

ЛИТЕРАТУРА

1. Хэйшелл Б. Использование многодиафрагменной схемы в ударной трубе.— В кн.: Ударные трубы. М.: ИЛ, 1962.
2. Сеченов В. А., Щекотов О. Е. Импульсная рентгенография ударной волны в парах цезия на двух рентгеновских трубках.— ТВТ, 1972, т. 10, № 5.
3. Sechenov V. A. Experimental investigation of absorption coefficient of a dense xenon plasma.— In: Proc. of XVth I. C. P. I. G.: Contributed papers. Vol. 1. Minsk, 1981.
4. Бушман А. В., Ломакин Б. Н. и др. Термодинамика неидеальной плазмы цезия.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, вып. 5 (11).
5. Schlüter D. Die Emissionkontinua thermischer Edelgasplasmen.— Z. Phys., 1968, Bd 210, H. 1.
6. Hofsaess D. Emission continua of rare gas plasmas.— JQSRT, 1978, vol. 19, N 3.
7. Норман Г. Э. Непрерывные спектры излучения (поглощения) неидеальной плазмы.— ТВТ, 1979, т. 17, № 3.
8. Meiners D., Weiss C. O. Continuous emission of argon, krypton and xenon plasmas.— JQSRT, 1976, vol. 16, N 3.
9. Бакеев А. А., Напорожная Т. П. и др. Электрические и оптические характеристики импульсного разряда в криптоне.— ТВТ, 1971, т. 9, № 4.
10. Berge O. E., Böhm A., Rehder L. Spektroskopische Messungen am Membranstoßwellenrohr. Teil. II. Absolutbestimmung der ξ -Factoren neutraler Edelgasatome.— Z. Naturforsch., 1965, Bd 20a, H. 1.
11. Inglis D. B., Teller E. Ionic depression of series limits in one-electron spectra.— Astrophys. J., 1939, vol. 90, N 3.
12. Сеченов В. А. Исследование оптических свойств плотной ксеноновой плазмы.— Физика плазмы, 1981, т. 7, № 5.

Поступила 24/VI 1983 г.

УДК 533.932.15

ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ И ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

С. А. Васильевский, И. А. Соколова, Г. А. Турский
(Москва)

Во многих задачах, связанных с течением высокотемпературных многокомпонентных газовых смесей, процессы молекулярного переноса являются определяющими. Так, в задачах обтекания тел вязким теплопроводным газом при входе в атмосферы планет солнечной системы практически во всей области течения за головной ударной волной на наиболее теплонапряженном участке траектории, где преобладает конвективная теплопередача, реализуется течение частично диссоциированного и ионизованного многокомпонентного газа; процессы молекулярного переноса в такой смеси непосредственно определяют молекулярные потоки тепла и массы, силы вязкого трения, а также скорость термохимического разрушения обтекаемой поверхности [1]. Процессы переноса играют важную роль при течении слабоионизованной плазмы в МГДГ [2], газофазных ядерных реакторах [3] и других задачах. Поэтому достаточно строгое и полное изучение поведения коэффициентов переноса в широком диапазоне температур и давлений представляет практически важную задачу, тем более, что экспериментальные исследования многокомпонентных плазм при высоких температурах связаны с большими сложностями диагностики. Важно также отметить, что изучение всех нужных свойств полного набора коэффициентов переноса до настоящего времени не проводилось из-за сложности соответствующих формул, даваемых кинетической теорией газов в изложении [4]. Из экспериментальных работ следует отметить [5—7], в которых проводилось исследование некоторых (в основном только коэффициентов теплопроводности и вязкости) переносных свойств воздуха, азота, водорода, аргона. Численные расчеты переносных свойств ионизованных газов методами кинетической теории [4] с учетом высших приближений в полиномиальном разложении функции распределения по полиномам Сонина проводилось в [8—11]. Однако для течений химически равновесных смесей высокотемпературных газов, для которых в уравнениях гидродинамики вводятся эффективные коэффициенты с учетом дополнительных членов, связанных с переносом компонентов, выделением тепла в реакциях и с использованием условий квазинейтральности ионизованных смесей (строгое определение полного набора эффективных коэффициентов переноса дано в [12, 13]), расчеты всех эффективных коэффициентов, фигурирующих в уравнениях гидродинамики, последовательно нигде не проводились. В литературе до настоящего времени нет достаточной информации о влиянии того или иного коэффициента в той или иной области температур, давлений и концентраций элементов и о роли учета высших приближений при расчете коэффици-

ентов переноса при определении потока тепла, диффузионных потоков компонентов и силы вязкого трения [14].

Молекулярно-кинетический подход для описания явлений переноса в газовых смесях, основывающийся на решении системы уравнений Больцмана для функций распределения компонентов методом Чепмена — Энскога, позволяет вывести полную систему уравнений гидродинамики и получить выражения при известных потенциалах взаимодействия частиц всех коэффициентов, входящих в эти уравнения [4]. Причем задача вычисления коэффициентов переноса при таком подходе отделяется от решения основной гидродинамической задачи: коэффициенты переноса являются функциями только температуры, давления и химического состава. Известная процедура разложения возмущений функций распределения по полиномам Сонина приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений, результаты решения которой зависят от числа членов ξ в разложении. Число членов ξ , при котором обеспечивается необходимая точность коэффициентов переноса, зависит от ряда условий и, в частности, определяется характером поведения сечений взаимодействия компонентов. Для нейтральных смесей газов первое ненулевое приближение оказывается вполне достаточным. Для ионизованных газов и смесей газов, содержащих легкий компонент, число членов ξ , обеспечивающее сходимость, возрастает: так, использование наивысшего ненулевого приближения при расчете коэффициента теплопроводности ионизованного воздуха при молярной концентрации электронов $x_E \approx 0,5$ приводит к ошибке $\approx 60\%$, а при расчете коэффициента теплопроводности смеси, содержащей легкий компонент, при $T = 200$ К — к ошибке $\approx 11\%$ [15]. Для полностью ионизованного газа число приближений ξ , обеспечивающее значение коэффициентов переноса с точностью 1% и совпадение с асимптотическими значениями, полученными при решении уравнения Фоккера — Планка для идеальной плазмы [16], достигает четырех.

При традиционном подходе к решению системы алгебраических уравнений, получаемой в методе Чепмена — Энскога с использованием разложений в ряды по полиномам Сонина, выражения для коэффициентов переноса имеют вид отношений определителей порядка $N\xi + 1$ и $N\xi$, где N — число компонентов смеси. При повышении порядка приближения ξ на единицу порядок определителей повышается на N . Это создает существенные численные трудности при расчете свойств переноса многокомпонентных смесей в высших приближениях. При ином подходе к решению исходной алгебраической системы уравнений для определения коэффициентов разложения по полиномам Сонина, предложенном в [17, 18], уравнения переноса массы компонентов и уравнение переноса энергии записываются в виде, разрешенном относительно векторов «сил» через диффузионные и тепловые потоки. В таком представлении выражения для коэффициентов переноса в высших приближениях имеют ряд преимуществ перед выражениями, записанными в традиционной форме: для данного приближения ξ порядок определителей в коэффициентах переноса понижен на число, равное числу компонентов смеси; полностью исключена процедура двойного обращения матриц в любом приближении, имеющая место при традиционном вычислении истинного коэффициента теплопроводности смеси [4]; вместо коэффициентов многокомпонентной диффузии $D_{ij}(\xi)$ вводятся существенно более простые для вычисления коэффициенты сопротивления $\Delta_{ij}(\xi)$, записанные через коэффициенты бинарной диффузии в первом приближении $\mathcal{D}_{ij}(1)$, и поправочные множители $\varphi_{ij}(\xi)$, зависящие от высших приближений (благодаря записи уравнений переноса массы компонентов в виде соотношений Стефана — Максвелла в любом приближении ξ): вместо многокомпонентных коэффициентов термодиффузии D_i^T введены более простые для вычисления термодиффузионные отношения $k_{Ti}(\xi)$. Модифицированная форма записи уравнений переноса получена для произвольных течений многокомпонентных смесей в максимально простом виде, что позволило провести в данной работе обширные расчеты коэффициентов переноса в широком диапазоне давлений, температур и концентраций элементов. Новая форма уравнений переноса весьма удобна для численного решения разнообразных газодинамических задач [19, 20]. Используемая в данной работе структура уравнений переноса получена, кроме того, и феноменологически с использованием методов термодинамики необратимых процессов [21, 22].

1. Система уравнений Навье — Стокса для многокомпонентных смесей газов. Рассмотрим N -компонентную смесь газов. Для практического расчета течений с произвольно протекающими химическими реакциями удобно выделить L независимых (базисных) компонентов, за которые, например, можно принять химические элементы и электронную компоненту, и $R = N - L$ компонентов (продуктов реакций). Обозначим через $B_j (j = 1, \dots, N)$ химический символ базисного компонента, а через $A_i (i = L + 1, \dots, N)$ — символ продукта реакции. Тогда, не нарушая общности, линейно-независимые стехиометрические уравнения реакций можно записать в виде

$$(1.1) \quad A_i = \sum_{j=1}^L \nu_{ij} B_j - q_i(T), \quad i = L + 1, \dots, N,$$

где v_{ij} — стехиометрические коэффициенты реакций; q_i — теплоты реакций. В соответствии с (1.1) законы сохранения массы и заряда в реакциях будут иметь вид

$$(1.2) \quad m_i = \sum_{j=1}^L v_{ij} m_j, \quad e_i = \sum_{j=1}^L v_{ij} e_j,$$

где m_i — масса i -й частицы; e_i — заряд i -й частицы. Определим концентрации элементов c_j^* ($j = 1, \dots, L$) и диффузионные потоки элементов \mathbf{J}_j^* ($j = 1, \dots, L$) в соответствии со стехиометрической записью реакций (1.1) следующим образом:

$$(1.3) \quad c_j^* = c_j + \sum_{k=L+1}^N v_{kj} \frac{m_j}{m_k} c_k, \quad \mathbf{J}_j^* = \mathbf{J}_j + \sum_{k=L+1}^N v_{kj} \frac{m_j}{m_k} \mathbf{J}_k, \quad \sum_{j=1}^L c_j^* = 1, \\ \sum_{j=1}^L \mathbf{J}_j^* = 0.$$

Тогда система уравнений Навье — Стокса может быть записана в виде [12]

$$(1.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \mathbf{v} = \sum_{k=1}^N \rho_k \mathbf{v}_k;$$

$$(1.5) \quad \rho \frac{dc_j^*}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J}_j^* = 0, \quad \rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \quad (j = 1, \dots, L);$$

$$(1.6) \quad \rho \frac{dc_i}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = \dot{w}_i \quad (i = L+1, \dots, N);$$

$$(1.7) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{k=1}^N \rho_k \mathbf{F}_k - \nabla p + \operatorname{div} \hat{\tau};$$

$$(1.8) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \rho_k v_k \mathbf{F}_k + \operatorname{div}(\hat{\tau} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{J}_q);$$

$$(1.9) \quad p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k}, \quad \rho = \sum_{k=1}^N n_k m_k, \quad n = \sum_{k=1}^N n_k,$$

где $\rho_i = n_i m_i$, n_i , \mathbf{v}_i , $c_i = \rho_i / \rho$, $x_i = n_i / n$, \mathbf{J}_i , \dot{w}_i , \mathbf{F}_i , h_i — массовая плотность, число частиц в единице объема, среднестатистическая скорость, массовая концентрация, молярная концентрация, вектор массового диффузионного потока i -го компонента, скорость возникновения массы i -го компонента в единице объема за единицу времени, массовая сила, действующая на i -й компонент, удельная энтальпия i -го компонента соответственно; ρ , \mathbf{v} , p , h , T , m , n , \mathbf{J}_q , $\hat{\tau}$ — плотность, среднестатистическая скорость, давление, энтальпия, температура, масса, полное число частиц в единице объема, вектор полного потока тепла, тензор вязких напряжений смеси в целом соответственно; k — постоянная Больцмана. Уравнение (1.4) представляет собой уравнение неразрывности смеси в целом; (1.5) — уравнение диффузии элементов; (1.6) — уравнение диффузии компонентов — продуктов реакций; (1.7) — уравнение импульсов для смеси в целом; (1.8) — уравнение энергии для смеси в целом; (1.9) — уравнение состояния для смеси идеальных (неплотных) газов. В силу закона сохранения заряда (1.2) в химических реакциях (1.1) имеем

$$e_i = v_{iE} e_E, \quad \rho_e = \sum_{k=1}^N n_k e_k = \frac{\rho e_E}{m_E} c_E^*, \quad c_E^* = \frac{m_E}{m} x_E^*,$$

где индекс E означает электрон; ρ_e — плотность объемного заряда.

Для замыкания системы уравнений (1.4)–(1.9) необходимо иметь явные выражения для «потоков» \mathbf{J}_i ($i = 1, \dots, N$), \mathbf{J}_q , $\hat{\tau}$, \dot{w}_i — так называемые уравнения переноса. Феноменологический и кинетический [21, 22] подходы дают совершенно одинаковые по структуре выражения для уравнений переноса.

Уравнение для тензора вязких напряжений («перенос импульса»)

$$(1.10) \quad \tau_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \mu(\xi) \operatorname{div} v \delta_{\alpha\beta} + 2\mu(\xi) e_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right),$$

где $\tau_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора вязких напряжений; $e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора скоростей деформации; $\mu(\xi)$ — коэффициент вязкости смеси в приближении ξ . Наличие химических реакций вызывает появление дополнительного слагаемого в (1.10) с коэффициентом объемной вязкости. Однако для аэродинамических задач это слагаемое пренебрежимо мало [23]. Уравнения переноса массы отдельных компонентов, согласно [17], записываются в виде, сразу разрешенном относительно «сил» через потоки в любом приближении ξ . Следуя записи уравнений (1.5), (1.6), представим уравнения для диффузионных потоков компонентов отдельно для элементов \mathbf{J}_j^* ($j = 1, \dots, L$) и отдельно для продуктов реакций \mathbf{J}_i ($i = L + 1, \dots, N$), исключив из них диффузионные потоки компонентов-элементов \mathbf{J}_j ($j = 1, \dots, L$) с помощью (1.3):

$$(1.11) \quad \mathbf{d}_j = -\Delta_j \mathbf{J}_j^{*'} + x_j \sum_{l=1}^L \Delta_{jl} \mathbf{J}_l^{*'} + \sum_{k=L+1}^N \theta_{kj}^* \mathbf{J}_k', \quad \mathbf{J}_k' = \frac{1}{n} \mathbf{J}_k \\ (j = 1, \dots, L);$$

$$(1.12) \quad \mathbf{d}_i = -\Delta_i \mathbf{J}_i' + x_i \sum_{l=1}^L \Delta_{il} \mathbf{J}_l^{*'} + \sum_{k=L+1}^N \theta_{ki}^0 \mathbf{J}_k' \quad (i = L + 1, \dots, N),$$

где векторы диффузионных сил \mathbf{d}_k равны:

$$\mathbf{d}_k = \nabla x_k + k_{pk} \nabla \ln p + k_{Tk}(\xi) \nabla \ln T - \frac{c_k}{p} \left(\rho \mathbf{F}_k - \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{F}_i \right) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Здесь

$$\Delta_{ij}^{-1} = n \mathcal{D}_{ij}(1) f_{ij}(\xi); \quad f_{ij}(\xi) = [1 + \varphi_{ij}(\xi)]^{-1}; \quad \Delta_i = \sum_{k=1}^N x_k \Delta_{ik};$$

$$k_{pi} = x_i - c_i; \quad \theta_{kj}^* = \Delta_j v_{kj} + x_j \left(\Delta_{jk} - \sum_{l=1}^L v_{kl} \Delta_{lj} \right);$$

$$\alpha_{ri} = k_{Ti} / x_i; \quad \theta_{ki}^0 = x_i \left(\Delta_{ik} - \sum_{l=1}^L v_{kl} \Delta_{li} \right);$$

Δ_{ij} — коэффициенты сопротивления; k_{pi} — коэффициенты бародиффузии; k_{Ti} — термодиффузионные отношения; α_{Ti} — термодиффузионный фактор; $\mathcal{D}_{ij}(1)$ — коэффициенты бинарной диффузии в первом приближении; $\varphi_{ij}(\xi)$ — поправочные множители к коэффициентам сопротивления, зависящие от порядка приближения ξ [17].

Уравнение для переноса полного потока тепла имеет вид

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{q} + \sum_{k=1}^N h_k \mathbf{J}_k = \mathbf{q} + \sum_{l=1}^L h_l \mathbf{J}_l^* - \sum_{k=L+1}^N q_k \mathbf{J}_k,$$

где \mathbf{q} — приведенный поток тепла, равный

$$\mathbf{q} = -\lambda(\xi) \nabla T + kT \sum_{k=1}^N \alpha_{Tk}(\xi) \mathbf{J}_k' = -\lambda(\xi) \nabla T + kT \sum_{l=1}^L \alpha_{Tl} \mathbf{J}_l^{*'} + \\ + kT \sum_{k=L+1}^N \beta_{Tk}(\xi) \mathbf{J}_k', \quad \beta_{Ti} = \alpha_{Ti} - \sum_{j=1}^L v_{ij} \alpha_{Tj}.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ — так называемый «истинный» коэффициент теплопроводности, т. е. коэффициент перед градиентом температуры, когда все диффузионные потоки обращаются в нуль.

Коэффициенты переноса в этих уравнениях имеют следующий вид: коэффициент «истинной» теплопроводности

$$(1.13) \quad \lambda(\xi) = -\frac{75}{8} \frac{nk}{\det \|q_{rs}\|} \begin{vmatrix} 0 & x_s & 0 & \dots & 0 \\ x_r & q_{rs}^{1,1} & q_{rs}^{1,2} & \dots & q_{rs}^{1,\xi-1} \\ 0 & q_{rs}^{2,1} & q_{rs}^{2,2} & \dots & q_{rs}^{2,\xi-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_{rs}^{\xi-1,1} & q_{rs}^{\xi-1,2} & \dots & q_{rs}^{\xi-1,\xi-1} \end{vmatrix};$$

$$\xi \geq 2$$

$$\lambda(1) = 0$$

термодиффузионные отношения

$$(1.14) \quad k_{Ti}(\xi) = -\frac{5}{2} \frac{1}{\det \|q_{rs}\|} \begin{vmatrix} 0 & x_s & 0 & \dots & 0 \\ q_{ri}^{1,0} & q_{rs}^{1,1} & q_{rs}^{1,2} & \dots & q_{rs}^{1,\xi-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{ri}^{\xi-1,0} & q_{rs}^{\xi-1,1} & q_{rs}^{\xi-1,2} & \dots & q_{rs}^{\xi-1,\xi-1} \end{vmatrix};$$

$$\xi \geq 2$$

$$k_{Ti}(1) = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

поправочные коэффициенты $\varphi_{ij}(\xi)$ к коэффициентам сопротивления

$$(1.15) \quad \varphi_{ij}(\xi) = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{D}_{ij}(1)}{x_i x_j} \frac{1}{\det \|q_{rs}\|} \begin{vmatrix} 0 & q_{js}^{0,1} & \dots & q_{js}^{0,\xi-1} \\ q_{ri}^{1,0} & q_{rs}^{1,1} & \dots & q_{rs}^{1,\xi-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{ri}^{\xi-1,0} & q_{rs}^{\xi-1,1} & \dots & q_{rs}^{\xi-1,\xi-1} \end{vmatrix}.$$

$$\xi \geq 2$$

$$\varphi_{ij}(1) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

Выражение для коэффициента вязкости имеет вид, полученный в [8]:

$$(1.16) \quad \mu(\xi) = -\frac{5}{2} \frac{n}{\det \|\hat{q}_{rs}\|} \begin{vmatrix} 0 & x_s \sqrt{m_s} & 0 & \dots & 0 \\ x_r \sqrt{m_r} & \hat{q}_{rs}^{0,0} & \hat{q}_{rs}^{0,1} & \dots & \hat{q}_{rs}^{0,\xi-1} \\ 0 & \hat{q}_{rs}^{1,0} & \hat{q}_{rs}^{1,1} & \dots & \hat{q}_{rs}^{1,\xi-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \hat{q}_{rs}^{\xi-1,0} & \hat{q}_{rs}^{\xi-1,1} & \dots & \hat{q}_{rs}^{\xi-1,\xi-1} \end{vmatrix}.$$

В этих выражениях q_{rs}^{mp} и \hat{q}_{rs}^{mp} представляют собой квадратные матрицы порядка $N \times N$, составленные из q_{ij}^{mp} и \hat{q}_{ij}^{mp} ($m, p = 0, 1, \dots, \xi - 1$); $\det \|q_{rs}\|$ — определитель матрицы, составленной из матрицы числителя путем исключения первой строки и первого столбца. Элементы q_{ij}^{mp} выражаются через интегралы столкновений $Q_{ij}^{l,s}(T)$ различных пар компонентов известным образом [4, 8]. В данной работе выражения q_{ij}^{mp} отличаются от приведенных в [8] множителем $(m_j/2\pi kT)^{1/2} n^{-1}$ и имеют вид

$$q_{ij}^{mp} = \sqrt{\frac{m_j}{2\pi kT}} \frac{1}{n} \left\{ 8n_i \left(\frac{m_i}{m_j}\right)^{p+1/2} \sum_{k=1}^N n_k \sum_{l=1}^{m+1} [\delta_{ij} + (-1)^l \delta_{jk}] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{t=0}^{m+1-l} \frac{(m_j/m_k)^{l+2t-1}}{(m_i/m_k+1)^{m+p+1/2}} \sum_{s=l}^{m+p-(l-2)-2t} a_{lis}^{mp} Q_{ik}^{l,s}(T) \right\}, \quad m \geq 0, p \geq 1.$$

Выражения для \hat{q}_{ij}^{mp} также отличаются от приведенных в [8] на тот же множитель. Значения коэффициентов a_{lis}^{mp} приводятся в [24].

Интегралы столкновений $Q_{ij}^{l,s}$ требуемых порядков l и s рассчитываются по известным сечениям рассеяния по формуле

$$Q_{ij}^{l,s}(T) = \frac{4(l+1)}{(s+1)! [2l+1 - (-1)^l]} \int_0^\infty e^{-\gamma_{ij}^2 \gamma_{ij}^{2s+3}} Q_{ij}^l(g) d\gamma_{ij},$$

где сечение Q_{ij}^l может быть рассчитано, если известен потенциал парного взаимодействия частиц $\varphi(r_{ij})$, по которому в классическом случае рассчитываются углы отклонения частиц χ_{ij} [4], а в квантово-механическом случае рассчитываются фазы рассеяния [25]. Для классического случая [4]

$$Q_{ij}^l = 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos^l \chi_{ij}) b db.$$

Из приведенных выражений для коэффициентов $\lambda(\xi)$, $k_{Ti}(\xi)$, $\varphi_{ij}(\xi)$ видно, что порядок определителей в них равен $N(\xi - 1) + 1$ и $N(\xi - 1)$ и меньше на N , чем в соответствующих коэффициентах, полученных традиционным путем [4].

2. Численный расчет коэффициентов переноса $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$, $k_{Ti}(\xi)$, $\varphi_{ij}(\xi)$ ионизованного воздуха в высших приближениях. Для приведенных в п. 1 уравнений переноса массы компонентов импульса и энергии были разработаны метод и программа расчета коэффициентов переноса $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$, $k_{Ti}(\xi)$, $\varphi_{ij}(\xi)$ многокомпонентных газовых смесей по формулам (1.13)–(1.16) до четвертого приближения ξ включительно в широком диапазоне температур и давлений. Численные расчеты проводились для химически равновесной частично ионизованной смеси азота и кислорода с учетом компонентов O, N, E, O₂, N₂, NO, N⁺, O⁺, NO⁺ для заданного элементного состава $c_O^* = 0,244$ и $c_N^* = 0,756$ в диапазоне температур $300 \leq T \leq 20000$ К и давлений $1,013 \cdot 10^2$ Па $\leq p \leq 1,013 \cdot 10^7$ Па. Константы равновесия аппроксимировались по данным таблиц [26]. Двукратная ионизация и эффекты неидеальности при расчете состава не учитывались. Интегралы столкновений $Q_{ij}^{l,s}$ требуемых порядков l и s для всех пар компонентов взяты из [10].

При численных расчетах коэффициентов $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ использовались тождества $\sum_{i=1}^N k_{Ti}(\xi) = 0$, $\varphi_{ij}(\xi) = \varphi_{ji}(\xi)$ и вычисления проводились для тех компонентов, концентрация которых и их влияние на свойства смеси не являются пренебрежимо малыми. Результаты численных расчетов коэффициентов $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$, $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ в различных приближениях представлены в табл. 1–3. При низких температурах (до начала ионизации) рассчитанные значения $\mu(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ хорошо согласуются с данными [27]. При высоких температурах (в области частичной ионизации) рассчитанные значения $\mu(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ хорошо согласуются с результатами расчетов [10] (при одном и том же составе воздуха), которые, в свою очередь, хорошо согласуются с экспериментальными данными [5], а в области полной ионизации — с теорией Спитцера [16].

Для исследования сходимости значений коэффициентов переноса с увеличением числа приближений ξ во всем рассматриваемом диапазоне температур и давлений расчеты проводились для всех значений $\xi = 1, 2, 3$ и 4 . Сходимость коэффициентов $\mu(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ для воздуха рассматривалась в [8, 10], сходимость коэффициента термодиффузии $D_i^T(\xi)$ исследовалась в [8]. Детальное исследование сходимости коэффициентов $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ для многокомпонентной ионизованной смеси ранее не проводилось вообще.

Как видно из табл. 1, для нейтрального и частично ионизованного воздуха ($x_E \leq 0,4$) коэффициент вязкости $\mu(\xi)$ с погрешностью $\approx 3\%$ можно вычислять в первом приближении ($\xi = 1$). Для сильно ионизован-

Таблица 1

$\mu(\xi), \text{мП}$									
T, K	p=0,01			p=1,0			p=100,0		
	x_E	$\xi=1$	$\xi=2$	x_E	$\xi=1$	$\xi=2$	x_E	$\xi=1$	$\xi=2$
5 000	$1,2 \cdot 10^{-4}$	1,588	1,591	$4,3 \cdot 10^{-5}$	1,571	1,574	0	1,518	1,521
6 000	$6,10 \cdot 10^{-4}$	1,785	1,789	$2,14 \cdot 10^{-4}$	1,847	1,850	$6,4 \cdot 10^{-5}$	1,799	1,803
7 000	$4,44 \cdot 10^{-3}$	1,996	2,003	$6,65 \cdot 10^{-4}$	2,101	2,105	$2,25 \cdot 10^{-4}$	2,069	2,073
8 000	0,0225	2,138	2,147	$2,39 \cdot 10^{-3}$	2,301	2,307	$5,6 \cdot 10^{-4}$	2,340	2,344
9 000	0,0772	1,951	1,967	$8,37 \cdot 10^{-3}$	2,508	2,516	$1,19 \cdot 10^{-3}$	2,608	2,612
10 000	0,189	1,356	1,372	0,0234	2,650	2,661	$2,59 \cdot 10^{-3}$	2,855	2,855
11 000	0,330	0,697	0,708	0,0538	2,611	2,634	$5,73 \cdot 10^{-3}$	3,070	3,078
12 000	0,431	0,293	0,300	0,105	2,340	2,363	0,0117	3,278	3,286
13 000	0,476	0,126	0,131	0,177	1,871	1,896	0,0215	3,509	3,464
14 000	0,491	0,0701	0,0742	0,260	1,351	1,374	0,0364	3,572	3,584
15 000	0,496	0,0533	0,0578	0,340	0,905	0,924	0,0571	3,607	3,622
16 000	0,498	0,0503	0,0552	0,402	0,585	0,066	0,0839	3,540	3,559
17 000	0,499	0,0526	0,0582	0,443	0,384	0,396	0,117	3,368	3,393
18 000	0,500	0,0574	0,0636	0,468	0,270	0,281	0,155	3,107	3,137
19 000	0,500	0,0634	0,0704	0,481	0,209	0,221	0,196	2,786	2,822
20 000	0,500	0,0702	0,0781	0,489	0,179	0,191	0,240	2,440	2,480

Таблица 2

$\lambda(\xi), \text{Вт/(К·м)}$									
T, K	p=0,01			p=1			p=100		
	$\xi=2$	$\xi=3$	$\xi=4$	$\xi=2$	$\xi=3$	$\xi=4$	$\xi=2$	$\xi=3$	$\xi=4$
5 000	0,252	0,253	0,253	0,221	0,221	0,221	0,187	0,188	0,188
6 000	0,379	0,381	0,387	0,287	0,287	0,287	0,240	0,241	0,241
7 000	0,479	0,501	0,514	0,402	0,403	0,404	0,298	0,298	0,298
8 000	0,542	0,606	0,616	0,545	0,551	0,563	0,376	0,376	0,376
9 000	0,520	0,630	0,635	0,677	0,717	0,735	0,490	0,489	0,489
10 000	0,424	0,578	0,580	0,789	0,891	0,908	0,652	0,654	0,654
11 000	0,352	0,551	0,551	0,863	1,045	1,058	0,864	0,870	0,880
12 000	0,341	0,587	0,587	0,888	1,161	1,169	1,106	1,134	1,158
13 000	0,372	0,668	0,669	0,890	1,259	1,263	1,363	1,449	1,484
14 000	0,423	0,774	0,774	0,905	1,372	1,375	1,631	1,812	1,854
15 000	0,484	0,894	0,894	0,950	1,518	1,520	1,904	2,218	2,263
16 000	0,551	1,026	1,026	1,025	1,694	1,696	2,179	2,660	2,705
17 000	0,624	1,168	1,168	1,122	1,895	1,896	2,453	3,132	3,175
18 000	0,703	1,322	1,322	1,236	2,115	2,116	2,729	3,633	3,674
19 000	0,787	1,487	1,487	1,362	2,352	2,353	3,012	4,163	4,202
20 000	0,877	1,662	1,622	1,498	2,604	2,605	3,307	4,723	4,759

ного воздуха ($x_E \geq 0,4$) расчет коэффициента вязкости в первом приближении приводит к ошибке до 10 %, однако уже второе приближение оказывается достаточно точным (дальнейшее увеличение ξ на точности расчета $\mu(\xi)$ в пределах 1 % не сказывается).

Расчет коэффициента $\lambda(\xi)$ во втором приближении для слабо ионизованного воздуха дает ошибку $\leq 5\%$, а для сильно ионизованной смеси ($x_E \approx 0,5$, $p = 0,01$) значение λ (2) во втором приближении оказывается заниженным по сравнению с точным приблизительно вдвое. Однако уже третье приближение оказывается достаточно точным (λ (3) совпадает с λ (4) с точностью 1—2% во всем рассматриваемом диапазоне).

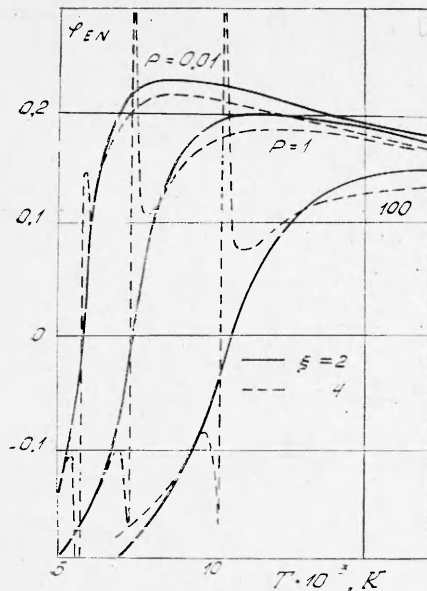
Сходимость коэффициентов $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ носит различный характер при разной степени ионизации для разных типов компонентов. В табл. 3 приводятся рассчитанные значения некоторых из этих коэффициентов для $p = 1$ и четырех значений температур, соответствующих очень сла-

Таблица 3

T, K	ξ	$k_{Ti}(\xi), p=1$			$\varphi_{ij}(\xi), p=1$					
		N_2	N	N^+	O-N	E-N	N-O ⁺	N-N ⁺	E-N ⁺	O ⁺ -N ⁺
5 000	2	$4,07 \cdot 10^{-3}$	$-1,68 \cdot 10^{-3}$	0	-0,0019	-0,217				
	3	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$-1,71 \cdot 10^{-3}$	0	-0,0021	-0,327				
	4	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$-1,71 \cdot 10^{-3}$	0	-0,0021	-0,499				
8 000	2	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$-5,71 \cdot 10^{-3}$	$-3,43 \cdot 10^{-4}$	-0,0009	0,069	-0,0116	-0,0113	-0,105	0,0361
	3	$5,40 \cdot 10^{-3}$	$-5,99 \cdot 10^{-3}$	$-2,12 \cdot 10^{-4}$	-0,0009	0,077	-0,0126	-0,0116	-0,179	0,0369
	4	$5,71 \cdot 10^{-3}$	$-6,67 \cdot 10^{-3}$	$-7,45 \cdot 10^{-5}$	-0,0010	0,106	-0,0127	-0,0117	-0,279	0,0374
13 000	2	0	$-4,80 \cdot 10^{-2}$	$-4,48 \cdot 10^{-2}$	-0,0022	0,196	-0,0608	-0,0086	-0,338	-0,0570
	3	0	$-4,88 \cdot 10^{-2}$	$-3,09 \cdot 10^{-2}$	-0,0024	0,181	-0,0624	-0,0094	-0,346	-0,0571
	4	0	$-4,95 \cdot 10^{-2}$	$-2,96 \cdot 10^{-2}$	-0,0025	0,182	-0,0626	-0,0093	-0,349	-0,0571
18 000	2	0	$-7,25 \cdot 10^{-3}$	$-2,48 \cdot 10^{-1}$	-0,0025	0,168	-0,0420	-0,0428	-0,351	-0,0742
	3	0	$-7,44 \cdot 10^{-3}$	$-2,19 \cdot 10^{-1}$	-0,0028	0,154	-0,0445	-0,0137	-0,357	-0,0752
	4	0	$-7,47 \cdot 10^{-3}$	$-2,18 \cdot 10^{-1}$	-0,0028	0,154	-0,0446	-0,0138	-0,360	-0,0752

бой, частичной и полной ионизации. Как видно из табл. 3, для многих компонентов коэффициенты $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ пренебрежимо малы во всем диапазоне температур. Заметное влияние на свойства смеси могут оказывать только $k_{Tz}(\xi)$, $k_{TE}(\xi)$, $\varphi_{Ez}(\xi)$, $\varphi_{En}(\xi)$ (индексами z, n и E обозначены заряд нейтрал и электрон соответственно). Следует также отметить, что во все уравнения переноса коэффициенты $\varphi_{ij}(\xi)$ входят в виде выражения $x_i[1 + \varphi_{ij}(\xi)]$, поэтому для оценки влияния сходимости $\varphi_{ij}(\xi)$ на свойства смеси необходимо рассматривать произведения $x_i\varphi_{ij}(\xi)$. Для частично и полностью ионизованного воздуха ($x_E \geq 0,1$) коэффициенты $k_{Tz}(\xi)$, $k_{TE}(\xi)$, $\varphi_{En}(\xi)$ практически сходятся уже в третьем приближении (здесь второе приближение отличается от третьего на 10—20%). Для смеси, состоящей практически только из нейтральных компонентов, когда $x_E \leq 10^{-5}$, коэффициенты $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ пренебрежимо малы, поэтому термодиффузию и поправочные коэффициенты $\varphi_{ij}(\xi)$ к коэффициентам бинарной диффузии в Δ_{ij} здесь можно не учитывать.

В области слабо ионизованного газа ($x_E \approx 10^{-3}$) сходимость коэффициентов $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ плохая. Оказалось, что для слабо ионизованного воздуха при расчете коэффициентов переноса $\lambda(\xi)$, $k_{Ti}(\xi)$ и $\varphi_{ij}(\xi)$ в четвертом приближении ($\xi = 4$) появляется особенность, проявляю-



появляющаяся в том, что главный определитель $\det \|q_{rs}\|$, стоящий в знаменателях формул (1.13), (1.14), обращается в нуль. При практическом расчете, например коэффициентов φ_{EN} , эта особенность выражается в резком возрастании значений коэффициентов в узкой области в окрестности этой точки. На фигуре показано поведение коэффициентов φ_{EN} в различных приближениях ξ : сплошными линиями показаны значения φ_{EN} (2), рассчитанные во втором приближении ξ , штриховыми — значения φ_{EN} (4), рассчитанные в четвертом приближении. Обращение в нуль знаменателя в коэффициентах переноса при $\xi = 4$ связано, по-видимому, с характером поведения сечений взаимодействия компонентов ионизованного азота, так как при $\xi = 4$ для слабо ионизованного азота соответствующие формулы имеют

особую точку, а в случае чистого слабо ионизованного кислорода такой особенности не возникает.

Существование особых точек и сходимость коэффициентов переноса в области слабой ионизации требуют дополнительных исследований и проведения расчетов в более высоких приближениях ξ ($\xi > 4$). Однако следует отметить, что плохая сходимость коэффициентов переноса в области слабой ионизации практически не сказывается на свойствах смеси в целом, так как все коэффициенты, имеющие плохую сходимость в этой области ($k_{Tz}(\xi)$, $k_{Tn}(\xi)$, $x_3\varphi_{z3}(\xi)$, $x_E\varphi_{EN}(\xi)$), оказываются малыми и не дают заметного вклада в коэффициенты переноса, а при возрастании степени ионизации сходимость всех коэффициентов становится быстрее.

Более подробные данные, необходимые для детального расчета рассмотренных коэффициентов переноса, приведены в отчетах Института механики МГУ [13, 24].

Замечание 1. Запись уравнений переноса массы компонентов в форме (1.11), (1.12) весьма удобна для решения задач, если вводить в качестве новых искомым величин диффузионные потоки элементов J_j^* ($j = 1, \dots, L$) и диффузионные потоки продуктов реакций J_i ($i = L + 1, \dots, N$) наряду с искомыми концентрациями c_i ($i = 1, \dots, N$). Тогда не надо разрешать уравнения (1.11), (1.12) относительно потоков и подставлять их в (1.5) и (1.6), а можно записать диффузионно-кинетическую систему уравнений (1.5), (1.6), (1.11), (1.12) в случае параболического приближения в нормальной форме Коши относительно производных от c_i ($i = 1, \dots, N$) и J_j^* ($j = 1, \dots, L$), J_i ($i = L + 1, \dots, N$), для которой развиты эффективные численные методы решения [19]. При таком подходе не появляются многокомпонентные коэффициенты диффузии или их аналоги.

Замечание 2. Связь коэффициентов $\lambda(\xi)$ и $k_{Ti}(\xi)$ соответственно с коэффициентом теплопроводности и многокомпонентными коэффициентами термодиффузии, введенными в [4], обсуждается подробно в [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. Анализ химического состава ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на поверхности горящих пластиков.— Косм. исследования, 1964, т. 11, № 4.
2. Кириллин В. А. Состояние и перспективы развития теплофизики.— ТВТ, 1972, т. 10, вып. 6.
3. Певлев В. М. Некоторые результаты исследований по газофазному полосному реактору.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1977, № 6.

4. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961.
5. Асиновский Э. И., Низовский В. А., Шабашов А. И. Измерение коэффициентов электропроводности и теплопроводности плазмы воздуха и углекислого газа при помощи стабилизированной электрической дуги. — ТВТ, 1971, т. 9, вып. 1.
6. Morris J. C., Rudis R. P., Yos J. M. Measurements of electrical and thermal conductivity of hydrogen, nitrogen and argon at high temperatures. — Phys. Fluids, 1970, vol. 13, N 3.
7. Schreiber P. W., Hunter A. M., Benedetto K. R. Measurements of nitrogen plasma transport properties. — AIAA J., 1972, vol. 10, N 5.
8. Devoto R. S. Transport properties of ionized monatomic gases. — Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 6; Transport coefficients of ionized argon. — Phys. Fluids, 1973, vol. 16, N 4; Electron transport properties in high temperature air. — Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 1.
9. Capitelly M. Transport properties of partially ionized gases. — J. Phys., 1977, vol. 38, N 8.
10. Соколова И. А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонентов. — В кн.: Аэрофизические исследования. Физическая кинетика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1974, вып. 4.
11. Kulik P. P., Panevin Y. G. Transport properties of thermally ionized air. — In: Proc. 8th I. C. P. I. G., Vienne, 1967.
12. Сулов О. И., Тирский Г. А., Щенников В. В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных понизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. — ПМТФ, 1971, № 1.
13. Тирский Г. А., Васильевский С. А., Ефимова Л. Г. Постановка задачи обтекания тел вязким теплопроводным частично понизованным многокомпонентным газом и численный метод ее решения в рамках модели вязкого ударного слоя. Отчет Ин-та механики МГУ, № 2265. М., 1979.
14. Теплофизические свойства рабочих сред газофазного ядерного реактора/Под ред. В. М. Иевлева. М.: Атомиздат, 1980.
15. Ярошенко Т. И. Применение третьего приближения теории Чэпмена — Энскога к расчету теплопроводности бинарных смесей одноатомных газов и оценка влияния диффузионного термоэффекта. — ИФЖ, 1978, т. 35, № 6.
16. Spitzer L., Harm R. Transport phenomena in completely ionized gas. — Phys. Rev., 1953, vol. 89, N 5. Рус. пер. — В кн.: Проблемы современной физики, 1956, № 2.
17. Колесников А. Ф., Тирский Г. А. Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях. — В кн.: Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982.
18. Тирский Г. А. Уравнения движения частично понизованных многокомпонентных смесей газов в нормальной форме Коши с точными коэффициентами переноса. — Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 32.
19. Ковалев В. Л., Сулов О. Н. Разностный метод с повышенной точностью аппроксимации для интегрирования уравнений химически неравновесного и многокомпонентного вязкого ударного слоя. — В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений/Под ред. Г. А. Тирского. М.: Изд-во МГУ, 1981.
20. Сулов О. Н. Асимптотическое исследование уравнений химически неравновесного пограничного слоя. — В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений/Под ред. Г. А. Тирского. М.: Изд-во МГУ, 1981.
21. Колесниченко А. В., Тирский Г. А. Соотношения Стефана — Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред. — ЧММСС, 1976, т. 7, № 4.
22. Тирский Г. А. Гидродинамическое описание химически равновесных течений частично понизованных неидеальных смесей газов. — В кн.: Некоторые проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978.
23. Кузнецов В. М. К теории объемной вязкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 6.
24. Тирский Г. А., Васильевский С. А., Ефимова Л. Г., Колесников А. Ф., Соколова И. А. Расчет коэффициентов переноса в многокомпонентной плазме в высших приближениях. Эффект разделения элементов в химически и понизованно равновесной плазме. Отчет Ин-та механики МГУ № 2427. М., 1980.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1963.
26. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 1/Под ред. В. П. Глушко. М.: Наука, 1970—1977.
27. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей/Под ред. Н. Б. Варгафтика. М.: Наука, 1972.

Поступила 31/V 1983 г.