

10. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. — М.: Изд-во АН СССР, 1945.
11. Салтанов Г.А. Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике. — М.: Наука, 1979.
12. Griffin J.L., Sherman P.M. Computer analysis of condensation in highly expanded flows // AIAA J. — 1965. — V. 3, N 10. — P. 1813—1819.
13. Chmielewski T., Sherman P.M. Effect of carrier gas on homogeneous condensation in supersonic nozzle // AIAA J. — 1970. — V. 8, N 4. — P. 789—793.
14. Mathieu P. Condensation of ammonia by homogeneous nucleation in supersonic nozzles // Int. J. Multiphase Flow. — 1976. — V. 3, N 2. — P. 181—195.
15. Сковородко П.А. Влияние гомогенной конденсации в свободной струе на интенсивность молекулярного пучка // Некоторые задачи гидродинамики и теплообмена. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1976. — С. 91—112.
16. Бондаренко Е.А., Верховцева Э.Т., Купко А.В. и др. Экспериментальное и теоретическое исследование неравновесной конденсации аргона при истечении из сверхзвукового сопла // Молекулярная газовая динамика. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980. — С. 70—76.
17. Востриков А.А., Дубов Д.Ю. Реальные свойства кластеров и модель конденсации. — Новосибирск, 1984. — (Препр./ АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТ; № 12).
18. Долгушев С.В., Друкер И.Г., Коробейников Ю.Г. и др. Конденсация азота в гиперзвуковом сопле // ИФЖ. — 1985. — Т. 49, № 2. — С. 205—209.

г. Новосибирск

Поступила 17/II 1994 г.

УДК 532.5 : 541.183

О.В. Воинов

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЧИВАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА*

Рассматриваются нестационарные течения тонких смачивающих пленок по твердой поверхности под действием сил Ван-дер-Ваальса. Сформулированы краевые условия в нестационарной задаче на движущейся линии смачивания и на границе с пленкой большой толщины, дающие замкнутое описание динамики сверхтонких пленок при растекании капель. Получены приближенные решения краевой задачи для эволюционного уравнения на малых временах. Найдено сильное ограничение на квазистационарную теорию прекурсионных пленок при растекании капель, показана важность учета существенной нестационарности течения. Установлен эффект нестационарного «усечения» квазистационарной прекурсионной пленки, постепенно поглощающего всю пленку. Найдена область применимости краевого условия на границе с пленкой большой толщины (на «поршне»). Условие на движущейся линии смачивания пригодно для произвольных нестационарных задач для эволюционного уравнения, если поверхность достаточно хорошо смачивается жидкостью. Показано, что возможен пограничный слой на линии смачивания для уравнения нестационарной динамики сверхтонкой пленки с учетом капиллярных сил.

Определяются асимптотические решения нелинейных краевых задач для эволюционного уравнения. Решены задачи о движении линии смачивания в случае неподвижного поршня и полубесконечной пленки, установлена их аналогия. Получены автомодельные решения плоской и осесимметричной задач о поршне, найдены предельные законы растекания для больших расстояний. Решена неавтомодельная задача растекания при медленном движении поршня. Найдена асимптотическая формула, описывающая рас-

© О.В. Воинов, 1994

*Работа депонирована в ВИНТИ 27.12.93, № 3197—В93.

теkanie капель в осесимметричном случае. Получен эффект аномально медленного приближения к предельной зависимости. Построено решение краевой задачи с учетом запаздывания ван-дер-ваальсова взаимодействия, существенно изменяющего вид эволюционного уравнения. Важным общим моментом является то, что во всех рассмотренных решениях выявлена асимптотика скорости линии смачивания $v_{\pm} = \text{const}/\sqrt{t}$, что придает ей универсальный смысл.

§ 1. Модель нестационарной динамики сверхтонкой пленки вязкой жидкости при смачивании твердого тела

1. Постановка задач динамики тонких смачивающих пленок. Нестационарные течения тонкой пленки вязкой жидкости по плоской твердой поверхности допустимо описывать в приближении теории смазки с постоянным по сечению пленки давлением p . Для пленок достаточно малой толщины $h(x, t)$ (x — двумерный радиус-вектор на твердой поверхности, t — время) кроме капиллярного давления (лапласовской составляющей p), пропорционального средней кривизне поверхности, может быть важен вклад в эффективное давление дальнедействующих молекулярных сил Ван-дер-Ваальса:

$$p = p_0 - \sigma \Delta h + A / (6\pi h^3), \quad A = A_{11} - A_{12}.$$

Здесь p_0 — давление над свободной поверхностью пленки; σ — коэффициент поверхностного натяжения; A_{11} и A_{12} — постоянные Гамакера, характеризующие взаимодействие единиц объемов жидкости (индекс 1) и твердого тела (индекс 2) (см., например, [1, 2]). Для случая смачивающих пленок $A < 0$ (далее заменяем $A = -A'$). Зависимость p от h может включать h^{-4} вместо h^{-3} , если важно запаздывание взаимодействия.

Требуем, чтобы масштаб L изменения толщины пленки намного превосходил масштаб l , на котором влияние капиллярного давления и вклада сил Ван-дер-Ваальса имеет один и тот же порядок:

$$(1.1) \quad L \gg l = h^2(2\pi\sigma/A')^{1/2}.$$

При этом, как известно, движение пленки описывается уравнением

$$(1.2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(hv) = 0, \quad v = -\frac{A'}{6\pi\mu h^2} \nabla h$$

(μ — коэффициент динамической вязкости, v — скорость жидкости) или

$$(1.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \Delta \ln h, \quad \kappa = A' / 6\pi\mu.$$

В связи с явлениями растекания капель и пленок по твердой поверхности интересны краевые задачи для уравнения (1.3). Известны квазистационарные модели течения пленок [3—5], существенно нестационарная задача для (1.3) изучалась на бесконечной прямой [6] без постановки краевых условий. Для постановок краевых задач прежде всего необходимо условие на линии смачивания $x = x_*(t, \varphi)$ (φ — параметр), разделяющей сухую и смоченную части твердой поверхности (индекс * относится к величинам на линии смачивания). Примем, что на линии смачивания толщина пленки равна некоторой малой постоянной h_* . Тогда в силу отсутствия источников или стоков массы на линии смачивания ее скорость совпадает со средней скоростью жидкости v . При этом условия на линии смачивания запишутся так:

$$(1.4) \quad h(x_*, t) = h_*, \quad \frac{\partial x_*}{\partial t} = v(x_*, t).$$

Очевидно, h_* должно превышать хотя бы несколько размеров молекул, чтобы имел смысл подход сплошной среды. При достаточно больших макроскопических значениях h_* в подтверждение первого условия (1.4) можно привести эффект «усечения» стационарно текущей пленки [5], полученный в рамках стационарных уравнений с учетом капиллярного давления. Отметим, что если существует макроскопическая минимальная (равновесная) толщина пленки, то граничное условие (1.4) для уравнения (1.3) можно получить аналитически (см. п. 5 этого параграфа).

В стационарной задаче течения пленки, когда ее профиль $h(x)$ перемещается с постоянной скоростью, форма этого профиля не зависит от условий (1.4). Однако основной интерес представляют задачи, в которых форма пленки существенно связана с условиями на линии смачивания (1.4). Очевидно, для этого надо рассматривать существенно нестационарные задачи.

2. Постановка задач движения тонких пленок при растекании капель. Тонкая пленка, движущаяся под действием сил Ван-дер-Ваальса, может граничить с движущимся краем пленки большой толщины. Такие пленки называют первичными [7] или прекурсионными [5], далее кратко — п-пленки. Возможен переход п-пленки в существенно более толстую пленку, образующую под действием капиллярных сил динамический краевой угол с твердой поверхностью [4, 5].

Для того чтобы учесть резкий переход от п-пленки к пленке большой толщины, потребуем особенности толщины п-пленки на их границе. В одномерном случае

$$(2.1) \quad h \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow x_0(t).$$

Отметим, что в стационарном решении [3, 4] вида $h(x - vt)$ также имеется особая точка. На основе этого простого решения $h \sim (x - x_0)^{-1}$ возможно квазистационарное описание главного члена асимптотики h при $x \rightarrow x_0$. Тогда получается условие непрерывности скорости жидкости в точке $x = x_0$:

$$(2.2) \quad v = -\frac{\kappa}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow \frac{dx_0}{dt}, \quad x \rightarrow x_0.$$

Благодаря этому условию особенность в движущейся точке $x_0(t)$ можно условно понимать как специфический поршень, толкающий край п-пленки.

Начальные условия при $t = 0$ зададим в самом простом виде, полагая, что при $t = 0$ п-пленки нет и что пленка образуется при $t > 0$. Соответственно необходимо задать положение линии смачивания при $t = 0$, совпадающей с поршнем:

$$(2.3) \quad x_s \rightarrow x_0, \quad t \rightarrow 0.$$

Для задач растекания капель интересны степенные зависимости координаты поршня от времени:

$$(2.4) \quad x_0 = at^\varepsilon.$$

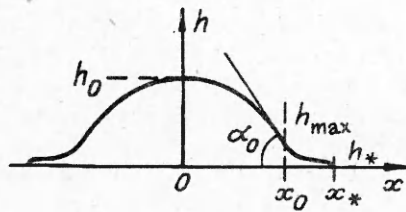
При этом преобразование

$$(2.5) \quad h = h' h_*, \quad x = x' X, \quad t = t' T, \quad X = a^n (h_* / \kappa)^{\varepsilon n}, \\ T = a^{2n} (h_* / \kappa)^n, \quad n = 1 / (1 - 2\varepsilon)$$

приводит уравнение (1.3) и краевые условия к случаю

$$(2.6) \quad \kappa = a = \dot{h}_* = 1,$$

когда нестационарная краевая задача для (1.3) содержит единственный параметр ε . Очевидно, случай (2.6) можно считать без ограничений общим, поэтому штрихи у h, x, t для краткости будем опускать.



Описание внутренней области $x < x_0$ растекающейся капли основано на асимптотической ($\mu\nu/\sigma \rightarrow 0$) модели сферического сегмента и формуле угла наклона свободной границы [4, 8]:

$$\alpha = [(9\mu\nu/\sigma)\ln(h/h_m)]^{1/3}.$$

Известно [8], что в осесимметричной задаче растекания капли (см. рисунок) динамический угол $\alpha_0 \sim t^{-3/10}$ и соответственно в (2.4) $\epsilon = 1/10$. Аналогично в плоском случае $\epsilon = 1/7$.

Величина a в (2.4) является приближенно постоянной и, согласно [8], может быть записана как

$$(2.7) \quad a = R(\sigma/R\mu c_0)^\epsilon, \quad c_0 = c_1 \ln(h_0/h_{\max}),$$

где R — радиус сферы (окружности) эквивалентного объема V (площади S); $c_1 \approx 0,0125$ в плоском и $\approx 0,006$ в осесимметричном случаях; $c_0 \approx \text{const}$ при $h_0/h_{\max} \gg 1$; h_0 имеет порядок толщины в центре сегмента сферы (окружности); h_{\max} — максимальная (по порядку величины) толщина п-пленки в переходной области к пленке большой толщины [4]:

$$(2.8) \quad h_{\max} = \left(\frac{\sigma}{3\mu\nu}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{A'}{2\pi\sigma}}.$$

Масштабы времени и длины в (2.6) с учетом (2.7) примут вид

$$(2.9) \quad T = \frac{R\mu}{\sigma} \left(\frac{3\Omega}{c_0^{2\epsilon}}\right)^n, \quad X = R \left(\frac{3\Omega}{c_0}\right)^{\epsilon n},$$

$$\Omega = \frac{h_* R}{\lambda^2}, \quad \lambda^2 = \frac{A'}{2\pi\sigma}, \quad n = \frac{1}{1 - 2\epsilon}.$$

Безразмерная максимальная толщина (2.8) в случае капли

$$(2.10) \quad h'_{\max} = 2,7(\lambda/h_*)(\Omega^n t)^{(1-\epsilon)/3}.$$

Возрастание h_{\max} с увеличением t дает возможность выполнения (2.2) в некоторой области параметров. Для этого необходимо, в частности, чтобы правая часть (2.10) была велика по сравнению с единицей.

Таким образом, необходимо найти решение нестационарной краевой задачи (1.3), (1.4), (2.1) — (2.4), (2.6) на подвижном отрезке (x_0, x_*) с неизвестной границей x_* .

Отметим, что для исследования задачи может быть полезен метод лагранжевых координат в задаче Стефана [9, 10].

Рассмотрим свойства решений, существенные для обоснования модели движения п-пленки, выяснения границ ее применимости.

3. Динамика п-пленки вблизи поршня. На малом расстоянии от особой точки x_0 решение (1.3) удобно искать в подвижной системе, связанной с поршнем:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v_0 \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln h, \quad \bar{x} = x - x_0(t).$$

Пренебрегая $\partial h/\partial t$, имеем стационарный профиль [3, 4] как первое приближение:

$$(3.1) \quad h_{(0)} = 1/v_0 \bar{x}, \quad v_0 = x_0'.$$

Длина п-пленки в квазистационарном приближении определяется равенством $h = 1$:

$$(3.2) \quad \bar{x}_+ = 1/v_0 = t^{1-\varepsilon}/\varepsilon.$$

Эта формула с точностью до обозначений соответствует стационарной теории [5].

Область применимости квазистационарного решения (3.1) находим из условия малости нестационарного слагаемого $\partial h_{(0)}/\partial t$ в эволюционном уравнении

$$\bar{x} \ll v_0^2/|dv_0/dt|,$$

которое выполнено в малой окрестности поршня.

Для зависимости $x_0 = t^\varepsilon$ отсюда следует ограничение

$$(3.3) \quad \bar{x} \ll \varepsilon x_0/(1-\varepsilon),$$

которое для растекающейся капли является весьма жестким, так как $\varepsilon \ll 1$. Неравенство (3.3) вместе с (3.1) эквивалентно условию

$$(3.4) \quad h_{(0)} \gg h_N, \quad h_N = \varepsilon^{-2} t^{1-2\varepsilon},$$

где h_N — характерный масштаб толщины пленки, при котором сильно проявляется нестационарность течения в системе, связанной с x_0 .

Для уточнения квазистационарной теории рассмотрим задачу малых деформаций п-пленки (3.1) в плоском случае. Очевидно, в силу условия квазистационарности (3.3) или (3.4) это имеет смысл при достаточно малых временах t .

Условие (1.4) на скорость линии смачивания выполняется приближенно, так как скорость точки x_{*0} в соответствии с (3.2) отличается от $v_0 = \dot{x}_0$ на величину

$$(3.5) \quad \dot{x}_{*0} - \dot{x}_0 = t^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)/\varepsilon.$$

Пока выполнено условие квазистационарности (3.3), правая часть (3.5) мала. Можно искать отличие профиля пленки от стационарного (3.1)

$$(3.6) \quad h = h_{(0)}(1 + h_1 + \dots),$$

считая неизвестную поправку h_1 малой. При этом (1.3) дает уравнение для h_1 :

$$(3.7) \quad \frac{\partial h_{(0)}}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x} h_{(0)} h_1 = \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{1-m}{x_0} \frac{\partial \ln h_{(0)}}{\partial x}$$

($m = 1$ или 0 в плоском и осесимметричном случаях соответственно). Из граничного условия для скорости линии смачивания (1.4) с учетом (3.5), (3.6) следует

$$(3.8) \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{h_1}{x_{*0} - x_0} = -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x_0}, \quad x = x_{*0}.$$

Из второго условия (1.4) для поправки h_1 к координате линии смачивания x_{*0} получим приближенно

$$x_1 = x_{*0} - x_{*0}, \quad h_1(x_{*0}) + \frac{\partial h_{(0)}}{\partial x} x_1 = 0$$

и после подстановки (3.1)

$$(3.9) \quad x_1 = (x_{*0} - x_0) h_1(x_{*0}).$$

В результате достаточно определить h_1 , чтобы найти поправку x_1 к длине пленки. Решение уравнения (3.7) имеет вид

$$(3.10) \quad h_1 = C \xi + \frac{1-m\varepsilon}{2\varepsilon} \xi \ln \frac{\xi}{\xi_*}, \quad \xi = \frac{\bar{x}}{x_0}, \quad x_0 = t^\varepsilon.$$

Определяя в (3.10) C из (3.8), получим

$$(3.11) \quad h_1 = \frac{\bar{\xi}}{2\varepsilon} \left(-\frac{3}{2} + \left(1 + \frac{m}{2}\right)\varepsilon + (1 - m\varepsilon) \ln \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_*} \right),$$

$$\bar{\xi}_* = (x_{*0} - x_0) / x_0.$$

Как видно, при $\varepsilon \ll 1$ формулы второго приближения h_1 в плоском ($m = 1$) и осесимметричном ($m = 0$) случаях почти не различаются. Но при конечных ε вклад m в (3.11) заметен. Однако, чтобы возмущение $h_{(0)}$ не возрастало при $t \rightarrow 0$, необходимо потребовать $\varepsilon \leq 1/2$, что ясно как условие ограниченности относительной длины пленки x_*/x_0 при $t \rightarrow 0$. Это замечание уточняет условие (2.3).

Согласно (3.11), h_{1*} растет пропорционально относительной длине пленки $\bar{\xi}_*$. При этом не малые значения $|h_1| \sim h_{(0)}$ достигаются еще до того, как неравенство (3.3) переходит в равенство. Понятно, что для таких h_1 теория непригодна. Границу применимости квазистационарного решения и второго приближения (поправки h_1 и $h_{(0)}$) определим, исходя из условия большого отличия длины пленки $x_{*0} - x_0$ от второго приближения, например, принимая это отличие равным 30%. Соответствующая длина пленки при $\varepsilon = 0,1$ определяется по (3.9) и (3.11). В результате получаем очень жесткое условие пригодности квазистационарной теории п-пленки:

$$(3.12) \quad x_* - x_0 < 0,03x_0$$

($x_* - x_0$ — длина п-пленки, x_0 — радиус основания капли).

Из-за сильного ограничения (3.12) квазистационарной теории актуально изучение существенно нестационарной динамики п-пленки.

4. Оценки области применимости модели поршня при растекании капель. Если пригодна модель подвижной особенности, то, согласно (3.1), существует квазистационарный участок пленки при $x \rightarrow x_0$, граница справедливости которого дается (3.3) или (3.4). Характерный масштаб нестационарности h_N (3.4) охватывает все большие значения толщины с ростом времени. Растет также и максимальная толщина h_{\max} (2.8) стационарной части пленки. Судьба стационарной части пленки определяется их отношением

$$(4.1) \quad h_{\max} / h_N \sim t^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5}{2}\varepsilon\right).$$

При растекании круглой капли $\varepsilon = 0,1$ и $\gamma = 1/2$, т.е. отношение (4.1) убывает как $1/\sqrt{t}$. Следовательно, при достаточно больших временах, характеризующих критическим масштабом времени t_k , когда $h_{\max} \sim h_N$, стационарная часть п-пленки (в системе подвижного поршня) перестает существовать. Безразмерное критическое время t_k по (2.10) и (3.4) зависит от эквивалентного радиуса капли R . Учитывая, что значения $t \sim 1$ в задаче о поршне являются характерными и, как можно сказать, отвечают большой длине п-пленки порядка радиуса основания капли x_0 , интересно записать из (2.10) и (3.4) при $\varepsilon = 0,1$ соответствующий эквивалентный размер капли R_0 :

$$(4.2) \quad t_k = 1, \quad R_0 = 1,5 \cdot 10^4 \lambda (h_*/\lambda)^{5/3}.$$

Значение R_0 дает границу, выше которой ($R > R_0$) $t_k > 1$, а ниже ($R < R_0$) $t_k < 1$.

Критический масштаб времени t_k имеет важное значение для корректности моделей динамического краевого угла капли α_0 и сферического сегмента с углом α_0 , аппроксимирующего внутреннюю область капли [8]. Действительно, при $t \sim t_k$ из $h_{\max} \sim h_N$ одновременно вытекает совпадение соответствующих масштабов l и εx_0 (по координате x). Масштаб l отвечает области формирования динамического краевого угла (по порядку величины)

или переходной области от п-пленки к области действия капиллярных сил. Несложно оценить поэтому, что отношение h_{\max} к толщине пленки в центре h_0 составляет по порядку $h_{\max}/h_0 \sim 2\varepsilon = 0,2$. Это означает конец применимости модели сферического сегмента, поскольку динамический краевой угол с п-пленкой имеет смысл только в пределе $h_{\max}/h_0 \rightarrow 0$, как ясно из [4,8].

Таким образом, при растекании капли исчезновение квазистационарной части п-пленки происходит практически одновременно с потерей корректности квазистационарной картины внутренней области, а модель поршня (подвижной особенности), «толкающего» п-пленку, теряет силу. Условие применимости всех трех моделей как асимптотических решений одно и то же: $t \ll t_*$.

5. Граничное условие для эволюционного уравнения и пограничный слой на линии смачивания. Для уравнения нестационарного движения

$$(5.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{A'}{6\pi h^2} \right) \right)$$

постановка условия на линии смачивания ($h = 0$) допустима на основе асимптотики при $h \rightarrow 0$ уравнения равновесия аналогично случаю стационарного течения пленки [5]:

$$(5.2) \quad h \rightarrow 0, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{A'}{6\pi\sigma h^2} = \alpha_e^2 + \dots$$

Здесь α_e — постоянная, равная значению равновесного краевого угла, если поверхность не смачивается. В случае смачиваемой поверхности α_e — чисто мнимая величина, $\alpha_e = i\alpha_*$. Необходимо требовать $\alpha_* \rightarrow 0$ при $A' = \text{const}$, чтобы особенность $\partial h/\partial x$ по (5.2) проявилась в области значений h , много больших, чем размер молекулы жидкости. Если не требовать вырождения второго члена α_e^2 асимптотики $\partial h/\partial x$ (5.2), то особенность $\partial h/\partial x$ не имеет места при реальных значениях h , ограниченных снизу молекулярным масштабом.

Запишем эквивалентное (5.2) асимптотическое разложение h в виде

$$\frac{h}{h_*} = \sqrt{2|\bar{x}|} \left(1 - \frac{3}{4}|\bar{x}| + \dots \right), \quad \bar{x} = \frac{x - x_*}{l_*\sqrt{3}},$$

$$h_* = \lambda/\alpha_*, \quad l_* = \lambda/\alpha_*^2, \quad \lambda^2 = A'/2\pi\sigma.$$

Подставляя это разложение в (5.1), видим, что при $\bar{x} \rightarrow 0$ $\partial h/\partial t$ имеет порядок $|\bar{x}|^{-1/2}$, в то время как вклад второго слагаемого разложения в правую часть (5.1) пропорционален $|\bar{x}|^{-1}$. Следовательно, левая часть (5.1) пренебрежимо мала при $|\bar{x}| \rightarrow 0$, и данное разложение действительно может быть граничным условием для (5.1). Причина этого заключена также в том, что (5.2) является интегралом уравнения равновесия — частного случая (5.1).

Если устранить особенность h^{-2} из (5.2), положив $A' = 0$, то решения уравнения (5.1) с подвижной линией смачивания не будет существовать.

В предположении относительной малости коэффициента σ в (5.1) (условие (1.1)) вдали от линии смачивания $h = 0$ справедливо «укороченное» уравнение с $\sigma = 0$ (1.3). В пограничном слое на линии смачивания (5.1) приводится к уравнению равновесия

$$(5.3) \quad \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{A'}{6\pi h^3} = \text{const},$$

а условие согласования с решением (1.3) вне пограничного слоя запишется как

$$(5.4) \quad h \rightarrow h_*, \quad |x - x_*|l_*^{-1} \rightarrow \infty.$$

Толщина пограничного слоя l находится из линеаризованной задачи для (5.3)

$$(5.5) \quad l = h_*^2 / \lambda = l_*.$$

Решение задачи пограничного слоя (5.2), (5.3) соответствует решению вида $h(x - x_*(t))$, для которого на основе уравнения непрерывности скорость жидкости внутри пограничного слоя постоянна $v(x, t) = v_*$.

Это позволяет вычислять скорость линии смачивания через значения скорости v вне пограничного слоя, т.е. из решения «укороченного» уравнения (1.3).

Параметр h_* — минимальная равновесная толщина пленки [5]. Известно, что форма $h(x)$ по (5.3), вообще говоря, через элементарные функции не выражается. Однако вид полубесконечной пленки минимальной толщины элементарен:

$$X = \ln \frac{1}{1-Y} + 2 \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{1+2Y}}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{3}(1 - \sqrt{1+2Y}),$$

$$X = (x_* - x) / l_*, \quad Y = h / h_*.$$

Отсюда легко судить о масштабе локализации решения. При $X = 1$ $Y = 0,8106$. Значит, величина l_* хорошо соответствует толщине пограничного слоя, так как при $X = \infty$ $Y = 1$.

Пограничный слой на линии смачивания всегда имеет место, если справедливо «укороченное» уравнение (1.3). Причина состоит в том, что если неравенство (1.1) выполнено вдали от линии смачивания, то тем более верно вблизи линии смачивания, поскольку в (5.5) $h_* = \min h$.

§ 2. Асимптотические закономерности растекания пленок по твердому телу под действием сил Ван-дер-Ваальса

1. Точные решения нестационарной задачи о p -пленке. Запишем для одномерного случая краевую задачу (1.3), (1.4), (2.1), (2.2) § 1 в безразмерных обозначениях вида (2.5) § 1, но вводя более общие масштабы длины X и времени T , один из которых можно считать произвольным:

$$(1.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta \ln h, \quad v = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$h = 1, \quad v = x_* \text{ при } x = x_*;$$

$$(1.2) \quad h \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow x_0 \text{ при } x \rightarrow x_0;$$

$$(1.3) \quad X / \sqrt{T} = \sqrt{\kappa / h_*}, \quad \kappa = A' / 6\pi\mu.$$

Для решений вида

$$(1.4) \quad h = y(\xi), \quad \xi = x / \sqrt{2t}$$

в плоской задаче (1.1) дает уравнение и условия

$$(1.5) \quad -\xi y' = (\ln y)'', \quad \xi < \xi_*;$$

$$(1.6) \quad y = 1, \quad y' = -\xi_*, \quad \xi = \xi_*.$$

Неподвижной особой точке $x_0 = 0$ отвечает $\xi_0 = 0$. В этом случае в главном асимптотика решения (1.5) при $\xi \rightarrow 0$ совпадает с точным решением

$$(1.7) \quad y = \frac{1}{\xi^2} + \dots, \quad \xi \rightarrow 0.$$

Уравнение (1.5) имеет интеграл

$$(1.8) \quad \xi y' / y + 2 \ln |y' / y^{3/2}| + \xi^2 y = C, \quad \xi^2 y \neq \text{const} \neq 1,$$

который на асимптотике (1.7) равен

$$(1.9) \quad C = 2\ln 2 - 1.$$

Подстановка (1.6) и (1.9) в (1.8) дает

$$\xi_* = \sqrt{4/e},$$

откуда получаем с учетом (1.4) закон движения линии смачивания

$$(1.10) \quad \sqrt{t} \frac{dx_*}{dt} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

В размерных обозначениях в (1.10) добавляется множитель (1.3). Интересно выяснить, в каких близких к случаю $x_0 = 0$ задачах возможна реализация (1.10), и прежде всего при отсутствии особенности у решения задачи (1.5), (1.6).

2. Растекание полубесконечной пленки. Пусть в начальный момент пленка имеет постоянную толщину

$$(2.1) \quad h = h_0, \quad x < 0, \quad t = 0,$$

причем эта толщина велика ($h_0 \gg 1$). Малый параметр $1/h_0$ позволяет искать решение методом асимптотического сращивания. Рассмотрим вспомогательную задачу для (1.5) с условиями (2.1) и

$$(2.2) \quad y = 1/\xi^2 + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

С помощью инвариантного преобразования легко находим зависимость решения от h_0 :

$$(2.3) \quad y = h_0 Y(\xi \sqrt{h_0})$$

(Y — решение задачи при $h_0 = 1$). Для полноты информации об Y (2.3) достаточно указать асимптотику ее производной при $\xi \rightarrow -\infty$, вытекающую из (1.5), (1.8) и (2.2):

$$Y'(z) = -(2/\sqrt{e}) \exp(-z^2/2).$$

Выход решения (2.3) на другую асимптотику (2.2) происходит при малом ξ ($\sim 1/\sqrt{h_0}$). Поэтому обосновано его сращивание с решением задачи (1.5) — (1.7), у которого асимптотика при $\xi \rightarrow 0$ совпадает с (2.2) при малом ξ .

Таким образом, форма n -пленки, распространяющейся от "толстой" пленки толщины $h_0 \gg 1$, в области $\xi \sqrt{h_0} \gg 1$ мало отличается от случая неподвижного поршня (1.5) — (1.7). Значит, справедлив закон растекания (1.10). Интересно оценить порядок отличия закона растекания от (1.10), вызванный конечностью h_0 . Для этого используем общий вид решения уравнения (1.5), близкого к ξ^{-2} :

$$y = \xi^{-2}(1 + b_1 \xi^{-\sqrt{2}} + b_2 \xi^{\sqrt{2}} + \dots).$$

Порядок постоянных b_1 и b_2 по параметру h_0 известен из составного решения первого приближения:

$$b_1 \sim -(1/h_0)^{1/\sqrt{2}}, \quad b_2 \sim 1.$$

Учитывая это, оценим возмущение граничного условия при $\xi = \xi_*$ в результате первого приближения как величину порядка b_1 . Невязка в граничном условии устраняется во втором приближении, которое дает поправку порядка b_1 , откуда с учетом (1.6) находим порядок отличия скорости смачивания от закона (1.10):

$$\sqrt{t} dx_*/dt = \sqrt{2/e} + O(h_0^{-\sqrt{2}/2}).$$

В дополнение отметим, что рассмотренная задача о полубесконечной пленке для $x > 0$ эквивалентна задаче с граничным условием при $x = 0$

$h = \text{const}$. Интересно поэтому рассмотреть более общее условие $h(0,t) \sim t^n$, при котором решение вблизи $x = 0$ можно искать в виде

$$(2.4) \quad h = t^n y(\chi), \quad \chi = xt^{(n-1)/2}.$$

Легко видеть, что благодаря универсальной асимптотике $2t/x^2$, возможной в (2.4) при любом n , метод асимптотического сращивания так же пригоден для $n > 0$, как и для $n = 0$, и в результате вновь при $t \rightarrow \infty$ справедлива формула растекания (1.10).

Ситуация отличается при $n < 0$. Приближенное решение, не нарушающее прежнюю структуру течения вблизи линии смачивания $x_* \sim \sqrt{t}$, можно построить только для ограниченных моментов времени из-за относительно более быстрого роста, чем \sqrt{t} , масштаба внутреннего решения $\sim t^{(1-n)/2}$.

3. Растекание пленки при движении поршня по закону $x_0 \sim \sqrt{t}$. Пусть особенность движется по закону

$$(3.1) \quad x_0 = \xi_0 \sqrt{2t}, \quad \xi_0 > 0; \\ y \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow \xi_0.$$

Тогда в малой окрестности точки ξ_0 решение (1.5) представимо в виде

$$(3.2) \quad y = 1/\xi_0(\xi - \xi_0) + (1/2\xi_0^2)\ln(\xi - \xi_0) + C_0 + \dots$$

(C_0 — постоянная). В главном (3.2) совпадает с квазистационарным решением.

При $\xi_0 \rightarrow \infty$ (движение поршня с большой скоростью) достаточно учесть первое слагаемое (3.2), и из (1.6) получим $\xi_* - \xi_0 = 1/\xi_0 \ll 1$, т.е. линия смачивания приближается к поршню.

В пределе $\xi_0 \ll 1$ рассмотрим отдельно решения в областях масштабов $\xi \sim \xi_0$ и $\xi \sim 1$ (внешняя область). Для $\xi/\xi_0 \rightarrow \infty$ во внутреннем решении и $\xi \rightarrow 0$ во внешнем общим пределом y является точное решение $1/\xi^2$. При помощи (1.8) и инвариантного преобразования уравнения (1.5) найдем постоянную C_0 в (3.2):

$$\xi_0^2 C_0 = -(1/2)\ln \xi_0 + \ln 2 - 5/4, \quad \xi_0 \rightarrow 0.$$

Внешнее решение ($\xi \gg \xi_0$) совпадает с решением задачи (1.5) — (1.7), справедливым при $\xi_0 = 0$. Значит, выполняется формула (1.10).

Таким образом, в пределе $\xi_0 \rightarrow 0$, когда темп движения поршня (3.1) убывает, выполняется предельный закон движения (1.10) линии смачивания, которая бесконечно удаляется от поршня ($\xi_*/\xi_0 \rightarrow \infty$).

4. Динамика п-пленки при медленном движении поршня ($x_0 = t^\epsilon$, $\epsilon \ll 1$). При растекании капли параметр ϵ достаточно мал, $\epsilon = 0,1$ для круглой капли ($\epsilon = 1/7$ в плоском случае), как следует из [8]. Задача о поршне при $\epsilon \ll 1$ для моментов времени $t \gg t_0 = \epsilon^{2/(1-2\epsilon)}$ допускает применение метода асимптотического сращивания. В достаточно малой окрестности поршня решение ищем в виде

$$(4.1) \quad h = t^{1-2\epsilon} y(x/t^\epsilon), \quad \xi = x/t^\epsilon \geq 1, \\ y(1-2\epsilon) - \epsilon y' \xi = (\ln y)''; \quad y \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 1; \\ y \xi^2 \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Задача упрощается в области $\xi - 1 \gg \epsilon$, где с точностью до малых порядка ϵ решение (4.1) близко к

$$(4.2) \quad y = 2/(\xi - 1)^2, \quad h = 2t/(x - x_0)^2,$$

причем $x_0 \approx \text{const}$, так как при $\epsilon \rightarrow 0$ t^ϵ слабо меняется. В приближении постоянного x_0 решение (4.2) можно продолжить для больших значений

$x - x_0$, как зависящее от $(x - x_0)/\sqrt{2t}$ в соответствии с задачей о неподвижном поршне п. 1. В результате закон растекания (1.10) будет выполняться при $t \gg t_0 \ll 1$, что возможно при малой длине п-пленки ($x_* - x_0 \ll x_0$). Малость величины $t_0 \ll 1$ очень благоприятна из-за ограничения модели поршня (1.1), (1.2) по времени $t < t_k$ (п. 4 § 1).

5. Задача растекания п-пленки в лагранжевом описании. Используя лагранжев подход к задаче Стефана [9, 10], запишем соотношение перехода в (1.1) к лагранжевой переменной ζ в виде

$$h \frac{\partial x}{\partial \zeta} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v = -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \zeta},$$

откуда следует

$$(5.1) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \ln Y, \quad Y = \frac{1}{h}.$$

Граничные условия (1.1) и (1.2) переходят в

$$(5.2) \quad Y = 1, \quad \zeta = 0;$$

$$(5.3) \quad v = \frac{\partial \ln Y}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{dx_0}{dt} = \varepsilon t^{\varepsilon-1}, \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

Задание условия (5.3) в $-\infty$ связано с наличием квазистационарного решения $h \sim (x - x_0)^{-1}$ при $x \rightarrow x_0$, на котором $\int h dx$ расходится.

При больших $t \rightarrow \infty$ примем во внимание сильное различие масштаба ζ_1 в (5.3) и масштаба ζ_2 в (5.1), (5.2):

$$\zeta_1 \sim t^{1-\varepsilon}/\varepsilon, \quad \zeta_2 \sim \sqrt{t}.$$

Очевидно, $\zeta_2 \ll \zeta_1$ при $t \gg t_0 = \varepsilon^{2/(1-2\varepsilon)}$.

Решение в области большого масштаба ζ_1

$$(5.4) \quad Y = t^{2\varepsilon-1} \Phi(\eta), \quad \eta = \zeta t^{\varepsilon-1}$$

находится из краевой задачи

$$(5.5) \quad (2\varepsilon - 1)\Phi + \eta(\varepsilon - 1)\Phi' = (\ln \Phi)''', \quad \eta < 0;$$

$$\eta^2 \Phi = 2 + \dots, \quad \eta \rightarrow 0; \quad (\ln \Phi)' \rightarrow \varepsilon, \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Запишем для примера решение (5.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$1/\Phi = e^{-\varepsilon \eta} \int_0^{\eta} \eta e^{\varepsilon \eta} d\eta.$$

В области малого масштаба ζ_2 задача также автомодельна:

$$(5.6) \quad Y = y(\xi), \quad \xi = \zeta/\sqrt{2t};$$

$$-\xi y' = (\ln y)''', \quad \xi < 0; \quad y = 1, \quad \xi = 0;$$

$$y = 1/\xi^2 + \dots, \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Последнее условие обеспечивает сращивание решений (5.5) и (5.6). Используя интеграл (1.8), из (5.6) находим

$$y'(0) = \sqrt{4/e},$$

откуда получается (1.10). Совпадение не случайно, так как (5.6) соответствует лагранжевой формулировке задачи о растекании пленки от неподвижной особенности.

Полученное решение дополняет п. 4 тем, что хорошо виден момент t_0 совпадения масштабов внешней и внутренней областей и ясна структура решения при $t \gg t_0$, когда эти масштабы сильно различаются и асимпто-

тическое решение обосновано. Это подтверждает ранний выход зависимости $x_*(t)$ на асимптотику (1.10).

6. Растекание пленки в осесимметричном случае. Рассмотрим осесимметричную задачу о поршне, расширяющемся как \sqrt{t} (3.1). Уравнение (1.1) в обозначениях (1.4), где x — радиус, дает краевую задачу для уравнения

$$(6.1) \quad -\xi^2 y' = (\xi y' / y)'$$

с условиями (1.6). Уравнение (6.1) имеет интеграл

$$(6.2) \quad \xi^2 y / 2 = q - \ln q + C, \quad q = -\xi y' / 2y, \quad \xi^2 y \neq \text{const.}$$

Общее решение уравнения (6.1) получается при помощи второго соотношения, следующего из (6.1) и (6.2):

$$(6.3) \quad \ln \xi = -\int \frac{dq}{2q(q - \ln q + C)}.$$

Если рассматривать q как параметр, то (6.2) задает $\xi(q)$, а (6.3) — $y(q)$. С учетом условий на линии смачивания найдем постоянную в (6.2) и (6.3)

$$(6.4) \quad C = \ln q_*, \quad q_* = \xi_*^2 / 2.$$

Удовлетворяя условию на поршне $q \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \xi_0$, получим из (6.3), (6.4) основное уравнение

$$(6.5) \quad \ln \frac{\xi_*}{\xi_0} = \int_0^\infty \frac{dq}{2q(q - \ln(q/q_*))},$$

определяющее отношение координат линии смачивания и поршня ξ_* / ξ_0 как функцию коэффициента в законе движения линии смачивания $x_*^2 = 4q_* t$.

Условие отсутствия особенности в интеграле (6.5) дает предельный закон движения линии смачивания:

$$(6.6) \quad \xi_*^2 = 2/e, \quad x_*^2 = (4/e)t.$$

При $q_* \rightarrow 1/e$, согласно (6.5), $\xi_* / \xi_0 \rightarrow \infty$, т.е. поршень бесконечно удален от линии смачивания, а скорость его расширения пренебрежимо мала по сравнению со скоростью движения линии смачивания. Важно, что предельный закон растекания осесимметричной пленки (6.6) близок к предельному закону в плоском случае (1.10). Отличие предельных коэффициентов скорости составляет всего $\sqrt{2}$ раз.

Интересно определить темп сходимости коэффициента q_* к предельному с ростом ξ_* / ξ_0 . Для этого запишем асимптотику (6.5) при $q_* \rightarrow 1/e$, преобразуя сначала интеграл к более удобному для вычислений:

$$(6.7) \quad \ln \frac{\xi_*}{\xi_0} = \int_0^\infty \frac{ds}{2(\exp(s - s_*) - s)} = \frac{\pi/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - s_*}} - 1,555 + \dots, \quad s_* = -\ln q_*.$$

Удобно переписать (6.7), разрешая его относительно q_* :

$$(6.8) \quad \frac{\xi_*^2}{2} = q_* = \exp\left(-1 + \frac{\pi^2/2}{\ln^2(4,74\xi_*/\xi_0)}\right).$$

Формула (6.8) указывает на исключительно медленное приближение q_* к пределу $1/e$. Так, при $\xi_* / \xi_0 = 50$ отличие составляет около 20 %, при $\xi_* / \xi_0 = 10$ — около 40 %. Формула (6.8) пригодна вплоть до $\xi_* / \xi_0 = 2,5$, где ее погрешность не превышает 10 %. Аномально медленное приближение к предельному закону (6.6) делает затруднительным его наблюдение на опыте, и коэффициент в законе растекания будет еще ближе к плоскому случаю (1.10), так что отличие должно быть вообще малозначительно при ограниченных $\xi_* / \xi_0 < 10$.

Реальный смысл рассмотренной модельной задачи о поршне ($x_0 \sim \sqrt{t}$) можно подтвердить путем решения задачи медленного расширения поршня, соответствующего растеканию капель.

7. Осесимметричная задача динамики п-пленки при растекании капли ($x_0 = t^\epsilon$, $\epsilon \ll 1$). Рассмотрим кратко структуру приближенного решения при $t \rightarrow \infty$ в эйлеровом описании. Уравнение (1.1) в осесимметричном случае переходит в уравнение плоской задачи при соответствующем выборе переменных:

$$(7.1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln H, \quad H = x^2 h, \quad z = \ln x$$

(x — радиус). Решение строится при помощи метода асимптотического сращивания для $z_* \rightarrow \infty$. Вблизи поршня ($z_0 = \epsilon \ln t$) функция H приближенно имеет вид

$$(7.2) \quad H = 2t / (z - z_0)^2 + \dots, \quad \epsilon \ll z - z_0 \leq 1.$$

В промежуточной области ($1 \ll (z - z_0) \ll z_*$) решение находится при помощи деформируемых координат, зависящих от времени:

$$(7.3) \quad H = 2t\pi^2 (z_* - z_0)^{-2} \sin^2((z - z_0)\pi / (z_* - z_0)).$$

При фиксированных z_0 и z_* (7.2) и (7.3) являются точными решениями (7.1). Сращивание (7.3) с (7.2) легко проверяется.

Отметим, что из (7.3) следует

$$(7.4) \quad \min H = 2t\pi^2 / (z_* - z_0)^2.$$

При $z - z_0 \gg 1$ (7.3) сращивается с автомодельным решением (6.2), (6.3) для значений $\xi_0 \rightarrow 0$. В итоге получается предельный закон движения линии смачивания (6.6).

Таким образом, в пределе больших значений $\ln t \rightarrow \infty$ ($z_* \rightarrow \infty$) асимптотическое решение уравнения (7.1) состоит из приближенных решений в трех областях. Кроме (7.2), (7.3) и автомодельного решения при $z - z_0 \gg 1$, имеется еще традиционная область квазистационарного течения пленки на малом расстоянии от поршня $z - z_0 \ll \epsilon$.

Интересно найти следующий член асимптотики, поправляющий (6.6). Проще всего это сделать, привлекая лагранжев подход к задаче Стефана [9, 10].

8. Осесимметричная задача растекания пленки в лагранжевом описании. Вводя лагранжеву координату ζ , в осесимметричном случае запишем

$$xh \frac{\partial x}{\partial \zeta} = 1, \quad \frac{\partial \ln x}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

(x — радиус). Задача (1.1), (1.2) преобразуется в следующую задачу для $Y = (x^2 h)^{-1}$:

$$(8.1) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad u = 2Y + \frac{\partial \ln Y}{\partial \zeta}, \quad \zeta < 0;$$

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial t} = -2u, \quad \zeta = 0; \quad u \rightarrow \frac{d \ln x_0}{dt}, \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

Переход в (8.1) к новым переменным

$$Y = t^{-1} \Phi(\eta, \tau), \quad \eta = \zeta / t, \quad \tau = \ln t$$

при $x_0 = t^\epsilon$ даст

$$(8.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad U = (2 + \eta)\Phi + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta}, \quad \eta < 0;$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 1 - 2U, \eta = 0; \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow \varepsilon, \eta \rightarrow -\infty.$$

Задача о поршне при $\varepsilon = 1/2$ имеет простое решение, вытекающее из (8.2):

$$(8.3) \quad 1/\Phi = 2\eta + Ee^{-\eta^2}, E = \text{const.}$$

Условие отсутствия особенности при $\eta < 0$ требует $E > 4/e$, откуда при $E \rightarrow 4/e$ следует (6.6).

При $\varepsilon \ll 1$ будем искать для $\tau \rightarrow \infty$ решение, близкое при $\eta < -2$ к сингулярному, соответствующему $E = 4/e$. Если в точке $\eta = -2$ значение Φ велико, как в (8.3) при $E \rightarrow 4/e$, то решение (8.2) нулевого приближения легко записывается в областях $\eta < -2$ и $\eta > -2$ при следующих условиях:

$$\eta \rightarrow -\infty, \partial \ln \Phi / \partial \eta \rightarrow \varepsilon; \eta = 0, U = 1/2;$$

$$\eta + 2 \rightarrow \pm 0, \Phi = 2(\eta + 2)^{-2} + \dots$$

Благодаря условиям при $\eta = 0, -\infty$ $\max \Phi$ при $\tau \rightarrow \infty$ должен медленно возрастать. Характерным масштабом изменения Φ , очевидно, является τ . Важно, что при этом производные по времени относительно малы ввиду оценки $\partial \Phi / \partial \tau \sim \Phi / \tau$.

Решение во внутренней области $|\eta + 2| \ll 1$ можно получить, используя вытекающую из (8.2) оценку по порядку величины $U = O(1)$, после интегрирования по η обеих частей уравнения (8.2):

$$(8.4) \quad 1/\Phi = (1/G + (1/2)(2 + \eta)^2)(1 + O(\eta + 2))$$

($G \sim \max \Phi$ при $G \gg 1$). Внешнее решение при $\eta > -2$ находим из стационарного уравнения в окрестности решения нулевого приближения:

$$(8.5) \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{2\eta}{1-w} - \frac{4w}{(1-w)^2} + E \exp\left(-\frac{1-w}{2}\eta\right), U = \frac{1-w}{2}.$$

Параметры w, ε медленно меняются со временем, причем в окрестности предельного решения $w \ll 1$. Внешнее решение для $\eta < -2$ записывается аналогично (8.5).

Величина U изменяется за счет нестационарности в основном в малой окрестности точки $\eta = -2$, принимая предельные значения U_{\pm} при $(\eta + 2)\sqrt{G} \rightarrow \pm\infty$. Из уравнения (8.2) следует

$$(8.6) \quad \int_{-2-b}^{-2+b} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} d\eta = U_+ - U_- = \frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{w}{2}$$

($1/\sqrt{G} \ll b \ll 1$). Подставляя (8.4) в (8.6) и вычисляя интеграл, в главном приближении получим

$$(8.7) \quad \frac{d\sqrt{G}}{d\tau} = \frac{1-2\varepsilon}{\pi 2\sqrt{2}}.$$

Отсюда видно, что изменение максимума Φ действительно отвечает медленной релаксации $G \sim \tau^2$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Для определения асимптотик E, w достаточно установить их связь с G . Если перейти в (8.5) к пределу $\eta \rightarrow -2$, считая одновременно $\eta + 2 \gg \gg |w|$, то сращивание с (8.4) дает

$$(8.8) \quad 4\gamma - 12w = 1/G, \gamma = Ee/4 - 1 \ll 1.$$

Оценки влияния нестационарности на внешнее решение проводим, вычисляя $\partial \Phi / \partial \tau$ по первому приближению (8.5) для $1/\sqrt{G} \ll \eta + 2 \ll \ll 1$. Согласно этому, условие малости нестационарного слагаемого $G \ln G \ll G$ в силу (8.7) выполнено, если $G \gg 1$.

Из (8.2), (8.5), (8.7) и (8.8) для координаты линии смачивания имеем

$$(8.9) \quad \frac{x_*^2}{t} = \frac{4}{e} \left(1 + \frac{2\pi^2}{(1-2\varepsilon)^2 \ln^2 kt} \right).$$

Постоянная k отвечает интегрированию (8.7). Отметим, что (8.7) согласуется с (7.4).

Сравнение (8.9) с асимптотикой (6.8) автомодельной задачи о поршне дает согласование этих формул, если сопоставить ξ_*/ξ_0 текущее значение $\sim t^{0.5-\varepsilon}$.

Таким образом, формула (8.9) в согласии с (6.8) описывает эффект аномально медленного изменения коэффициента в законе растекания. Продолжая пп. 4 и 5, из которых следует справедливость (1.10) на малых временах в осесимметричной задаче, можно сделать вывод о приближенной справедливости (1.10) для не малых времен, когда длина п-пленки сравнима с радиусом внутренней области капли ($x_* - x_0 \sim x_0$). Причина в том, что коэффициент в законе (1.10) всего в $\sqrt{2}$ раз превышает аналогичный коэффициент осесимметричного предельного закона. И, допуская монотонность изменения коэффициента растекания (в (8.9) и (6.5) такая монотонность есть), находим, что коэффициент растекания q_* из-за своего медленного изменения остается ближе к плоскому, чем к осесимметричному, предельному значению, пока длина п-пленки сравнима с радиусом внутренней области капли.

9. Задача растекания пленки с учетом запаздывания взаимодействия. Как известно [1], при толщине $h \sim 10^{-7}$ м вклад межмолекулярных сил в давление изменяется с h^{-3} на h^{-4} (эффект запаздывания ван-дер-ваальсова взаимодействия). Для учета этого примем простейшую модель зависимости $p(h)$, в которой показатель степени меняется с -3 на -4 в точке h_+ , так что в размерном виде

$$p(h) = -A'h_+ / 6\pi h^4, \quad h > h_+.$$

Соответственно в лагранжевом описании вместо (5.1)

$$(9.1) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \ln Y, \quad Y > Y_+, \quad Y = \frac{1}{h},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{Y_+} \frac{\partial^2 Y}{\partial \zeta^2}, \quad Y < Y_+.$$

Условие на линии смачивания $\zeta = 0$ совпадает с (5.2). Условия для $h = \infty$ в отличие от (5.2) задаются не в $-\infty$, а в неизвестной движущейся точке:

$$(9.2) \quad \xi = \xi_0, \quad \frac{1}{Y_+} \frac{\partial Y}{\partial \zeta} = \frac{dx_0}{dt} = \frac{\varepsilon}{t^{1-\varepsilon}}, \quad Y = 0.$$

Условие (9.2) означает, что происходит рождение новых лагранжевых частиц при $h = \infty$.

Пока запаздывание сказывается только на стационарной части решения при больших h , решение задачи (5.2), (9.1), (9.2) находится достаточно просто, поскольку в области $Y > Y_+$ практически не отличается от случая без запаздывания. Квазистационарное приближение в области $Y \sim Y_+$ нарушается, когда масштаб нестационарности $h_N \geq h_+$, что эквивалентно неравенству

$$(9.3) \quad \varepsilon^{-2} Y_+ t^{1-2\varepsilon} \geq 1.$$

Это условие может быть выполнено в случае достаточно крупных капель. Например, из (4.2) § 1 можно найти, что для $h_* \sim 2\lambda$ необходимы значения эквивалентного радиуса капли $R > 10^{-2}$ см, чтобы запаздывание взаимодействия могло повлиять на форму пленки, пока $t < t_k$ и пригодна модель движущейся особенности на краю пленки.

В связи с тем, что важно в принципе определить влияние эффекта запаздывания на растекание п-пленки, обратимся к наиболее интересному случаю, когда нестационарность проявляется существенно и соответственно левая часть (9.3) велика. Решение упростится, если принять $Y_+ \ll 1$ (возможны значения $Y_+ \sim 0,01$).

Перейдем к новой переменной $\xi = \zeta/\sqrt{2t}$, тогда задача для уравнения (9.1) примет вид

$$(9.4) \quad 2t \frac{\partial Y}{\partial t} - \xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \ln Y, \quad Y > Y_+;$$

$$2t \frac{\partial Y}{\partial t} - \xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{1}{Y_+} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}, \quad Y < Y_+;$$

$$\xi = \xi_0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \varepsilon \sqrt{2} Y_+ t^{\varepsilon-1/2}, \quad Y = 0; \quad \xi = 0, \quad Y = 1.$$

Ищем асимптотику Y при $t \rightarrow \infty$ в окрестности автомодельного, т.е. стационарного, решения уравнений (9.4). Попробуем учесть нестационарность граничного условия при $\xi = \xi_0$ параметрически, считая малыми нестационарные слагаемые $2t \partial Y / \partial t$ в уравнениях (9.4). Основной момент при этом заключается в последующей оценке малости отбрасываемых слагаемых на таком параметрическом решении.

Вводя неизвестную $\xi_+(Y(\xi_+) = Y_+)$ и записывая при $\xi \in (\xi_0, \xi_+)$ приближенно

$$\partial Y / \partial \xi = F \exp(-\xi^2 Y_+ / 2),$$

из (9.4) получим

$$(9.5) \quad -Y_+ = F \int_{\xi_+}^{\xi_0} \exp(-\frac{\xi^2}{2} Y_+) d\xi, \quad F \exp(-\frac{\xi_0^2}{2} Y_+) = \frac{Y_+ \varepsilon \sqrt{2}}{t^{0,5-\varepsilon}},$$

$$\xi = \xi_+, \quad \partial Y / \partial \xi = F \exp(-\xi_+^2 Y_+ / 2).$$

Первое и третье уравнения (9.5) можно рассматривать независимо от второго, отыскивая F и ξ_+ как функции от ξ_0 . Замыкание задачи упрощается при $|\xi_+| \gg 1$. В этом случае возможна промежуточная асимптотика решения:

$$(9.6) \quad Y = 1/\xi^2 + \dots, \quad |\xi_+| \gg |\xi| \gg 1.$$

Определяя постоянную в интеграле (1.8) по (9.6), из (1.8) и (9.5) имеем

$$(9.7) \quad \theta^2 - \theta \psi + 2 \ln \psi = 2 \ln 2 - 1,$$

$$\frac{1}{\psi} = e^{\theta^2/2} \int_{\theta}^q e^{-\theta^2/2} d\theta, \quad \psi = \frac{Y'(\xi_+)}{Y_+^{3/2}},$$

$$\theta = -\xi_+ \sqrt{Y_+}, \quad q = -\xi_0 \sqrt{Y_+}.$$

При $q \rightarrow \infty$ решение задачи (9.7) находится в явном виде путем несложных расчетов:

$$(9.8) \quad \theta = 1,093 - (1,02/q) e^{-q^2/2}, \quad \psi = 1,603.$$

Из (9.6) — (9.8) вытекает

$$(9.9) \quad F = 2,91 Y_+^{3/2}, \quad \xi_0^2 = \frac{q^2}{Y_+} = \frac{1}{Y_+} \ln \left(\frac{Y_+ t^{1-2\varepsilon}}{0,236 \varepsilon^2} \right).$$

Как и ожидалось, значение ξ_0 , согласно (9.9), медленно возрастает при $t \rightarrow \infty$.

Определяя $d\xi_+/d\xi_0$ по (9.8), находим из (9.5) — (9.9) производные по времени ξ_+ , F , ξ_0 и в итоге прямого вычисления для $\xi < \xi_+$ получаем

$$(9.10) \quad 2t \left| \frac{\partial Y}{\partial t} \right| / \left| \xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right| = O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Оценка (9.10) при $q \rightarrow \infty$ подтверждает непротиворечивость найденного приближенного решения и в том числе корректность (9.6).

Из (1.8) и (9.6) получается $Y'_\xi = \sqrt{4e}$ при $\xi = 0$, что соответствует формуле (1.10) без учета запаздывания взаимодействия. Следовательно, закон растекания (1.10) остается в силе, если в области больших толщин важно запаздывание взаимодействия.

Укажем на существенную роль лагранжева описания задачи Стефана [9, 10] для полученного приближенного решения неавтономной задачи с учетом запаздывания взаимодействия.

Таким образом, закон движения линии смачивания при растекании пленки от неподвижного поршня (п. 1) является асимптотикой для целого ряда основных задач (пп. 2—9) растекания тонких пленок. Следовательно, зависимость $v_* \sqrt{t} = \text{const}$ (1.10) в определенном смысле универсальная.

Отметим, что коэффициент в законе растекания, найденный экспериментально, может служить источником дополнительной информации о силах Ван-дер-Ваальса и граничном условии при смачивании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. — М.: Наука, 1988.
2. Воинов О.В. Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ // ПМТФ. — 1971. — № 3. — С. 81—89.
3. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Int. Sci. — 1971. — V. 35, N 1. — P. 85—101.
4. Воинов О.В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. — 1977. — № 2. — С. 92—99.
5. Hervet H., de Gennes P.G. The dynamics of wetting of "dry" solid // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. II. — 1984. — T. 299, N 9. — P. 499—503.
6. Lopez J., Miller C.A., Ruckenstein E. Spreading kinetics of liquid drops on solids // J. Colloid Int. Sci. — 1976. — V. 56, N 3. — P. 460.
7. Bascom W.D., Cottington R.L., Singletary C.R. Dynamic surface phenomena in the spontaneous spreading of oils on solids // Contact angles, wettability and adhesion / Ed. E.W. Fowkes. — Washington: D.C., Amer. Chem. Soc., 1964.
8. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1976. — № 5. — С. 76—84.
9. Мейрманов А.М., Пухначев В.В. Лагранжевы координаты в задаче Стефана // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1980. — Вып. 47. — С. 90—111.
10. Пухначев В.В. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // ДАН СССР. — 1987. — Т. 294, № 3. — С. 535—538.

г. Тюмень

Поступила 4/1 1994 г.

УДК 532.516

В.Н. Старовойтов

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

В данной работе рассматривается известная в математической гидродинамике задача об определении движения двух несмешивающихся вязких жидкостей, граница раздела которых обладает поверхностным натяжением. В классической постановке наличие поверхностного натяжения означает, что на границе раздела Γ выполняется условие [1—3]