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, ЛДК  $\delta = 0,005$ ). В работе [28] с использованием теоретико-экспериментального метода получена зависимость динамического модуля упругости  $E$  сплава Д16АТ от частоты деформирования  $f$ :

$$E(f) = 1,615 \cdot 10^4 e^{-6,170 \cdot 10^{-1} f} + 5,585 \cdot 10^4 e^{-5,893 \cdot 10^{-5} f}.$$

При  $f = 0 \div 20$  Гц динамический модуль упругости  $E$  существенно меньше статического модуля упругости  $E_0 = 7,2 \cdot 10^4$  МПа, при  $f = 20 \div 200$  Гц он принимает значение  $E \approx 5,55 \cdot 10^4$  МПа.

В качестве материала демпфирующих слоев использовалась техническая резина, имеющая следующие характеристики: плотность  $\rho = 1345$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$ , ЛДК при растяжении-сжатии  $\delta_\varepsilon = 1,23$ , при сдвиге  $\delta_\gamma = 1,1$ . Согласно экспериментальным данным [21] динамические модули упругости  $E_r$  и  $G_r$  резины при растяжении-сжатии и сдвиге соответственно существенно увеличиваются с увеличением частоты  $f$ , но им соответствует узкий диапазон частот (для  $E_r$  —  $0 \div 30$  Гц, для  $G_r$  —  $0 \div 16$  Гц), что не позволяет использовать их при анализе высших комплексных форм и комплексных частот свободных колебаний пластины. Для реализации данной возможности построены экстраполирующие зависимости

$$E_r(f) = 20,1(1 - 0,736 e^{-0,096f}), \quad G_r(f) = 2,6(1 - 0,231 e^{-0,121f}),$$

в соответствии с которыми при изменении  $f$  модули упругости стремятся к экспериментальным значениям  $E_r = 20,1$  МПа и  $G_r = 2,6$  МПа (рис. 3). В качестве материала армирующего слоя использовалась углелента ЭЛУР-П (плотность  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>, ЛДК при растяжении-сжатии  $\delta = 0,006$ ). Динамический модуль упругости углеленты считается постоянным (не зависящим от частоты  $f$ ):  $E = 10,5 \cdot 10^4$  МПа.

Пластина разбивалась на 100 конечных элементов одинаковой длины. С целью уменьшения вычислительных затрат матрица масс  $M$  и комплексная матрица жесткости  $K^* = K + iC$  конечно-элементной модели пластины строились в прямоугольных массивах с главными диагоналями данных матриц, расположенными в первых столбцах массивов. Условия закрепления пластины учитывались путем умножения диагональных элементов  $k_{ii}$  ( $i$  — номера нулевых перемещений) матрицы  $K$  на параметр штрафа  $\alpha = 10^8$ . Комплексные собственные частоты  $f_j^*$  определялись по алгоритму, изложенному в п. 3, до тех пор пока не было выполнено условие (3.2) с погрешностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Для достижения заданной точности потребовалось от трех до пяти итераций (в зависимости от номера частоты).

В таблице приведены вещественные  $f_j'$  и мнимые  $f_j''$  части циклических комплексных частот  $f_j^*$  свободных колебаний пластины, найденные с использованием системы (3.1) методом итераций в подпространстве, и соответствующие значения ЛДК

$$\delta_j = 2\pi f_j''/f_j'. \quad (4.1)$$

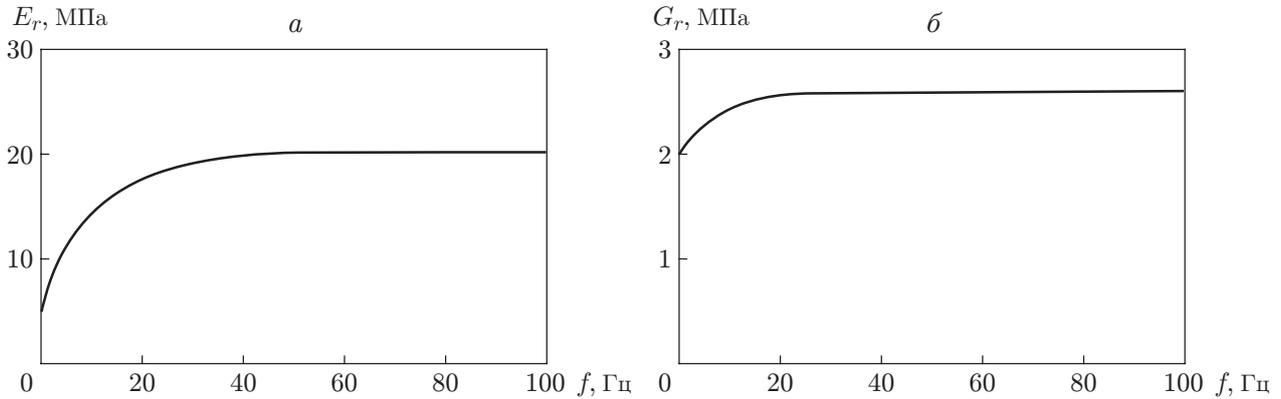


Рис. 3. Зависимости динамических модулей упругости технической резины от частоты при растяжении-сжатии (а) и сдвиге (б)

Значения частот и логарифмического декремента колебаний тонкой пластины

$j$	$f'_j$ , Гц	$f''_j$ , Гц	$\delta_j = 2\pi f''_j/f'_j$	$f_j$ , Гц	$\delta_j = \Delta W_j/(2W_{j,\max})$
1	50,69	3,83	0,475	49,94	0,502
2	139,99	13,49	0,605	138,52	0,621
3	253,98	20,89	0,517	252,50	0,523
4	399,77	25,86	0,406	398,49	0,409
5	581,21	29,32	0,317	580,13	0,318
6	800,04	31,99	0,251	799,06	0,252
7	1056,65	34,41	0,205	1055,93	0,206
8	1352,04	37,03	0,172	1350,75	0,174
9	1684,91	40,33	0,150	1682,98	0,153
10	2054,69	44,92	0,137	2051,55	0,141
11	2459,94	51,58	0,132	2454,73	0,137
12	2898,54	61,34	0,133	2890,02	0,140
13	3367,57	75,56	0,141	3353,99	0,151
14	3863,12	95,94	0,156	3842,11	0,170
15	4380,11	124,57	0,179	4348,57	0,197

В последних двух столбцах таблицы для сравнения приведены значения частот  $f_j$ , полученные из системы уравнений

$$(K - \omega^2 M)\mathbf{F} = 0 \quad (4.2)$$

при анализе свободных колебаний пластины без учета демпфирующих свойств материала, и значения ЛДК  $\delta_j$ , найденные с помощью энергетического метода:

$$\delta_j = \Delta W_j/(2W_{j,\max}). \quad (4.3)$$

Здесь  $\Delta W_j$ ,  $W_{j,\max}$  — соответственно рассеянная и максимальная энергии в объеме пластины в случае резонанса по форме  $\mathbf{F}_j$  за один цикл колебаний. Резонансные колебания возбуждались погонной нагрузкой  $q(t) = q_0 \cos(pt)$  с амплитудой  $q_0 = 0,08$  кН/м и частотой  $p = \omega_j$ . Для получения по формуле (4.3) значений  $\delta_j$  при резонансных колебаниях по всем 15 формам  $\mathbf{F}_j$  (четным и нечетным) нагрузка  $q(t)$  действовала на половине пластины (при нагрузке  $q(t)$ , приложенной по всей длине, резонансные колебания могут быть возбуждены только по нечетным формам  $\mathbf{F}_j$ ).

Анализ приведенных результатов показывает, что вещественные части  $f'_j$  комплексных частот  $f_j^*$  демпфированной пластины незначительно больше частот  $f_j$ , полученных

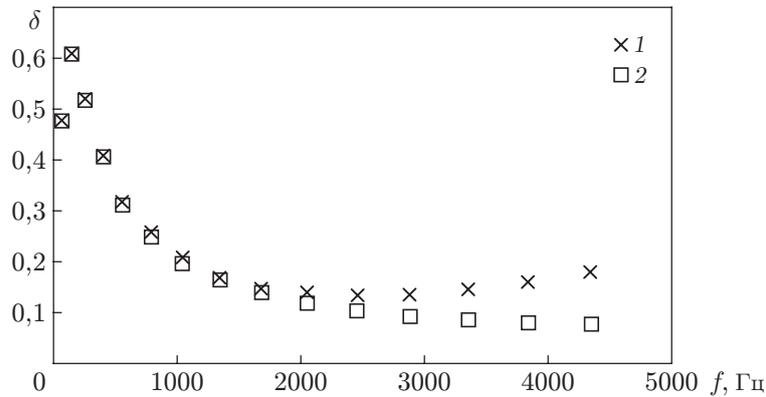


Рис. 4. Зависимости ЛДК  $\delta$  пластины с интегральным демпфирующим покрытием от частоты  $f$ :

1 — с учетом поперечного обжатия демпфирующих слоев, 2 — без учета поперечного обжатия демпфирующих слоев

без учета демпфирования (такой же результат получен в работе [29] при анализе влияния демпфирования на собственные частоты линейных динамических систем). Значения ЛДК  $\delta_j$ , найденные по формулам (4.1) и (4.3), достаточно близки. При этом в обоих случаях для форм со 2-й до 11-й значения  $\delta_j$  монотонно убывают, а затем наблюдается их существенное увеличение, которое можно объяснить влиянием на  $\delta_j$  рассеяния энергии, обусловленного нормальными напряжениями  $\sigma_z$  в демпфирующих слоях пластины при высоких частотах колебаний. Что касается комплексных собственных форм  $F_j^*$ , то исследования показали, что их нормированные вещественные и мнимые части практически совпадают с соответствующими нормированными формами  $F_j$ , полученными из системы (4.2) для недемпфированной пластины (без учета демпфирующих свойств материала).

На рис. 4 приведена зависимость ЛДК  $\delta$  от собственной частоты  $f$ , полученная по формуле (4.1) с учетом влияния всех компонент тензора плоского напряженного состояния демпфирующих слоев пластины (точки 1) и без учета влияния поперечного обжатия обоих демпфирующих слоев (точки 2). В последнем случае наблюдается значительное уменьшение значений  $\delta$  при высоких частотах колебаний, причем, как показали численные эксперименты, отмеченное уменьшение  $\delta$  в основном происходит вследствие неучета рассеяния энергии при поперечном обжатии связанного демпфирующего слоя.

На рис. 5 представлены зависимости собственных частот  $f$  свободных колебаний и ЛДК  $\delta$  пластины с интегральным демпфирующим покрытием от номера  $j$  формы колебаний, полученные при использовании статических и динамических модулей упругости материала пластины и демпфирующих слоев. В качестве величины  $f$  использовались вещественные части соответствующих комплексных частот. Значения  $\delta$  вычислялись по формуле (4.1). При замене динамических модулей упругости статическими наблюдается незначительное различие частот  $f$  (см. рис. 5,а), существенное уменьшение ЛДК  $\delta$  пластины для форм с первой до седьмой и значительный рост  $\delta$  для более высоких форм колебаний (см. рис. 5,б). Дальнейшие численные эксперименты показали, что значительное различие демпфирующих свойств пластины при использовании динамических и статических модулей упругости материала обусловлено в основном существенным увеличением динамического модуля упругости резины  $E_r$  при растяжении-сжатии по сравнению со статическим модулем упругости по мере увеличения частоты  $f$  (см. рис. 3,а). При этом наиболее существенное изменение демпфирующих свойств пластины при возрастании  $E_r$  достигается за счет наличия связанного демпфирующего слоя.

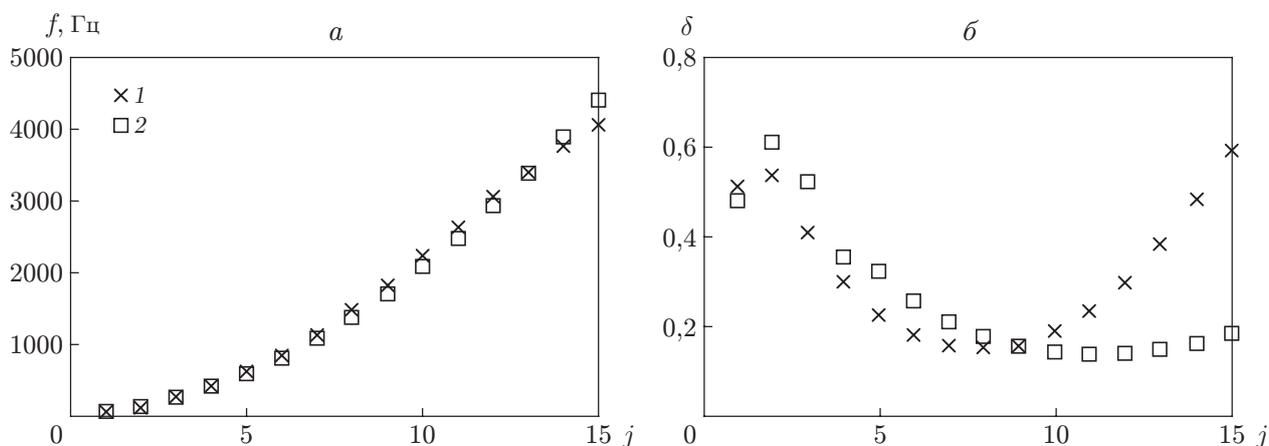


Рис. 5. Зависимости собственных частот  $f$  (а) и ЛДК  $\delta$  (б) пластины с интегральным демпфирующим покрытием от номера  $j$  собственной формы колебаний:

1 — при использовании статических модулей упругости материала пластины и демпфирующих слоев, 2 — при использовании динамических модулей упругости материала пластины и демпфирующих слоев

**Заключение.** Создан четырехслойный конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, позволяющий учитывать поперечное обжатие демпфирующих слоев. Определены нижняя часть спектра комплексных форм  $F_j^*$  и комплексных частот  $f_j^*$  свободных колебаний удлиненной шарнирно опертой пластины с интегральным демпфирующим покрытием и соответствующие им значения ЛДК  $\delta_j$  с учетом частотной зависимости динамических модулей упругости материала. Показано, что при высоких частотах колебаний значения  $\delta_j$  существенно увеличиваются вследствие учета поперечного обжатия демпфирующих слоев пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справ. / Г. С. Писаренко, А. П. Матвеев, В. В. Матвеев. Киев: Наук. думка, 1971.
2. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1969.
3. Oberst H., Frankenfeld K. Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge // *Acustica*. 1952. Bd 2, N 4. S. 181–194.
4. Oberst H., Becker G. W., Frankenfeld K. Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge. 2 // *Acustica*. 1954. Bd 4, N 1. S. 433–444.
5. Kerwin E. M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1959. V. 31, N 7. P. 952–962.
6. Ross D., Ungar E. E., Kerwin E. M. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate // *Structural damping*. N. Y.: ASME, 1959. P. 49–88.
7. Нашиф А. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. М.: Мир, 1988.
8. ASTM E756-05: Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. S. l.: ASTM Intern., 2017.
9. Li Z., Crocker M. J. A review on vibration damping in sandwich composite structures // *Intern. J. Acoust. Vibrat.* 2005. V. 10, N 4. P. 159–169.

10. **Jones D. I.** Handbook of viscoelastic vibration damping. N. Y.: John Wiley and Sons, 2001.
11. **Hujare P. P., Sahasrabudhe A. D.** Effect of thickness of damping material on vibration control of structural vibration in constrained layer damping treatment // Appl. Mech. Materials. 2014. V. 592–594. P. 2031–2035.
12. **Kadam A., Hujare P.** Optimization of segmented constrained layer damping literature review // Intern. J. Engng Adv. Technol. 2014. V. 3, N 5. P. 151–153.
13. **Luo G. M.** Constrained-layer damping applied to DCJ vibration isolation design // J. Mech. Design Vibrat. 2017. V. 5, N 1. P. 21–26.
14. **Рикардс Р. Б., Барканов Е. Н.** Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов // Механика композит. материалов. 1991. № 5. С. 823–830.
15. **Барканов Е. Н.** Метод комплексных собственных чисел для исследования демпфирующих свойств конструкций типа сэндвич // Механика композит. материалов. 1993. Т. 29, № 1. С. 116–121.
16. **Oravsky V., Markus S., Simkova O.** A new approximate method of finding the loss-factors of a sandwich cantilever // J. Sound Vibrat. 1974. V. 33, N 3. P. 335–352.
17. **Mead D. J., Markus S.** The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions // J. Sound Vibrat. 1969. V. 10, N 2. P. 165–175.
18. **Rao D. K.** Vibration of short sandwich beams // J. Sound Vibrat. 1977. V. 52, N 2. P. 253–263.
19. **Хильчевский В. В.** Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций / В. В. Хильчевский, В. Г. Дубенец. Киев: Вища шк., 1977.
20. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960.
21. **Paimushin V. N., Firsov V. A., Gyunal I., Shishkin V. M.** Identification of the elastic and damping characteristics of soft materials based on the analysis of damped flexural vibrations of test specimens // Mech. Composite Materials. 2016. V. 52, N 4. P. 435–454.
22. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982.
23. **Шуп Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.
24. **Джонсон К. Д., Кинхольц Д. А.** Расчет демпфирования колебаний в конструкциях, содержащих закрепленные вязкоупругие слои, методом конечных элементов // Аэрокосм. техника. 1983. Т. 1, № 4. С. 124–133.
25. **Клаф Р.** Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. М.: Стройиздат, 1979.
26. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
27. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
28. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Шишкин В. М.** Учет зависящего от частоты динамического модуля упругости дюралюминия в задачах деформирования // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 3. С. 163–177.
29. **Caughey T. K., O' Kelly M. E. J.** Effect damping on the natural frequencies of linear dynamic system // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. V. 33, N 1. P. 1458–1461.

*Поступила в редакцию 26/II 2020 г.,  
после доработки — 26/II 2020 г.  
Принята к публикации 30/III 2020 г.*