

еще достаточно точные способы определения текучести при очень малых значениях напряжения сдвига, и поэтому линейную экстраполяцию кривой текучести следует считать оправданной. Однако такая экстраполяция может быть причиной некоторого расхождения расчетных и экспериментальных данных, ощутимых в области малых значений τ_w .

Поступила 14 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Попов В. И., Хабахпашева Е. М. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 1.
2. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. Изд. «Мир», 1964.
3. Ulbrecht J., Mitschka P. Chemické inženýrství neneutonských kapalin. Nakladatelství Československé Akademie Věd, Praha, 1965.
4. Бостанджиян С. А., Столин А. М. Течение неньютоновских жидкостей между двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

АВТОКОЛЕБАНИЯ В КУЭТТОВОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. А. Бувевич, А. И. Леонов

(Москва)

К числу наиболее интересных эффектов, сопровождающих течение полимерных систем, относится так называемое «разрушение расплава». Это явление заключается в том, что струя расплава или концентрированного раствора полимера, вытекающая из капилляра, при достижении некоторых критических значений параметров, определяющих процесс деформирования, приобретает сильные искажения формы. Исходя из представлений о наличии специфической упругой неустойчивости при течении упруго-вязких сред, в работе [1] был введен критерий наступления этого явления и путем анализа многочисленных экспериментальных данных показана его применимость.

Другим возможным источником возникновения обсуждаемого явления может служить пристеночное скольжение упруго-вязкой жидкости при достаточно больших скоростях ее движения. В целях качественного анализа этого механизма возникновения нерегулярностей в потоке в данной работе рассмотрена задача об автоколебаниях, возникающих при проскальзывании несжимаемой максвелловской жидкости в течении Куэтта.

К сожалению, в литературе отсутствуют удовлетворительные данные, устанавливающие какие-либо количественные закономерности, относящиеся к пристеночному скольжению при быстром течении расплавов или растворов полимеров. Однако можно предполагать, что описывающие это явление закономерности аналогичны или весьма близки к установленным для сухого трения высокоэластичных материалов. Типичная кривая зависимости силы трения Q таких материалов от скорости скольжения v имеет максимум, сдвигающийся влево при повышении нормального давления [2, 3]. Для простоты ограничимся здесь рассмотрением случая, когда сила трения имеет падающую скоростную характеристику, в предположениях $d^2Q/dv^2 > 0$, $Q(v) > 0$, $\lim Q = 0$ при $v \rightarrow \infty$. Такого рода предположения соответствуют весьма высокому гидростатическому давлению в системе.

Кроме того, предполагаем здесь, что неравновесность процесса трения, имеющая место при меняющейся со временем v , малосущественна, т. е. силу трения можно описывать стационарной зависимостью $Q(v)$.

Сформулируем основные допущения, касающиеся процессов пристеночного скольжения. Предположим, что отлипание жидкости от стенки реализуется, когда касательное напряжение на ней достигает критического значения $Q(0) = Q_0$. Величина Q_0 , являясь мерой прочности адгезионных связей упруго-вязкой жидкости с материалом стенки, зависит, в частности, от характеристик этой жидкости — плотности ρ , вязкости η и времени релаксации θ . Поскольку плотность большинства полимеров примерно одинакова, то $Q_0 = Q_0(\eta, \theta)$. Из анализа размерностей следует $Q_0 \sim \eta/\theta = G$. Следовательно, с изменением материальных констант характеристика $Q(v)$ также будет претерпевать некоторые изменения, т. е., задаваясь некоторой кривой $Q(v)$, тем самым задаемся в какой-то мере и параметрами ρ, η, θ . Предполагая для простоты фиксированным также расстояние $2h$ между пластинами, получаем единственный параметр, который можно варьировать, — относительную скорость пластин $2V$.

Из соображений симметрии ясно, что задачу о течении максвелловской жидкости между параллельными пластинами, движущимися в противоположные стороны со скоростями V и $-V$, можно решать в интервале $0 \leq y \leq h$, полагая, что на нижней границе скорость всегда равна нулю. Поля скоростей и касательных напряжений определяются из решения системы уравнений

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}, \quad \theta \frac{\partial p_{xy}}{\partial t} + p_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1)$$

Система граничных и начальных условий имеет вид

$$\dot{v}_x|_{t=0} = 0, \quad p_{xy}|_{t=0} = 0, \quad v_x|_{y=h} = 0, \quad v_y|_{y=h} = V - v(t) \quad (2)$$

В случае, когда $v(t) \neq 0$, дополнительно к последнему условию имеется еще одно соотношение

$$p_{xy}|_{y=h} = Q(v) \quad (v \neq 0) \quad (3)$$

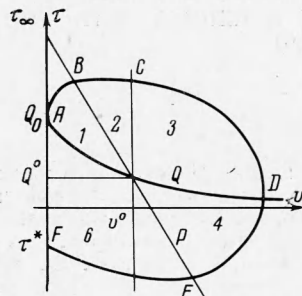
Задача (1)–(3) представляет собой линейную задачу с нелинейными граничными условиями. Имея целью получить простые полуколичественные результаты, будем решать ее здесь приближенно при помощи усреднения величин v_x и p_{xy} по интервалу $[0, h]$. Используя результаты работы [4], можно показать, что распределение скорости имеет вид

$$v_x(t, y) = U(t) \left[\frac{y}{h} + O\left(\frac{t_0}{\theta}\right) \right] \quad (4)$$

Здесь $U(t)$ — переменная скорость жидкости у подвижной пластины, а $t_0 = h(\rho\theta/\eta)^{1/2} \ll \theta$ — время распространения упругих волн от пластины $y = h$ до плоскости $y = 0$. Усредняя уравнения (1) с учетом граничных условий, получим

$$\theta \frac{d\tau}{dt} = \tau_\infty - \tau, \quad \tau_\infty = \frac{\eta}{h} V \quad (v = 0) \quad (5)$$

$$\theta \frac{d\tau}{dt} = \frac{\eta}{h} (\bar{V} - v) - \tau, \quad \frac{\rho h}{2} \frac{dv}{dt} = \tau - Q(v) \quad (v \neq 0) \quad (6)$$



Фиг. 1

Решение уравнений (5) и (6) будем искать в классе непрерывных кусочно-гладких функций в правой полуплоскости фазовой плоскости (v, τ) , содержащей ось $v = 0$.

Из уравнения (5) при условии $\tau(0) = 0$ получаем

$$\tau(t) = \tau_\infty (1 - e^{-t/\theta}) \quad (7)$$

С учетом сформулированных выше гипотез о характере пристеночного скольжения отсюда следует, что скольжение жидкости у стенки начинается лишь при

$$V > V_* = h Q_0 / \eta$$

Рассмотрим случай $V > V_*$. При $t = t_* = -\theta \ln(1 - \theta h / \eta V_*)$ напряжение на стенке достигает критической величины Q_0 , и начинается движение с проскальзыванием, управляемое уравнениями (6). Начальное условие для этой системы имеет вид

$$v|_{t=t_*} = 0, \quad \tau|_{t=t_*} = \tau_* = Q_0$$

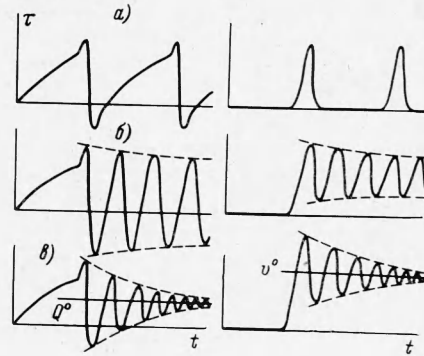
Фазовая траектория процесса может быть получена также из уравнения, следующего из (6)

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\rho h}{2\theta} \frac{P(v) - \tau}{\tau - Q(v)}, \quad P(v) = \frac{\eta}{h} (V - v) \quad (8)$$

с начальным условием $\tau(0) = Q_0$.

Уравнение (8) имеет особую точку (Q^0, v^0) , определяемую, как нетрудно видеть, пересечением кривых $Q(v)$ и $P(v)$. Из свойств $Q(v)$, указанных выше, следует, что с увеличением V величина v^0 стремится к V , оставаясь меньше V , а величина $Q^0 = Q(v^0)$ стремится к нулю (см. фиг. 1).

Линии $\tau = P(v)$ представляют собой однопараметрическое семейство прямых равного наклона. Рассматривая обычным путем линеаризованные уравнения (6)



Фиг. 2

в окрестности особой точки (Q^0, v^0) и учитывая свойства $Q(v)$, получим, что в зависимости от величины V возможны в принципе особые точки четырех типов: а) устойчивый фокус при $Q'^0 = |dQ/dv|(v=v^0) < \rho h/2\theta$; б) неустойчивый фокус при $\rho h/2\theta < Q'^0 < (2\rho\eta/\theta)^{1/2}$; в) центр при $Q'^0 = \rho h/2\theta$; г) неустойчивый узел, когда $Q'^0 \geq (2\rho\eta/\theta)^{1/2}$ (в случае равенства реализуется вырожденный узел).

Из (8) легко определить также качественное поведение интегральной кривой, исходящей из точки $A(0, Q_0)$. В криволинейном секторе 1, ограниченном прямой $P(v)$ и кривой $Q(v)$, функция $\tau(v)$ возрастает от Q_0 в точке A до $\max\{\tau\}$ в точке B (фиг. 1), имея в точке A неограниченную производную. В секторе 2 на участке BC функция $\tau(v)$ убывает весьма медленно ($\tau'(v) \approx -\rho h/2\theta$). В секторе 3 имеет место более быстрое убывание $\tau(v)$ вплоть до пересечения кривой $\tau(v)$ с характеристикой $Q(v)$ в точке D , в которой достигается максимальная скорость скольжения $\max\{v\}$. Далее, в секторе 4 происходит дальнейшее убывание $\tau(v)$ до значения $\min\{\tau\}$, реализуемого в точке E фазовой траектории. В секторе 5 функция $\tau(v)$ слегка возрастает ($\tau'(v) \approx \rho h/2\theta$); это возрастание ускоряется в секторе 6. Возможны два случая: либо $\tau(v)$ пересекает характеристику $Q(v)$ при $0 < v < \max\{v\}$, либо же происходит пересечение $\tau(v)$ с осью $v=0$ в некоторой точке $\tau = \tau^*$ (на фиг. 1 изображен второй случай). В первом случае дальнейшее поведение фазовой траектории всецело определяется типом особой точки (v^*, Q^*) , т. е. происходит либо установление стационарного режима течения со скольжением, если эта точка — устойчивый фокус, либо же фазовая траектория наворачивается на предельный цикл, и имеет место автоколебательный режим без прилипания. Во втором случае по достижении фазовой траекторией оси $v=0$ в точке τ^* процесс либо снова управляется уравнением (5), если $|\tau^*| \approx Q_0$, т. е. изображающая точка движется вверх по оси $v=0$ до срыва в точке Q_0 в правую полуплоскость, либо, если $\tau^* < -Q_0$, траектория выходит в область $v < 0$. Если фазовая траектория достигает оси $v=0$ в момент $t = t^*$ в точке $|\tau^*| \leq Q_0$, то при $t > t^*$ имеем, следовательно,

$$\tau(t) = \tau^* \exp\left(-\frac{t-t^*}{\theta}\right) + \tau_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t^*}{\theta}\right)\right], \quad v(t) = \dots \quad (t > t^*) \quad (9)$$

При достижении функцией $\tau(t)$ значения Q_0 снова происходит отлипание и описанный цикл повторяется. Возникающие при этом автоколебания относятся к релаксационному типу (фиг. 1; 2а).

Если $\tau^* < -Q_0$ и возможны движения с отрицательной скоростью скольжения, возникающие автоколебания подобны таковым при сухом трении твердого тела [5].

Подробные оценки, основанные на исследовании мажорирующих уравнений, показывают, что возможна следующая последовательность смены режимов движения при увеличении V выше значения V_* : 1) стационарное течение с прилипанием ($V < V_*$); 2) релаксационные автоколебания с прилипанием; 3) автоколебания с выходом в левую полуплоскость фазовой плоскости; 4) снова релаксационные автоколебания; 5) стационарное движение со скольжением. Заметим, что сказанное относится к случаям, когда характеристика $Q(v)$ обладает отмеченными выше свойствами; при некоторых видах $Q(v)$ ряда отмеченных режимов может и не быть. Наоборот, если производная dQ/dv остается достаточно большой по абсолютной величине даже при больших v , между четвертым и пятым режимами возможно появление автоколебательного режима без прилипания. Эпюры изменения скорости скольжения и напряжения в различных режимах приведены на фиг. 2; релаксационным автоколебаниям соответствует фиг. 2, а, автоколебаниям без прилипания — фиг. 2, б (фазовая траектория заключена в открытой области $v > 0$ фазовой плоскости), установлению стационарного режима скольжения соответствует фиг. 2, в.

В заключение авторы благодарят Г. И. Баренблатта за обсуждение и постоянное внимание к работе.

Поступила 27 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин А. Я., Леонов А. И. О критериях неустойчивости режимов сдвиговых деформаций упруго-вязких полимерных систем. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2, стр. 380.
2. Сонапт F. S., Лиска J. W. Friction Studies on Rubberlike Materials. Rubber Chem. and Technol., 1960, vol. 133, No. 5, p. 1218.
3. Бувич Ю. А., Леонов А. И. К теории сухого трения каучукоподобных материалов. ПМТФ, 1965, № 6.
4. Леонов А. И. О нестационарном движении несжимаемой максвелловской жидкости в зазоре между неограниченными параллельными плоскостями. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3, стр. 58.
5. Костерин Ю. И. Механические автоколебания при сухом трении, 1960, Изд-во АН СССР.