УДК 532.517.4

# Верификация открытого пакета OpenFOAM на задачах прорыва дамб

А.Ж. Жайнаков<sup>1</sup>, А.Ы. Курбаналиев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт горного дела и горных технологий им. У.И. Асаналиева Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызстан

<sup>2</sup>Кызыл-Кийский гуманитарно-педагогический институт Баткенского государственного университета, Кыргызстан

E-mail: kurbanaliev@rambler.ru

В работе изложены результаты математического моделирования крупномасштабных течений в местностях со сложным топографическим рельефом. Основу трехмерного нестационарного моделирования составляют осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса. Для отслеживания положения свободной границы применяется известный метод объема жидкости, имплементированный в решатель interFoam открытого пакета OpenFOAM 1.7.1. Адекватность математической модели проверяется путем сравнения с экспериментальными данными. Эффективность примененной технологии иллюстрируется на примере моделирования прорыва плотин Папанского (Кыргызстан) и Андижанского (Узбекистан) водохранилищ вблизи города Ош, Кыргызстан.

Ключевые слова: трехмерное моделирование, свободная граница, метод объема жидкости, прорыв плотины, наводнение, OpenFOAM.

# Введение

Математическое моделирование с применением современных прикладных пакетов вычислительной гидродинамики является эффективным инструментом прогнозирования различных техногенных и природных явлений. По числу повторяемости, площади распространения и ежегодному материальному ущербу среди природных стихийных катаклизмов затопление водой местности и населенных пунктов занимает первое место.

В настоящей работе ставится задача прогнозирования последствий крупномасштабной техногенной катастрофы, связанной с разрушением плотин, на примере Папанского и Андижанского водохранилищ.

В разделе 1 приводится принятая математическая модель. В разделе 2 излагается общая технология нахождения численного решения принятой математической модели, приведены начальные и граничные условия, методы дискретизации модели. Раздел 3 содержит результаты верификации пакета OpenFOAM 1.7.1 на различных примерах прорыва плотины. И наконец, в разделе 4 рассматриваются примеры применения пакета OpenFOAM для моделирования прорыва плотин Папанского (Кыргызстан) и Андижанского (Узбекистан) водохранилищ.

© Жайнаков А.Ж., Курбаналиев А.Ы., 2013

## 1. Математическая модель

Законы сохранения массы и импульса для несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии массовых сил приводят к следующим нестационарным уравнениям Навье–Стокса [1, стр. 293]:

$$\partial \left( \rho \overline{u_i} \right) / \partial x_i = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u_i} \overline{u_j} + \rho \overline{u_i' u_j'}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j},$$
(2)

где  $\overline{u_i}$  — компоненты средней скорости,  $\rho$  — плотность,  $\overline{p}$  — среднее давление,  $\overline{\tau_{ij}} = \mu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$  — средний тензор вязких напряжений,  $\mu$  — динамическая вязкость.

Осреднение производится по времени, а штрих означает флуктуационную часть. При наличии внешних сил эти уравнения необходимо дополнить соответствующими членами.

Для замыкания систем уравнений (1–2) необходимо ввести ту или иную модель турбулентности. Многие из моделей турбулентности, используемые на практике, основаны на понятиях турбулентной вязкости и турбулентной диффузии. Для течений общего вида, введенная Буссинеском турбулентная вязкость, связывающая напряжения Рейнольдса с градиентами осредненного течения, может быть записана в следующей форме [1, стр. 294]:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k.$$

Кинетическая энергия турбулентности k и скорость ее диссипации  $\varepsilon$  определяются из следующих транспортных уравнений [1, стр. 295–296]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j} k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + P_k - \rho \varepsilon,$$
$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j} \varepsilon)}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - \rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$$

где  $P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$  — скорость генерации кинетической энергии турбулентно-

сти средним течением, а  $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  — турбулентная вязкость.

Коэффициенты модели имеют следующие стандартные значения:  $C_{\mu} = 0,09,$  $C_{\varepsilon 1} = 1,44, \ C_{\varepsilon 2} = 1,92, \ \sigma_k = 1,0, \ \sigma_k = 1,3.$ 

Особое место при моделировании рассматриваемого класса течений занимает метод определения границы раздела между двумя фазами — водой и воздухом. Согласно основной идее метода объема жидкости [1, стр. 384], для каждой вычислительной ячейки определяется некоторая скалярная величина, представляющая собой степень заполнения этой же ячейки одной фазой, например водой. Если в какой-то ячейке эта величина равна 0, то она пустая, если равна 1, то она полностью заполнена. Соответственно, если ее значение лежит между 0 и 1, то можно сказать, что эта ячейка содержит свободную

(межфазную) границу. Другими словами, объемная доля воды  $\alpha$  определяется как отношение объема воды в ячейке к полному объему данной ячейки. Соответственно,  $1 - \alpha$ представляет собой объемную долю второй фазы — воздуха в данной ячейке. В начальный момент времени дается распределение поля этой величины и дальнейшая ее временная эволюция вычисляется как решение следующего транспортного уравнения:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha \overline{u_i})}{\partial x_i} = 0.$$

Положение свободной границы определяется уравнением:  $\alpha(x, y, z, t) = 0$ . Поэтому физические свойства газожидкостной смеси определяются осреднением с соответствующим весовым коэффициентом:

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2, \quad \mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют жидкой и газовой фазе.

Суть метода объема жидкости (Volume of Fluid), имплементированного в решатель interFoam пакета OpenFOAM 1.7.1 [2], заключается в том, что граница раздела двух фаз не вычисляется явно, но до некоторой степени определяется как свойство поля объемной доли воды. Так как значения объемной доли заключены между 0 и 1, фазовая граница не определяется точно, однако она занимает некоторую область, где поблизости должна существовать резкая межфазная граница.

#### 2. Технология моделирования

# Начальные условия

Для нестационарной задачи необходимо задание начальных значений всех зависимых переменных. Значения всех компонент скорости равны нулю, так как по условию рассматриваемой задачи до момента времени t = 0 движение отсутствовало. Давление тоже равно нулю. Кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации имеют некоторое малое значение, которое обеспечивает хорошую сходимость численного решения на первых шагах интегрирования. Начальное распределение объемной доли  $\alpha$ неоднородно, так как не все расчетные ячейки заполнены водой.

# Граничные условия

На твердых стенках расчетной области задано условие прилипания, что дает равенство нулю всех компонентов вектора скорости. Для давления и объемной доли воды заданы условия непроницаемости (условие Неймана —  $\nabla p = 0$  и  $\nabla \alpha = 0$ ); для кинетической энергии турбулентности *k* и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  граничные условия задавались при помощи аппарата пристеночных функций [1, стр. 298–299]. Влияние сил поверхностного натяжения между твердой стенкой и газожидкостной смесью не учитывалось.

На свободной границе заданы нулевые значения для давления, объемной доли воды и всех компонент скорости.

## Дискретизация основных уравнений

Дискретизация расчетной области получается методом контрольных объемов [3, с. 24]. Использование разностной схемы против потока для конвективных и Gauss linear схемы для диффузионных членов дает приемлемую точность численных расчетов.

Для дискретизации производной по времени использовался явный метод Эйлера первого порядка. Численное решение связанных через давление нестационарных уравнений основывалось на методе PISO [1, стр. 176] с числом корректоров — 3.





Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений использовались итерационные решатели PCG и PBiCG — методы сопряженных и бисопряженных градиентов с предобусловливанием. Процедуры, основанные на упрощенной схеме неполной факторизации Холецкого DIC и на упрощенной неполной LU факторизации DILU, были использованы в качестве предобуславливателей.

Более детальную информацию о граничных и начальных условиях, методах дискретизации и решения систем алгебраических уравнений можно найти в работе [2].

#### 3. Верификация пакета OpenFOAM

Первой тестовой задачей является задача об обрушении столба жидкости в горизонтальном канале прямоугольного сечения [4]. В начальный момент времени прямоугольный столб вязкой несжимаемой жидкости находится в состоянии покоя. Под действием силы тяжести столб начинает обрушаться.

Сравнение численных результатов (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) работы [4] представлено на рис. 1, где a = 0,05715 м — ширина водного столба в направлении оси x, g = 9,81 м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения. Согласие между экспериментом и численным расчетом следует признать приемлемым.

Конфигурация следующей модельной задачи представлена на рис. 2. Модель представляет собой резервуар гексаэдрической формы длиной 3,22 м, высотой 2 м и шириной 1 м [5]. В левом нижнем углу расположен столб воды высотой H = 0,6 м, длиной 1,2 м и шириной 1 м. Для измерения силы давления потока жидкости на правую стенку резервуара



Рис. 2. Конфигурация тестовой задачи.



Рис. 3. Движение столба воды в различные моменты времени.

соответствующий измерительный датчик давления располагался в точке P с координатами x = 3,22 м и y = 0,16 м. Кроме того, в двух сечениях при  $x_1 = 2,725$  м и  $x_2 = 2,228$  м были измерены уровни свободной поверхности воды  $h_1$  и  $h_2$ . Плотность воды была равна 998,2 кг/м<sup>3</sup>, а воздуха — 1,225кг/м<sup>3</sup>. Несмотря на то, что эксперимент является трехмерным, простота конфигурации позволяет моделировать его в двумерном приближении. Общая продолжительность моделирования по времени составляла 2,5 с.

На рис. 3 представлены численные результаты для различных моментов времени.

В момент времени t = 0 перегородка убирается мгновенно и столб воды под действием силы тяжести устремляется в правую пустую часть резервуара. В момент времени  $t \approx 0,65$  с вода достигает правой стенки и, ударяясь о нее под действием силы инерции, устремляется вверх. По мере движения вверх по правой стенке поток утончается и в момент времени t = 1,3 с, когда сила тяжести превосходит силу инерции, происходит возвратное движение воды с образованием характерного изгиба ее поверхности. Сформированная таким образом обратная волна, достигая основного потока, ударяясь о него, образует вторичную волну и т. д. (при t = 1,5 с и t = 1,8 с). После момента времени t = 2,2 с инерция воды сильно уменьшается и дальнейшее рассмотрение движения не представляет практического интереса.

На рис. 4 представлены численные (сплошная линия) и соответствующие экспериментальные (маркеры) данные по высоте водного столба в сечениях с координатами  $x_1 = 2,725$  м и  $x_2 = 2,228$  м. Совпадение между этими данными достаточно удовлетворительное до момента времени  $t \approx 1,5$  с для сечения  $x_1 = 2,725$  м (рис. 4, *a*).



*Рис. 4*. Высота водного столба в различных сечениях.  $x_1 = 2,725 \text{ м}(a)$  и  $x_2 = 2,228 \text{ м}(b)$ .



После этого момента времени обратная волна, движущаяся против основного потока, ударяется о свободную поверхность и появляются определенные неточности как в численных, так и в экспериментальных данных. Разногласия такого рода также наблюдались в работе [6], где для численного моделирования использовался известный коммерческий пакет FLUENT. Результаты этой работы приведены на рис. 5 в схожем с рис. 4 виде. Здесь высота водного столба ( $h_1, h_2$ ) обезразмерена на величину H, а время представлено в безразмерной форме  $\tau = t(g/H)^{0.5}$ , где t — физическое время, g = 9,81 м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения, H = 0,6 м — первоначальная высота водного столба. Из сравнения рис. 4 и 5 можно заключить, что в настоящей работе уровни свободной поверхности в двух различных сечениях предсказаны точнее.

При решении нестационарных задач со свободной поверхностью, в частности, при взаимодействии образующихся волн с различными преградами, очень важной является задача определения давления P на эту преграду. На рис. 6 представлены численные результаты (сплошная линия) давления жидкости на правую стенку в точке P с координатами (x = 3,2 м, y = 0,16 м) и соответствующие экспериментальные данные (маркеры). Точное значение давления в точке P не может быть измерено, так как датчики давления имеют конечный размер — круг диаметром около 90 мм.

Расчетное давление в центре датчика давления (см. рис. 6, a) с течением времени медленно возрастает, после момента времени t = 1,5 с или после второго максимума совпадение экспериментальных данных с численными результатами улучшается. Характер изменения расчетного давления в нижней точке датчика (см. рис. 6, b) достаточно хорошо согласуется с характером изменения соответствующих экспериментальных данных, однако максимальные значения несколько занижены.

При численном моделировании предполагается, что перегородка убирается мгновенно, т. е. ее вертикальная скорость бесконечная. С другой стороны, могут быть и другие физические условия, которые трудно учесть в численном моделировании. Детальный анализ условий проведения эксперимента показывает, что эта скорость имеет конечное значение. Проверочные экспериментальные данные при одинаковых условиях дают разные, не совпадающие друг с другом результаты [5]. Кроме этого, вышеприведенные расхождения между расчетом и экспериментом после момента времени t = 1,5 с, вероятно, можно объяснить двухмерностью используемой модели. Возможно, в некоторых точках расчетной области течение приобретает трехмерный характер.





Рис. 7. Конфигурация (слева) и расположение измерительных датчиков давления (справа).

Сравнивая данные настоящей работы (рис. 4) и работы [6] (рис. 5), можно утверждать, что численные результаты моделирования рассматриваемой задачи, полученные при помощи открытого пакета OpenFOAM, более близки к экспериментальным данным, чем результаты, полученные с помощью коммерческого пакета FLUENT.

Следующей, более усложненной тестовой задачей является задача обрушения столба жидкости в резервуаре прямоугольной формы с препятствием [7]. Выбранная система координат и схема задачи без сохранения геометрической пропорции показаны на рис. 7. В эксперименте использован открытый резервуар длиной 3,22 м с поперечным сечением  $1 \times 1 \text{ м}^2$ . Первоначально резервуар был разделен на две неравные части вертикальной стенкой, расположенной в сечении x = 2 м. За этой стенкой находится вода высотой 0,55 м, другая часть резервуара пуста. В этой части резервуара расположен контейнер длиной 40 см с поперечным сечением  $16 \times 16 \text{ см}^2$ . Координата левой грани контейнера равна x = 0,67 м.

При проведении эксперимента были измерены высота водяного столба и давление жидкости на поверхность контейнера. Расположение измерительных датчиков показано на рис. 8. Использовались четыре датчика для измерения высоты водяного столба: один в заполненной водой части — H4, а остальные H1, H2 и H3 — в пустой части резервуара. Координаты этих датчиков равны *x* = 0,5, 1,0, 1,5 и 2,66 м соответственно.

Контейнер был снабжен восьмью датчиками давления: четыре на лицевой поверхности в точках с координатами z = 0,025, 0,063, 0,099 и 0,136 м, а остальные четыре датчика расположены на верхней стороне контейнера с координатами x = 0,806, 0,769, 0,733 и 0,696 м. Датчики на лицевой поверхности располагались на расстоянии 0,026 м левее центральной линии (y = 0), а датчики на верхней поверхности располагались на расстоянии 0,026 м левее зтой линии. В эксперименте также была измерена сила, оказываемая на контейнер со стороны потока воды.

До момента времени t = 0 вода находилась в спокойном состоянии. В момент времени t = 0 мгновенно убиралась разделительная стенка, и столб воды вследствие силы тяжести устремлялся в пустую часть резервуара. Была использована расчетная сетка  $180 \times 60 \times 80$ , а продолжительность расчетного времени составляла 6 с. Начальный шаг по времени составлял 0,001 с, дальше он изменялся в зависимости от числа Куранта, которое было равно 0,85.



*Рис. 8.* Сравнение численных (слева) и экспериментальных данных (справа) в момент времени *t* = 0,4 с.



*Рис. 9.* Сравнение численных (слева) и экспериментальных данных (справа) в момент времени t = 0.6 с.

На рис. 8-9 представлено сравнение численных и экспериментальных данных для моментов времени t = 0,4 и 0,6 с соответственно. Справа представлены кадры съемки, проведенной во время выполнения эксперимента. Можно отметить достаточно хорошее визуальное совпадение численных результатов с экспериментальными данными.

Время достижения потоком воды контейнера как в эксперименте, так и при численном моделировании одинаковое. Кроме того, формы свободной поверхности, которые образуются после удара потока об контейнер, тоже совпадают. Однако можно заметить, что при численном моделировании присутствуют некоторые неровности свободной поверхности между водой и окружающей средой — воздухом.

На рис. 10 приведена высота водного потока в двух различных точках: в резервуаре и в непосредственной близости от контейнера. Соответствие между ними сохраняется достаточно хорошее, пока вода не возвращается от задней стенки после момента времени  $t \approx 1,8$  с. После этого численные данные (сплошные линии) оказываются несколько выше экспериментальных (маркеры). В момент времени  $\approx 5$  с вторичная волна достигает окрестности датчика *H*2. Однако при численном моделировании это время равно примерно 5,3 с. Тем не менее, общий характер изменений численных и экспериментальных данных совпадает.

Как видно из рис. 11, момент времени t = 0.5 с, когда волна достигает контейнера, предсказан с хорошей точностью, однако величина расчетного давления (сплошные линии) по сравнению с экспериментальным значением (маркеры) несколько завышена (левый рисунок). Однако по сравнению с экспериментом численные значения второго максимума давления в точке P2 смещены вправо на 0,6 с, а в точке P7 — на 0,5 с. Как показал эксперимент, момент времени, когда поток повторно достигает контейнера ( $\approx 4.7$  с), достаточно четко виден на этих рисунках. Кроме этого, при сравнении численных



Рис. 10. Высоты водного потока в точках H2 (слева) и H4 (справа).



и экспериментальных значений давления в точках Р7 (правый рисунок) можно заметить некоторые различия. После t = 1,3 с в численных расчетах имеет место небольшое колебание продолжительностью около 0,2 с, которое не наблюдается в эксперименте.

#### 4. Моделирование течения на реальной местности

Для иллюстрации способов применения численного моделирования крупномасштабных гидродинамических расчетов рассмотрим задачу расчета процесса наводнения местностей около плотин Андижанского и Папанского водохранилищ вблизи г. Ош, Кыргызстан (см. рис. 12). При этом необходимо особо подчеркнуть, что здесь не моделируется ситуация реального прорыва дамбы и наводнения нижележащих местностей, а демонстрируется принципиальная возможность применения описываемой технологии при наличии необходимых топографических данных. В расчетах использовались топографические данные Digital Terrain Elevation Data [8], которые в последующем конвертировались в формат stl. Далее, созданная утилитой blockMesh гексаэдральная фоновая сетка при помощи утилиты snappyHexMesh пакета OpenFOAM преобразуется в трехмерную поверхность, которая используется для моделирования процесса наводнения (рис. 13). В обоих случаях расчеты производились на компьютере Pentium®Dual-Core CPU T4400@2.20 GHz 2.87 Gb.



Рис. 12. Карты Андижанского (слева) и Папанского (справа) водохранилищ.



*Рис. 13.* Трехмерная поверхность местностей Андижанского (слева) и Папанского (справа) водохранилищ.

Для Андижанского водохранилища расчетное поле имело размеры 6000×4000×1500 м, физическое время моделирования для сетки 120×120×80 составляло около девяти часов. На рис. 14, 15 показаны различные степени наводнения в местностях с реальной топологией. Красный цвет соответствует чистому водному потоку, а синий — воздушному потоку (в синих областях отсутствует водный поток). Из рис. 14 видно, что передний фронт потока воды за 240 с доходит до нижней границы расчетной области, проходя расстояние около 6000 м, покрывает большую часть площади, расположенной ниже по течению реки.

Расчетное поле для Папанского водохранилища имеет размеры 5000×5000×1300 м (см. рис. 15).

Общее расчетное время в случае сетки  $50 \times 60 \times 30$  составляет около 5 часов. Как видно из рис. 15, после момента времени  $t \approx 200$  с образуется обратное течение (рис. 15, *d*, *c*) и после момента времени t = 260 с оно разделяется на две части — одна в зоне обратных токов, другая продолжает течение в нижней части русла реки. Расчеты показывают, что примерно около 60 % от всего первоначального объема воды остается в зоне обратных токов.

В настоящей работе не учитывается взаимодействие потока воды с растительностью русла реки и различными строениями, которые заметно изменяют общую картину течения, приводя к увеличению зоны затопления.

Необходимо особо отметить, что из-за ограниченности вычислительных возможностей компьютера, размер расчетной сетки был выбран относительно большим. Поэтому приведенные результаты расчета следует рассматривать как оценочные, они требуют верификации на более мелкой сетке.

## Выводы

В работе представлены результаты математического моделирования сложных гидродинамических явлений на основе нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса, описывающих динамику газожидкостной смеси со свободной границей. Адекватность применяемой модели проверена на примере классических задач вычислительной гидродинамики. Особое внимание уделено точности расчета уровня потока воды и давления





Рис. 14. Картина течения для Андижанского водохранилища.

газожидкостного потока на стенки резервуара. Эффективность примененной технологии проиллюстрирована на примере моделирования прорыва плотин Папанского (Кыргызстан) и Андижанского (Узбекистан) водохранилищ вблизи города Ош, Кыргызстан. Разработанная технология является универсальной и может быть использована для моделирования наводнения для реального рельефа местности. Показано, что особенности рельефа являются существенным фактором.

Работа выполнена в рамках обменной программы Фулбрайт государственного департамента США совместно с профессором Грегом Олифантом (Greg Olyphant) из университета Индианы, Блумингтон, США.



Рис. 15. Картина течения для Папанского водохранилища.

#### Список литературы

- 1. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer Verlag, 2002. 423 p.
- Modified by OpenFOAM Foundation. OpenFOAM®V1.7.1 Documentation. 2011–2013. [Electronic resource]. Mode access: http://www.openfoam.org/archive/1.7.1/docs/.
- **3.** Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- 4. Martin J.C., Moyce W.J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Phil. Trans. Royal Soc. London. Series A. Math. and Physical Sci. 1952. Vol. 244, No. 882. P. 312–324.
- Zhou Z.Q., Kat J.O.D., Buchner B. A nonlinear 3-D approach to simulate green water dynamics on deck // 7th Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Nantes, France, 1999. P. 5.1-1–5.1-15.
- 6. Abdolmaleki K., Thiagarajan K.P., Morris–Thomas M.T. Simulation of the dam break problem and impact flows using a navier-stokes solver // 15th Australasian Fluid Mechanics Conf. the University of Sydney, Australia, 13–17 December 2004. P. 135–138.
- Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A Volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems // J. Computational Physics. 2005. Vol. 206, No. 1. P. 363–393.
- Digital Terrain Elevation Data (DTED). 2012. [Electronic resource]. Mode access: http:// data.geocomm.com/ catalog/KG/group121.html.

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2012 г., после переработки — 21 ноября 2012 г.