

УДК 519.634

КАВИТАЦИОННОЕ ТОРМОЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА

М. В. Норкин

Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: norkinmi@mail.ru

Исследуется процесс образования каверны при вертикальном ударе и последующем торможении кругового цилиндра, полупогруженного в жидкость. Ставится задача с односторонними ограничениями, из которой определяются начальные области отрыва и контакта частиц жидкости, а также возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости на малых временах. Решение задачи строится с помощью прямого асимптотического метода, эффективного на малых временах. Приводятся примеры численных расчетов образования одной и двух каверн вблизи границы тела. Показано, что ускорение цилиндра оказывает существенное влияние на картину течения жидкости вблизи тела на малых временах.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, круговой цилиндр, удар, кавитационное торможение, свободная граница, каверна, малые времена, число Фруда.

DOI: 10.15372/PMTF20170110

Введение. Исследования классических смешанных задач о гидродинамическом ударе [1] показали, что в большинстве случаев при ударе происходит отрыв жидкости от тела. Безотрывный удар возможен только для некоторого класса тел, плавающих на поверхности жидкости [2]. В работах [3–5] исследовалась задача о движении кругового цилиндра в жидкости после отрывного удара на малых временах с постоянной скоростью. Течение жидкости в начальный момент времени, а также начальная область отрыва определялись с использованием классической модели удара Л. И. Седова [1]. После удара возникала присоединенная каверна, форма которой зависела от физических и геометрических параметров задачи. В [6] изучалась задача о начальном отрывном движении кругового цилиндра в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. Близкая задача о проникании твердого тела в жидкость с образованием кавитационной области перед телом рассматривалась в [7, 8]. В работе [8] проведены численные расчеты процесса погружения тела в жидкость с последующим его выходом из воды. В [9] определялась форма брызговых струй при вертикальном ударе цилиндра, полупогруженного в жидкость, и его последующем движении в глубь жидкости с постоянной скоростью (без отрыва).

В настоящей работе рассматривается возмущение жидкости, вызванное безотрывным ударом цилиндра, отрыв обусловлен законом движения цилиндра после удара и физическими параметрами задачи. Предполагается, что после удара скорость тела уменьшается по

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1398.2014/к).

© Норкин М. В., 2017

линейному закону. Решается задача с односторонними ограничениями, из которой определяется связность области отрыва, а также формы свободных границ жидкости на малых временах.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о кавитационном торможении кругового цилиндра в возмущенной идеальной несжимаемой жидкости. Полагается, что возмущение жидкости обусловлено безотрывным вертикальным ударом цилиндра, полупогруженного в жидкость. В безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, задача имеет вид

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad R \in S_{11}(t); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y - t + 0,5\omega t^2) - p_0 = 0, \quad R \in S_{12}(t); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \dot{h}(t)\sin\theta = \frac{\partial r_f}{\partial\theta}\dot{\theta}(t) + \frac{\partial r_f}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t); \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} [1 + r_f(\theta, t)]^{-2} - \dot{h}(t)\cos\theta [1 + r_f(\theta, t)]^{-1};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t); \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t); \quad (1.6)$$

$$\nabla\Phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty; \quad (1.7)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad r_f(\theta, 0) = 0; \quad (1.8)$$

$$\dot{h}(t) = -1 + \omega t. \quad (1.9)$$

Для течения жидкости в начальный момент времени (непосредственно после удара) существует потенциал $\Phi_0(x, y)$, который определяется с использованием модели безотрывного удара:

$$\Phi_0(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t' = \frac{a}{v_0}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0\Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p, \quad v_0 = -V_y$$

(штрихом отмечены размерные величины).

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями $X = x, Y = y + h(t)$. Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный в подвижной системе координат; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная поверхность жидкости, которая первоначально была горизонтальной; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости; $\bar{V} = (0, V_y)$ — скорость цилиндра после удара; a — радиус цилиндра; R — радиус-вектор с координатами (x, y) .

Задача (1.1)–(1.9) содержит безразмерные параметры

$$\text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \omega = \frac{wa}{v_0^2}, \quad p_0 = \frac{p_a}{\rho v_0^2}$$

(Fr — число Фруда; w — ускорение цилиндра; p_a — атмосферное давление; g — ускорение свободного падения). Обозначим безразмерные величины w и p_a через ω и p_0 (положительные значения ω соответствуют случаю торможения цилиндра).

На внешней и внутренней свободных границах ставятся динамические и кинематические условия (1.3)–(1.6). Полагается, что на внешней свободной границе $S_2(t)$ действует атмосферное давление, на внутренней свободной границе $S_{12}(t)$ давление $p = p_c$, где p_c — давление насыщенных паров жидкости или газа ($p_c \approx 0$). Заметим, что в случае искусственной кавитации вместо p_0 используется величина $0,5\chi$ (χ — число кавитации (безразмерная разность давлений)), которая оказывает влияние на связность области отрыва и форму каверны на малых временах.

Кинематическое условие на границе $S_{12}(t)$ записывается в полярных координатах r, θ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$). Уравнения внешней и внутренней свободных границ относительно подвижной системы координат имеют вид

$$y = \xi(x, t) - h(t), \quad r = 1 + r_f(\theta, t).$$

В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутты — Жуковского, означающее, что в этих точках скорость жидкости должна быть конечной.

После нахождения потенциала скоростей Φ давление в жидкости определяется с использованием интеграла Коши — Лагранжа:

$$p = p_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \text{Fr}^{-2} (y + h(t)) \right). \quad (1.10)$$

2. Асимптотическое решение задачи на малых временах. Исследования сопровождающегося отрывом движения с ускорением твердых тел в первоначально покоящейся жидкости показали, что в большинстве случаев отрыв возникает на конечном участке поверхности тела [6]. При этом существенную роль играют начальные области отрыва и контакта $S_{12}(0)$ и $S_{11}(0)$, получаемые при предельном переходе границ $S_{12}(t)$ и $S_{11}(t)$ при $t \rightarrow 0$. Для определения этих областей сформулируем дополнительные динамическое и кинематическое условия в виде неравенств.

Решение поставленной задачи на малых временах будем искать в виде асимптотических разложений ($t \rightarrow 0$):

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + t\Phi_1(x, y) + o(t); \quad (2.1)$$

$$\xi(x, t) = t\xi_0(x) + t^2\xi_1(x) + o(t^2); \quad (2.2)$$

$$r_f(\theta, t) = t\eta_0(\theta) + t^2\eta_1(\theta) + o(t^2). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1)–(2.3) в (1.1)–(1.9), осуществляя снос краевых условий с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенные уровни и учитывая дополнительные условия в виде неравенств, для определения функции $\Phi_1 = \Phi_1(x, y)$ получаем смешанную краевую задачу теории потенциала в области $\Omega(0)$ с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta \Phi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad \Phi_1 = -f(\Phi_0), \quad R \in S_2(0); \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - \text{Fr}^{-2} y \geq 0, \quad R \in S_{11}(0); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \geq \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - \text{Fr}^{-2} y = 0, \quad R \in S_{12}(0); \quad (2.6)$$

$$f(\Phi_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2. \quad (2.7)$$

Неравенство в (2.5) означает, что давление на смоченной поверхности цилиндра (в главном приближении по времени) не может быть отрицательным. Для его определения асимптотические разложения (2.1), (2.3) необходимо подставить в формулу (1.10) и ограничиться старшими членами. Из неравенства для нормальной производной в (2.6) следует, что частицы жидкости не могут проникать внутрь твердого тела, однако могут отрываться от твердой границы.

Для вывода последнего условия возмущение внутренней свободной границы $S_{12}(t)$ будем искать в виде (2.3). Подставляя асимптотические разложения (2.1), (2.3) в кинематическое уравнение внутренней свободной границы жидкости (1.4), осуществляя процедуру сноса и приравнивая величины при одинаковых степенях t , для коэффициентов разложения (2.3) находим

$$\eta_0(\theta) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \sin \theta, \quad \eta_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \omega \sin \theta \right).$$

В силу краевого условия на смоченной поверхности цилиндра, которое справедливо в задаче об ударе [1], функция $\eta_0(\theta)$ обращается в нуль: $\eta_0(\theta) = 0$. С учетом этого разложение (2.3) принимает вид

$$r_f(\theta, t) = t^2 \eta_1(\theta) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что функция $\eta_1(\theta)$ должна быть неотрицательной. Действительно, если бы эта функция принимала отрицательные значения, то при малых t часть внутренней свободной границы оказалась бы внутри цилиндра, что невозможно. Из условия неотрицательности функции $\eta_1(\theta)$ следует выполнение граничного условия в виде неравенства в (2.6).

Подставляя (2.1), (2.2) в кинематическое уравнение (1.6) и применяя указанные выше процедуры, для коэффициентов разложения (2.2) получаем

$$\xi_0(x) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad 2\xi_1(x) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad y = 0, \quad |x| > 1.$$

Следует отметить, что задача (2.4)–(2.7) по структуре совпадает с классической задачей об ударе с отрывом (различаются только конкретные граничные функции, являющиеся гладкими). На основе этого можно сделать вывод о существовании регулярного решения в точках отрыва. Таким образом, построенное на малых временах решение задачи удовлетворяет условию Кутты — Жуковского. С учетом этого функция (2.8), описывающая возмущение внутренней свободной границы жидкости на малых временах, непрерывна в точках отрыва, а ее первая производная имеет в них особенности типа квадратного корня. Эти особенности можно сгладить путем построения специальных решений (см. [3–6]).

3. Численная реализация и анализ результатов. Исходная задача решается с помощью прямого асимптотического метода, эффективного на малых временах. Для определения первых членов разложений (2.1)–(2.3) необходимо решить смешанную краевую задачу теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. Численное решение этой задачи основано на следующем итерационном процессе. В качестве начального приближения выбирается решение смешанной краевой задачи (2.4)–(2.7) (без учета неравенств) с малой областью $S_{12}(0)$, в окрестности которой давление (в главном

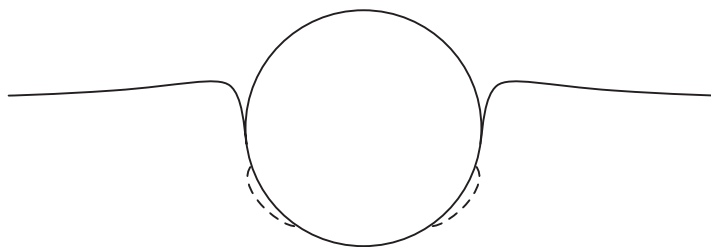


Рис. 1. Формы двух каверн и конфигурация внешней свободной поверхности жидкости при $\omega = 2,0$, $t = 0,4$

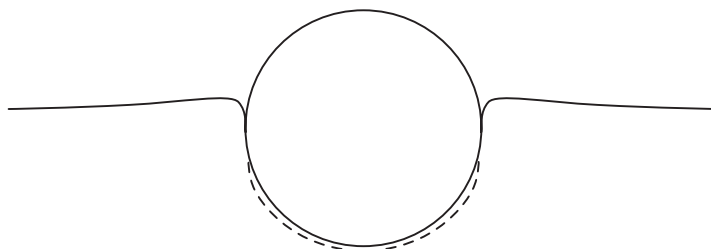


Рис. 2. Форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности жидкости при $\omega = 3,5$, $t = 0,25$

приближении по времени) принимает отрицательные значения. Численные расчеты показывают, что при удалении от точки отрыва функция p сначала убывает, достигая отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Точки, в которых давление имеет локальные отрицательные минимумы, выбираются в качестве следующих приближений к точкам отрыва. Далее процесс повторяется. Каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к некоторому увеличению области $S_{12}(0)$ и уменьшению области отрицательных давлений. Процесс заканчивается, когда область отрицательных давлений исчезает. Итерационный метод сходится достаточно быстро. Для определения угловых координат точек отрыва с точностью до двух знаков после запятой требуется не более 20–30 итераций. После окончания итерационного процесса проверяется выполнение кинематического условия в виде неравенства в (2.6). Заметим, что условие положительности давления выполняется также для большей области $S_{12}(0)$. Однако при увеличении этой области не выполняется указанное кинематическое условие. Таким образом, данный метод позволяет однозначно определить область отрыва $S_{12}(0)$. Заметим также, что полученные на каждом шаге итерационного процесса линейные задачи (с фиксированным разбиением границы тела на области, в которых задаются краевые условия типа условий Дирихле — Неймана) решаются численно методом конечных элементов с использованием пакета FreeFem++ [10]. Указанный выше итерационный процесс применялся для решения задач об отрывном ударе твердых тел в жидкости, а также контактных задач теории упругости с неизвестными областями контакта (см. [2]).

Рассмотрим конкретные примеры. Исследование задачи о кавитационном торможении цилиндра проводится при $Fr = 3$, $p_0 = 1$ и различных значениях времени и ускорения цилиндра. При увеличении ω промежуток времени, на котором происходит процесс торможения цилиндра, уменьшается ($0 < t < \omega^{-1}$). На рис. 1 показаны две симметричные каверны, образующиеся при $\omega = 2,0$, $t = 0,4$. Угловые координаты точек отрыва первой кавитационной области приближенно равны $\theta_1 = -0,34$, $\theta_2 = -1,0$. При увеличении ускорения цилиндра области отрыва смыкаются, образуя большую каверну перед телом. На рис. 2 показаны форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности жидко-

сти при $\omega = 3,5$, $t = 0,25$. Угловая координата первой точки отрыва приблизительно равна $\theta_1 = -0,30$. Следует отметить, что при уменьшении ω области отрыва исчезают и при небольших ω оказывается корректной задача о безотрывном торможении цилиндра. Таким образом, на начальном этапе торможения цилиндра существенное влияние на течение жидкости вблизи тела оказывает параметр ω .

Безразмерные параметры $\Gamma\Gamma$ и p_0 также оказывают влияние на отрыв. Если, например, зафиксировать параметры задачи, соответствующие рис. 1, а число Фруда изменять, то при его уменьшении области отрыва исчезают.

Заключение. В работе исследована задача об ударе и последующем кавитационном торможении кругового цилиндра, полупогруженного в жидкость. Поставлена задача с односторонними ограничениями, на основе которой определены первоначальные области отрыва и контакта частиц жидкости, а также возмущения внешней и внутренней свободных границ жидкости на малых временах. Рассмотрены конкретные численные примеры образования одной и двух каверн вблизи границы тела. Предложенный метод обобщен на случаи, когда первоначальное возмущение жидкости вызвано не ударом, а другими способами (например, случай безотрывного движения цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости с его быстрым торможением). Однако в этом случае потенциал скоростей в начальный момент времени не имеет простого аналитического выражения, что может существенно усложнить численное решение задачи с односторонними ограничениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Норкин М. В.** Смешанные задачи гидродинамического удара. Ростов н/Д: Изд-во Центра валеологии вузов России, 2007.
3. **Norkin M., Korobkin A.** The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Engng Math. 2011. V. 70. P. 239–254.
4. **Норкин М. В.** Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 101–112.
5. **Норкин М. В.** Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2015. № 1. С. 30–35.
6. **Норкин М. В.** Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.
7. **Korobkin A.** Cavitation in liquid impact problems // Proc. of the 5th Intern. symp. on cavitation, Osaka (Japan), 1–4 Nov. 2003. Paper Cav03-OS-7-011.
8. **Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J.** Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // J. Engng Math. 2016. V. 96, N 1. P. 155–174.
9. **Korobkin A. A., Wu G. X.** Impact on a floating circular cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2000. V. 456. P. 2489–2514.
10. **Жуков М. Ю.** Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. Ростов н/Д: Изд-во Юж. федерал. ун-та, 2008.

*Поступила в редакцию 29/IX 2015 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2016 г.*