

## ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕРОВНОСТЕЙ ДНА НА ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ

В. И. Меркулов, А. П. Михайлов, С. О. Савченко

(Новосибирск)

Рассматривается влияние жесткого дна периодической формы на малые периодические свободные колебания поверхности идеальной жидкости в предположении малой амплитуды неровностей.

Наиболее важная работа в этом направлении [1] в методологическом отношении была использована в данной работе. В [1] исследуется стационарная задача для потока при произвольном периодическом дне.

В последнее время появились работы, связанные с исследованием малых свободных колебаний над неровным дном. В основном в них рассматривается влияние подводных препятствий и впадин на поверхностные волны в приближении мелкой воды (например, [2], [3]). В [4] рассматривается колебание жидкости в слое с произвольной, медленно меняющейся по длине глубиной. Однако эти результаты не могут быть применены для исследования резонансного взаимодействия гравитационных волн с периодически искривленным дном.

1. Рассматривается неограниченный по  $x$  плоский слой невязкой несжимаемой жидкости, лежащей в поле тяжести на неровном периодическом дне (фиг. 1). Форма дна задается функцией  $a\lambda(x)$ ,  $a$  — амплитуда неровностей дна,  $H$  — средняя толщина слоя. Исследование проводится в безразмерных переменных, длина волны периода дна принимается за  $2\pi$ . Изучаются только периодические малые свободные колебания покоящегося слоя при условиях  $a \ll 1$ ,  $a/H \ll 1$ .

Пусть  $\varphi$  — потенциал скорости. Тогда, если плотность жидкости много больше плотности воздуха и  $(\nabla\varphi)^2$  мало, известна линеаризованная краевая задача для малых свободных колебаний на неровном дне (см., например, [5, 6]):

$$(1.1) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \Big|_{y=a\lambda(x)}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \Big|_{y=H}$$

или для одной гармонике  $\varphi = e^{i\omega t}u(x, y)$ :

$$(1.2) \quad \Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \Big|_{y=a\lambda(x)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\omega^2}{g} u \Big|_{y=H},$$

здесь  $n$  — вектор нормали к линии дна.

Период поверхностной волны должен быть равен только целому числу периодов неровностей дна. Это можно показать от противного, постулируя периодичность потенциала скорости со всеми производными и предполагая непрерывность их по  $y$ .

2. Пусть период поверхностной волны равен  $m$  периодам неровностей дна. Область, занятая жидкостью между максимумами неровностей дна, находящимися на расстоянии  $2\pi m$  по  $x$  друг от друга, конформно отображается на кольцо, так что линия дна переходит во внешнюю окружность, линия поверхности — во внутреннюю, как это сделано в [1] (фиг. 2).

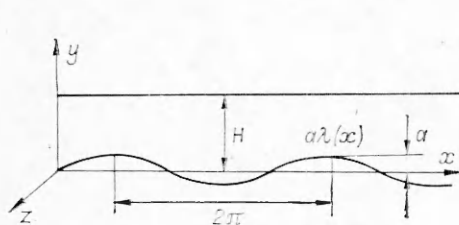
Отображается область, занятая жидкостью, из плоскости  $z$  на область в плоскости  $\xi$  с полярными координатами  $\rho$ ,  $\theta$ . Обратное отображение с точностью до малых второго порядка по  $a$  имеет вид

$$z = -im \ln \xi + af(\xi) + iH,$$

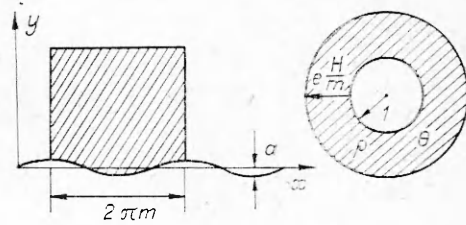
как это следует из результатов [7]. Для модуля производной на внутренней окружности получено

$$|z'_\xi|_{\rho=1} = m \left( 1 + \frac{a}{m} \alpha(\theta) \right) = \chi(\theta),$$

где  $\alpha(\theta) = 2(\operatorname{Re}f' + \operatorname{Im}f')|_{\rho=1}$ ;  $\alpha(\theta)$  — функция, зависящая от профиля дна и, очевидно, периодичная с выбранным периодом. Таким образом,



Ф и г. 1



Ф и г. 2

вместо краевой задачи (1.1), (1.2) можно получить новую краевую задачу, уже для ограниченной в плоскости  $\xi$  области:

$$(2.1) \quad \Delta \varphi(\rho, \theta, t) = 0, \quad \Delta u(\rho, \theta) = 0;$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \varphi(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} = 0 \Big|_{\rho=eH/m}, \quad \frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \rho} = 0 \Big|_{\rho=eH/m};$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \varphi(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} = -\frac{1}{g} \chi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{\rho=1}, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\omega^2}{g} \chi u \Big|_{\rho=1},$$

где  $\varphi(\rho, \theta, t) = e^{i\omega t} u(\rho, \theta)$ .

В дальнейшем будет рассматриваться вторая краевая задача для потенциала  $u(\rho, \theta)$ . Это классическая задача Неймана для кольца. С помощью ее решения, приведенного в [8], для случая равенства нулю производной потенциала скорости на внешней окружности при  $\rho = 1$  решение краевой задачи (2.1)–(2.3) сводится к интегральному уравнению для искомых собственных колебаний свободной поверхности:

$$u(\theta) \Big|_{\rho=1} = B_0 - \frac{\omega^2}{\pi g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{cth} \left( \frac{kH}{m} \right) (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Ряд  $\sum_k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$  — фурье-разложение искомого ограниченного потенциала скорости, следовательно, последовательность его частичных сумм ограничена, а последовательность  $\left\{ \operatorname{cth} \left( \frac{kH}{m} \right) / k \right\}$  монотонно убывает и сходится к нулю. По признаку Дирихле такой ряд равномерно сходится. Операции интегрирования и суммирования можно поменять местами и получить уравнение:

$$(2.4) \quad u(\theta) \Big|_{\rho=1} = B_0 - \frac{\omega^2}{\pi g} \int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi) H(\theta, \varphi) d\varphi,$$

где

$$H(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{cth} \left( \frac{kH}{m} \right) \chi(\varphi) \cos k(\theta - \varphi).$$

Ряд в (2.4) не сходится при  $\theta = \varphi$ , но особенность, возникающая при этом, асимптотически имеет вид  $\ln \sin(\theta - \varphi)$ , т. е. интегрируема.

Получено самое общее в описанной постановке уравнение для свободных поверхностных колебаний. Важно отметить, что задача в области свелась к задаче на линии свободной поверхности и искомая функция  $u(\theta)$  зависит только от одной переменной  $\theta$ .

Ниже будем обозначать через  $u(\theta)$  значение потенциала на границе  $\rho = 1$ .

Пусть  $H \ll 1$  и первые гармоники являются несущими (имеют максимальную амплитуду). В этом случае из уравнения (2.4) можно получить уравнение Хилла

$$(2.5) \quad u_{\theta}'' + \frac{m^2 \omega^2}{gH} \left( 1 + \frac{a}{m} \alpha(\theta) \right) u = 0,$$

или

$$u_0'' + [\mu(\omega^2) + \nu(\omega^2)\alpha(\theta)]u = 0,$$

где

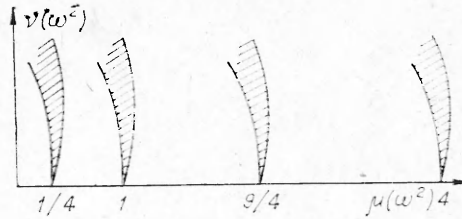
$$\mu(\omega^2) = m^2\omega^2/gH; \nu(\omega^2) = am\omega^2/gH.$$

Аналогичный результат следует и из теории мелкой воды (см., например, [5]).

На фиг. 3 показана приведенная в [9] диаграмма устойчивости этого уравнения, области неустойчивости заштрихованы. Они соответствуют бесконечно растущим по координате  $\theta$  решениям и не отвечают постановке задачи.

Основания «клинышков» неустойчивости с координатами  $n^2/4$  соответствуют резонансным частотам (как это понимается в [9]).

Как показано в [9], периодическому решению соответствуют границы раздела областей устойчивости и неустойчивости с четными номерами, однако второе независимое решение (2.5) является при этом неограниченным. Если в какой-либо точке плоскости параметров границы области устойчивости соприкасаются, что соответствует двойному корню задачи на собственные значения, то оба независимых решения уравнения (2.5) для этих параметров периодичны и ограничены. Поскольку уравнение (2.5) было получено с точностью до членов второго порядка малости по  $a$ , узкие области неустойчивости (с шириной порядка  $a^2$ ) следует приближенно считать стянутыми в линию, а оба независимых решения (2.5) — ограниченными и периодическими.



Ф и г. 3

Таким образом, периодические колебания возможны лишь с частотами, равными с точностью до малых второго порядка по  $a$  резонансным частотам с четными номерами и соответствующим узким областям неустойчивости.

3. Рассмотрим случай, когда профиль неровностей дна имеет вид

$$a\lambda(x) = a \sin x \text{ и } m = 1.$$

Воспользуемся отображением, распрямляющим полосу единичной ширины [7], и после некоторых дополнительных преобразований получим отображение, распрямляющее и поворачивающее на  $\pi/2$  слабоискривленную полосу ширины  $H$ :

$$(3.1) \quad W = z - \frac{i\pi H}{2} + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth} \left[ \frac{\pi}{2H} (-z - t) \right] dt + \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - y(t)) \operatorname{th} \left[ \frac{\pi}{2H} (-z - t) \right] dt,$$

где  $1 - y(t)$  задает профиль нижней границы, а  $y_0(t)$  — верхней:

$$1 - y(t) = a \sin t, \quad y_0(t) = 0.$$

Последний интеграл в (3.1) вычисляется, и окончательно отображение на кольцо имеет вид

$$\xi = \exp \left[ i \left( z - \frac{a}{\operatorname{sh} H} \cos z - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Модуль производной обратного отображения:

$$|z'_\xi| = \left( 1 - \frac{a}{\operatorname{sh} H} \cos \theta \right) = \chi(\theta).$$

Уравнение (2.5) с учетом полученных соотношений перейдет в уравнение Матье:

$$u'' + \frac{\omega^2}{gH} \left(1 - \frac{a}{H} \cos \theta\right) u = 0, \quad \frac{a}{H} \ll 1, \quad H \ll 1.$$

Решение ищется методом возмущений:

$$u^n = u_0^n + \frac{a}{H} u_1^n, \quad \omega_n^2 = (\omega_0^n)^2 + \Delta,$$

$$u_0^n = C \sin n\theta + C' \cos n\theta, \quad (\omega_0^n)^2 = g\bar{H}n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

В первом порядке малости по  $a/H$   $\Delta = 0$  для любого  $n$  в соответствии с результатами п. 2, так как для уравнения Матье все области неустойчивости, отвечающие периодическим решениям, узкие [9].

Для собственных функций получается в исходных координатах:

$$u^n(x) = C \sin(nx - \omega_n t + \varphi_0) + \frac{a}{H} C (R_1 \sin((n+1)x - \omega_n t + \varphi_0) + R_2 \sin((n-1)x - \omega_n t + \varphi_0)),$$

$$R_1 = \frac{1}{2}n + A, \quad R_2 = \frac{1}{2}n - B, \quad A = -\frac{n^2}{2(2n+1)}, \quad B = \frac{n^2}{2(2n-1)},$$

$$\varphi_0 = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При  $n = 1$   $R_2 = 0$ . Аналогичное выражение получается для разложения по косинусам тех же аргументов.

Таким образом, каждую собственную функцию колебаний поверхности тонкого слоя жидкости с дном синусоидальной формы можно представить в виде трех (при  $n = 1$  — двух) бегущих волн: несущей, длина которой соответствует длине волны невозмущенной гармоники, и двух спутниковых с волновыми числами на единицу больше и на единицу меньше (отстающей и обгоняющей несущую) с амплитудами порядка  $a/H$ . При  $n = 1$  из спутниковых волн остается только отстающая.

Рассмотрим общее интегральное уравнение (2.4) для профиля дна синусоидальной формы:

$$u(\theta) = B_0 + \frac{\omega^2}{gH} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} u(\varphi) \left(1 - \frac{a}{\sin \bar{H}} \cos \varphi\right) \frac{\cos k(\theta - \varphi)}{k} \operatorname{ctg} kH d\varphi \right].$$

Подставляя фурье-разложение для  $u(\theta)$ , интегрируя по  $\varphi$  и приравнявая к нулю суммы коэффициентов при каждой степени синуса и косинуса, получим бесконечную линейную однородную систему алгебраических уравнений с матрицей трехдиагонального вида для коэффициентов фурье-разложения потенциала скорости:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & (1 - a\omega^2\gamma_{11})C_1 + a\gamma_{12}\omega^2C_2 = 0, \\ & \omega^2a\gamma_{21}C_1 + (1 - a\omega^2\gamma_{22})C_2 + a\omega^2\gamma_{23}C_3 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & a\omega^2\gamma_{i,i-1}C_{i-1} + (1 - a\omega^2\gamma_{i,i})C_{i,i} + a\omega^2\gamma_{i,i+1}C_{i+1} = 0, \\ & \gamma_{i,i} = \frac{1}{g} \frac{\operatorname{cth} iH}{i}, \quad \gamma_{i,i-1} = \gamma_{i,i+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta(\omega^2)$  определитель этой бесконечной системы. Эквивалентная система получается для определения  $C'$ . Свободный член находится из условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 &= \frac{\omega^2}{g} \chi(\theta) u(\theta) = \frac{\omega^2}{g} (1 - \cos \theta) \left[ B_0 + \sum_n (C_n \sin n\theta + C'_n \cos n\theta) \right], \\ B_0 &= -\frac{1}{2} C_1. \end{aligned}$$

Таблица 1

$k$	$(\omega_1^2)^{(k)}$	$(\omega_2^2)^{(k)}$	$(\omega_3^2)^{(k)}$	$(\omega_4^2)^{(k)}$	$(\omega_5^2)^{(k)}$	$(\omega_6^2)^{(k)}$
4	0,995843	3,952574	8,749723	15,287594		
5	0,995843	3,952538	8,7496662	15,214654	23,274828	
6	0,995843	3,952538	8,74962	15,214345	23,129334	32,507671
...	...	...	...	...	...	...
30	0,995843	3,952538	8,749662	15,214345	23,128842	32,250240
*	0,996799	3,947506	8,739378	15,197952	23,105858	32,222230

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$\varphi_1$	1,0000	$1,6871 \cdot 10^{-2}$	$-1,0867 \cdot 10^{-4}$	$3,8252 \cdot 10^{-7}$	$8,6579 \cdot 10^{-10}$
$\varphi_2$	$6,6626 \cdot 10^{-2}$	1,000	$-4,1386 \cdot 10^{-2}$	$7,2996 \cdot 10^{-4}$	$7,5742 \cdot 10^{-6}$
$\varphi_3$	$5,1231 \cdot 10^{-3}$	$9,0943 \cdot 10^{-2}$	1,0000	$-6,8293 \cdot 10^{-2}$	$-2,0916 \cdot 10^{-3}$
...	...	...	...	...	...
	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$
$\varphi_{10}$	$-5,1921 \cdot 10^{-2}$	$-3,0899 \cdot 10^{-1}$	1,0000	$-3,4956 \cdot 10^{-1}$	$-5,9042 \cdot 10^{-2}$

Положим  $C_1 = 1$  и запишем систему (3.2) в виде (3.3)  $AC = f$ , при этом  $A_{1i} = 0$  ( $i \neq 1$ ). Пусть  $A$  — невырожденная матрица. Тогда соответствующая однородная система не имеет отличного от нулевого решения. Следовательно [1], (3.3) имеет единственное определенное решение, удовлетворяющее условию  $\sum_i C_i^2 < \infty$ . Значит, (3.2) имеет

единственное, с точностью до одной произвольной постоянной решение, отличное от нулевого. Решение (3.3) будем искать методом редукции, что предполагает при каждом приближении  $k$  выполнение условия  $\Delta^k(\omega^2) = 0$ . По определению  $\Delta(\omega^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k(\omega^2)$ ,  $\Delta^k(\omega_p^2) = 0$  ( $\omega_k$  ищутся из этого уравнения). Тогда очевидно, что если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^2 = \omega_\infty^2$ , то  $\Delta(\omega_\infty^2) = 0$ ,

что обеспечивает нахождение единственного решения (с точностью до произвольной постоянной) (3.2) как предела последовательности  $\{C_n^{(k)}\}$ . Система (3.3) решалась численно, при этом она сводилась к задаче на собственные значения уравнения  $BC = \lambda C$ , где  $\lambda$  связана с  $\omega$  соотношением  $\lambda(\omega^2 - 1) = 1$ .

Для каждого из собственных значений задачи (3.3) можно найти коэффициенты фурье-разложения собственных функций.

Результаты расчетов приводятся в табл. 1, 2 для  $H = 0,1$ ,  $a = 0,01$ ;  $H = 0,5$ ,  $a = 0,1$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — наибольшие коэффициенты фурье-разложения собственных функций;  $(\omega_n^2)^{(k)}$  —  $k$ -е приближение для собственной частоты.

Из анализа табл. 1, 2 видна быстрая сходимость последовательных приближений для собственных значений. Для первых собственных значений наблюдается «триадность» фурье-разложения, что подтверждает результаты, полученные методом возмущений для уравнения Матье.

Квадраты частот в строке (\*) в таблицах соответствуют случаю  $a = 0$ .

Таблица 2

$k$	$(\omega_1^2)^{(k)}$	$(\omega_2^2)^{(k)}$	$(\omega_3^2)^{(k)}$	$(\omega_4^2)^{(k)}$	$(\omega_5^2)^{(k)}$
3	4,6028	15,2534	27,7351		
4	4,6028	15,2522	27,1445	39,7733	
5	4,6028	15,2520	27,1297	38,5573	51,3917
...	...	...	...	...	...
30	4,6028	15,2520	27,1296	38,4915	49,9251
*	4,6212	15,2319	27,1544	38,5611	49,9330

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$\Phi_1$	1,00000	$-4,2068 \cdot 10^{-2}$	$8,5223 \cdot 10^{-4}$	$1,1815 \cdot 10^{-5}$	$-1,2843 \cdot 10^{-7}$
$\Phi_2$	$1,3596 \cdot 10^{-1}$	1,0000	$-1,2815 \cdot 10^{-1}$	$-8,5989 \cdot 10^{-3}$	$4,0706 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_3$	$2,4793 \cdot 10^{-2}$	$2,1437 \cdot 10^{-1}$	1,0000	$2,4944 \cdot 10^{-1}$	$-3,2501 \cdot 10^{-2}$
...	...	...	...	...	...
$\Phi_{10}$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$
$\Phi_{10}$	$-3,3481 \cdot 10^{-1}$	$-5,8336$	1,0000	$-3,6057$	6,1495
	$C_{13}$	$C_{14}$			
$\Phi_{10}$	2,5445	$2,1414 \cdot 10^{-1}$			

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном.— ПММ, 1957, т. 21, № 1.
2. Белиев В. А. Взаимодействие поверхностных гравитационных волн с произвольно расположенной системой подводных препятствий.— В кн.: Гидромеханика. № 41. Киев: Наукова думка, 1980.
3. Демченко Р. П., Яковлев В. В. Дифракция поверхностных гравитационных волн на подводном канале переменной глубины.— В кн.: Гидромеханика. № 41, Киев: Наукова думка, 1980.
4. Алешков Ю. З. Трансформация поверхностных волн в жидкости при медленно меняющейся глубине.— В кн.: Исследование по упругости и пластичности. № 13. Ленинград: ЛГУ, 1980.
5. Стокер Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
8. Кантарович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е. М.: Физматгиз, 1962.
9. Якубович В. А., Старжинский М. С. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.

Поступила 10/VI 1983 г.