

УДК 532.532

## СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО БОРА В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена математическая модель распространения нелинейных длинных волн с учетом негидростатичности распределения давления, а также развития приповерхностного турбулентного слоя в результате их обрушения. Решена задача о структуре бора в однородной жидкости. В частности, в рамках одной модели описан переход волнового бора в турбулентный при возрастании его амплитуды.

**Введение.** Задачи о структуре стационарных гидравлических прыжков и боров, распространяющихся с постоянной скоростью, являются классическими в гидравлике открытых русел. Основная проблема при описании волн конечной амплитуды состоит в моделировании процесса обрушения волны и развития приповерхностного турбулентного слоя. Экспериментальному и теоретическому изучению этой проблемы посвящены работы [1–10].

В настоящей работе подход, развитый в [11, 12] для двухслойных смешивающихся жидкостей, применяется для моделирования эволюции обрушивающихся волн в однородной жидкости. Основная идея здесь состоит в использовании полных законов сохранения массы, импульса и энергии для описания динамики приповерхностного турбулентного слоя, причем скорость вовлечения жидкости из нижнего слоя определяется уровнем турбулентности в верхнем слое. Аналогичный подход использован в [9, 10]. Вместо уравнения для притока массы в турбулентный слой применяются условия равновесия генерации и диссипации турбулентной энергии в верхнем слое. Поэтому модель [9, 10] представляет собой вариант равновесной модели для рассматриваемой далее в работе системы уравнений с гидростатическим распределением давления на фронте волны.

Эффекты негидростатичности возникают в основном для волн умеренной амплитуды и приводят к волновой структуре бора. В большинстве моделей для отражения влияния негидростатичности на форму волны применяются различные варианты уравнений Буссинеска и Кортвега — де Фриза, возникающие во втором приближении мелкой воды [13].

В предлагаемой модели члены, описывающие эффекты негидростатичности, включены в уравнения нетрадиционным способом. Система уравнений гиперболическая, а процесс вовлечения в турбулентный слой жидкости из нижнего слоя препятствует выходу системы из области гиперболичности. Модель описывает как формирование солитонобразных волн, распространяющихся по покоящейся жидкости, так и структуру волнового бора и переход его в турбулентный при возрастании амплитуды.

**1. Математическая модель.** Рассматривается плоскопараллельное течение тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести над горизонтальным дном. Для описания процесса турбулентного перемешивания в результате обрушения волн используются уравнения двухслойной мелкой воды [11]. Аэрация потока не учитывается,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00750) и межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта 1787 ЗН-307-98).

поэтому плотность жидкости  $\rho$  постоянна. Нижний слой, в котором течение считается потенциальным, характеризуется двумя параметрами:  $h$  — средней глубиной,  $u$  — ненулевой компонентой горизонтальной средней скорости в слое. Турбулентный верхний слой определяется глубиной  $\eta$ , скоростью  $v$  и среднеквадратичной скоростью турбулентного движения  $q$ . В предположении о гидростатичности распределения давления в слоях уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} (h + \eta)_t + (hu + \eta v)_x &= 0, & u_t + (u^2/2 + g(h + \eta))_x &= 0, \\ (hu + \eta v)_t + \left( hu^2 + \eta v^2 + \frac{1}{2} g(h + \eta)^2 \right)_x &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + g(h + \eta)^2)_t + (hu^3 + \eta(v^2 + q^2)v + 2g(h + \eta)(hu + \eta v))_x = -\beta q^3, \quad \eta_t + (\eta v)_x = \sigma q.$$

Система (1.1) представляет собой уравнения двухслойной мелкой воды, записанные в виде интегральных законов сохранения. Уравнение энергии используется для определения закона вовлечения жидкости из нижнего слоя в турбулентный, при этом скорость вовлечения полагается пропорциональной скорости  $q$ . Коэффициент пропорциональности  $\sigma = 0,15$  [14] характеризует отношение вертикального и горизонтального масштабов движения и не влияет на структуру волн, так как может быть исключен из уравнений растяжением независимых переменных. Постоянная  $\beta$  задает скорость диссипации турбулентной кинетической энергии.

Структура уравнений (1.1) становится более понятной из следующей недивергентной формы записи уравнений:

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x &= -\sigma q, & \eta_t + v\eta_x + \eta v_x &= \sigma q, & u_t + uu_x + gh_x + g\eta_x &= 0, \\ v_t + vv_x + gh_x + g\eta_x &= \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), & q_t + vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \delta)q^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\delta = \beta/\sigma \equiv \text{const}$ .

Таким образом, система (1.2) или (1.1) содержит единственный существенный безразмерный параметр  $\delta > 0$ , который должен быть задан эмпирически. Как будет показано ниже, система (1.2) пригодна для описания структуры развитых турбулентных боров в однородной жидкости.

**2. Структура турбулентного бора.** Рассмотрим возмущения конечной амплитуды, распространяющиеся с постоянной скоростью в первоначально покоящейся жидкости. Пусть начальная глубина слоя  $h = h_0$ , скорость  $u_0 = 0$ , турбулентная прослойка отсутствует ( $\eta_0 = 0$ ). Требуется описать бегущие волны, т. е. волны неизменной формы, распространяющиеся с постоянной скоростью  $D$ . Единственный безразмерный параметр задачи — число Фруда  $Fr = D/\sqrt{gh_0}$  (рис. 1).

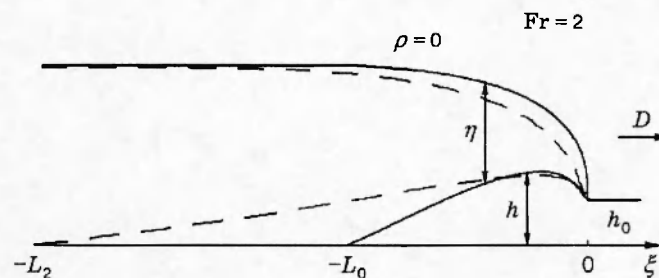


Рис. 1

Известно [13], что в приближении мелкой воды без учета перемешивания ( $\sigma = 0$ ) для любых значений  $Fr > 1$  бегущая волна (бор) представляет собой разрывное решение, переводящее покоящийся слой в однородный слой постоянной глубины, движущийся с постоянной скоростью. На линии разрыва выполнены законы сохранения массы и импульса, а полная энергия потока убывает.

При применении модели (1.1) для решения поставленной задачи возникает парадокс, связанный с одновременным использованием законов сохранения массы, импульса и энергии в (1.1). Действительно, непрерывное решение, отличное от тривиального при  $Fr > 1$ , на первый взгляд существовать не может, так как фронт волны движется со сверхкритической скоростью. В разрывном же решении в силу соотношений на прыжке толщина прослойки непосредственно за разрывом должна равняться нулю, поэтому одновременно законы сохранения массы, импульса и энергии не могут выполняться для скачков конечной амплитуды.

Как показано ниже, парадокс устраняется при более внимательном изучении структуры течений с турбулентным слоем. При непрерывном изменении параметров течения в верхнем слое вблизи фронта жидкость разгоняется почти до скорости волны ( $v \sim D$ ), поэтому характеристики течения догоняют фронт волны и структура турбулентного бора может быть описана в классе непрерывных решений системы (1.1).

Пусть решение системы (1.1) зависит только от переменной  $\xi = x - Dt$ ,  $D > 0$ . Однородные законы сохранения в (1.1) дают соотношения

$$\begin{aligned} h(u - D) + \eta(v - D) &= -h_0 D, & \frac{1}{2}(u - D)^2 + g(h + \eta) &= \frac{1}{2}D^2 + gh_0, \\ hu(u - D) + \eta v(v - D) + \frac{1}{2}g(h + \eta)^2 &= \frac{1}{2}gh_0^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В безразмерных переменных ( $h_0 = 1$ ,  $g = 1$ ) величины  $h, \eta, v$  определяются в области допустимых значений ( $\eta > 0$ ,  $h > 0$ ) как функции от переменной  $u$  ( $u > 0$ ) и параметра  $Fr = D/\sqrt{gh_0} = D > 1$ . При  $u \rightarrow 0$  в силу непрерывности решения  $h \rightarrow h_0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , но при  $\eta \rightarrow 0$  система (2.1) сильно вырождается. Предельные значения  $v_0$  находятся путем дифференцирования системы (2.1) по какой-либо переменной, например по  $h$ . Получим два случая:

- а)  $v_0 = 0$ ;
- б)  $v_0 = D$ .

Случаю *a* соответствует точное решение системы (2.1):  $h + \eta \equiv h_0$ ,  $u = v \equiv 0$ . В случае *б* поведение решения системы (2.1) на плоскости  $(u, Q)$ , где  $Q = \eta(D - v)$ , изображено на

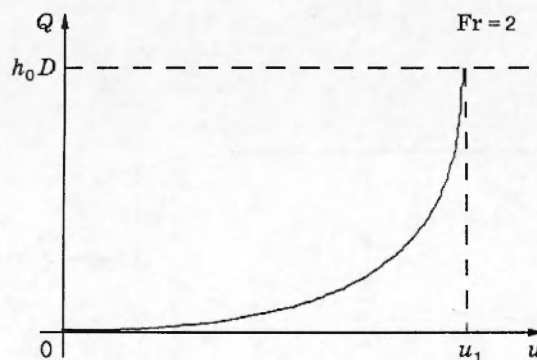


Рис. 2

рис. 2 для  $Fr = 2$ . Предельная скорость  $u_1$  реализуется в волне для значения  $Q = h_0 D$ , при котором турбулентный слой достигает дна. Вовлечение прекращается, глубина и скорость в волне остаются постоянными, а уровень турбулентности убывает, т. е. происходит вырождение турбулентности по всей глубине потока.

Остановимся более подробно на поведении среднеквадратичной скорости турбулентного движения  $q$  на переходном участке волны ( $0 < Q < h_0 D$ ). Из уравнений (2.1) следует, что переменные, входящие в эту систему, могут быть выражены как функции одной переменной, например,  $Q = \eta(D - v)$  ( $0 < Q < h_0 D$ ). Тогда неоднородные законы сохранения (1.1) приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для бегущих волн

$$Q' = -\sigma q, \quad Qq' = \frac{\sigma}{2}((1 + \delta)q^2 - f(Q)). \quad (2.2)$$

Здесь  $f(Q) = (u - v)^2(Q)$ , а штрих означает дифференцирование по переменной  $\xi$ . Решение этой автономной системы можно найти в квадратурах, так как на фазовой плоскости  $(Q, q^2)$  система (2.2) сводится к линейному уравнению

$$Q \frac{dq^2}{dQ} = f(Q) - (1 + \delta)q^2. \quad (2.3)$$

Ограниченное решение (2.3) имеет вид

$$q^2(Q) = Q^{-(1+\delta)} \int_0^Q s^\delta q(s) ds, \quad (2.4)$$

отсюда предельное значение  $q^2(0)$  на подошве волны

$$q^2(0) = f(0)/(1 + \delta).$$

В случае  $a$   $q^2 \equiv 0$  и исходное состояние невозмущено. В случае  $b$   $q^2(0) = v^2(0)/(1 + \delta) = D^2/(1 + \delta)$ .

Таким образом, перемешивание начинается у подошвы волны с постоянной скоростью. Профиль волны, задаваемый функциями  $h = h(\xi)$ ,  $\eta = \eta(\xi)$ , может быть получен в силу (2.1), (2.4) из уравнения

$$\frac{dQ}{d\xi} = \sigma q(Q).$$

Согласно (2.1) в окрестности точки  $u = 0$  справедливо представление

$$\eta = \frac{(D^2 - gh_0)u}{gD} + o(u), \quad v = D - \frac{1}{2}u + o(u), \quad Q = \frac{(D^2 - gh_0)}{2gD}u^2 + o(u^2), \quad q = D + O(u),$$

поэтому вблизи точки  $\xi = 0$ , соответствующей положению фронта, функции  $h(\xi)$ ,  $\eta(\xi)$  имеют интегрируемую особенность ( $h(\xi) \sim |\xi|^{1/2}$ ,  $\eta(\xi) \sim |\xi|^{1/2}$  при  $\xi < 0$ ).

Структура турбулентного бора в однородной жидкости для  $Fr = 2$  изображена на рис. 1 (сплошная линия представляет границы турбулентного слоя при  $\delta = 0$ , штриховая — при  $\delta = 2$ ).

При  $Fr > 1$  в турбулентном боре осуществляется непрерывный монотонный переход на новый уровень  $\eta_1$  в зоне конечной длины  $L$  ( $L = L_0$  при  $\delta = 0$ ,  $L = L_2$  при  $\delta = 2$ ). С возрастанием  $Fr$  длина переходной зоны уменьшается. Естественно, состояния перед и за волной связаны обычными для уравнений мелкой воды соотношениями, следующими из законов сохранения массы и импульса (ср. (2.1)):

$$\eta_1(v_1 - D) = -h_0 D, \quad \eta_1 v_1(v_1 - D) + \frac{1}{2} g \eta_1^2 = \frac{1}{2} g h_0^2,$$

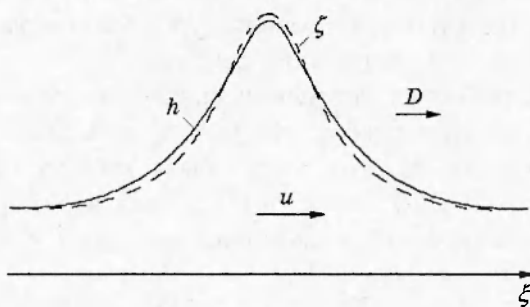


Рис. 3

в то время как уравнение энергии является дополнительным условием, позволяющим отобрать физически допустимые решения с  $q_1^2 \geq 0$ .

Суммируя сказанное выше, можно утверждать, что включение в уравнения мелкой воды эффектов перемешивания позволяет в однородной жидкости решить задачу о структуре гидравлического прыжка. Недостатком предложенной модели является гипотеза о гидростатичности распределения давления во всей зоне прыжка, не позволяющая проявиться волновому характеру перехода при числах Фруда, близких к единице. Дальнейшее развитие модели с учетом эффектов негидростатичности представлено ниже. В п. 3 выводится упрощенная по сравнению с [15] гиперболическая модель мелкой воды с учетом дисперсионных эффектов.

**3. Уравнения мелкой воды с дисперсией. Уравнения движения.** Уравнения однослойной мелкой воды выводятся для средних значений глубины  $h(t, x)$  и скорости  $u(t, x)$  однородного слоя. В пп. 1, 2 влияние поверхностных волн и перемешивания на структуру течения учитывалось путем введения турбулентной прослойки. При этом распределение давления считалось гидростатическим. Такая гипотеза справедлива для волн и вихрей, масштаб которых много меньше толщины слоя. Распространение возмущений умеренной амплитуды по покоящейся жидкости приводит к генерации за фронтом цуга волн, длина которых сравнима с толщиной однородного слоя, т. е. к возникновению волнового (ондулированного) бора, в формировании которого существенную роль играет негидростатичность распределения давления на фронте волны. Для описания структуры волнового бора используются различные варианты уравнений Буссинеска и Кортвега — де Фриза, соответствующие второму приближению уравнений мелкой воды [13]. Дисперсионные эффекты моделируются членами, содержащими производные более высокого порядка, так что второе приближение уже не задается гиперболической системой уравнений.

Гиперболическая модель диспергирующей среды возникает, когда для описания неравновесных процессов в поле силы тяжести наряду со средними характеристиками течения, такими как глубина  $h(t, x)$  и скорость  $u(t, x)$ , используются внутренние переменные, характеризующие состояние потока в данной точке (рис. 3). При этом равенства мгновенных и средних величин свидетельствуют о равновесности течения.

Пусть  $\zeta(t, x)$  — мгновенная глубина, а  $w(t, x)$  — вертикальная скорость жидкости на поверхности. Различие между средней глубиной  $h(t, x)$  (сплошная линия) и мгновенной глубиной  $\zeta(t, x)$  (штриховая линия) однородного слоя жидкости возникает в случае, когда в окрестности точки  $x$  по жидкости распространяется волна, длина которой сопоставима с пространственным масштабом осреднения, использованным для получения среднего значения  $h(t, x)$ . В осредненных уравнениях движения влияние негидростатичности рас-

пределения давления, обусловленного генерацией коротких волн на фронтах нелинейных возмущений потока, может быть смоделировано при помощи функции  $p^*$ , представляющей дефицит давления на дно, следующим образом:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gh_x + p^*_x = 0. \quad (3.1)$$

Негидростатичность распределения давления в слое жидкости приводит к необходимости привлечь уравнение импульса для вертикальной составляющей скорости для определения функции  $\zeta = \zeta(t, x)$ . В дальнейшем считаем, что  $|\zeta/h - 1| \ll 1$ . Уравнения для  $\zeta$  и вертикальной компоненты скорости на поверхности  $w$  принимают вид

$$\zeta_t + u\zeta_x = w, \quad h(w_t + uw_x) = 2p^*. \quad (3.2)$$

Здесь первое уравнение выражает кинематическое условие на поверхности жидкости, а второе получено интегрированием уравнения импульса для вертикальной компоненты скорости по всему слою с учетом условий непротекания на дне и в силу линейного распределения вертикальной компоненты скорости по глубине.

Для замыкания системы (3.1), (3.2) требуется выразить  $p^*$  через искомые переменные. В силу малости разности  $h - \zeta$  по сравнению с  $h$  и из условий равновесия  $p^*(h, h) \equiv 0$  зависимость

$$p^* = \alpha g(h - \zeta) \quad (3.3)$$

представляется достаточно общей. Роль параметра  $\alpha$  состоит в фиксации выбирасмого масштаба осреднения в модели. При  $\alpha \rightarrow 0$  система (3.1) становится независимой от (3.2) и превращается в стандартные уравнения мелкой воды. Этот предел соответствует достаточно большому масштабу осреднения, другой предел при  $\alpha \rightarrow \infty$  — уменьшению масштаба осреднения. В этом случае  $\zeta \equiv h$ , переменная  $p^*$  становится незволюционной. Полученная система равносильна одному из вариантов уравнений Буссинеска, отвечающих второму приближению уравнений мелкой воды. Таким образом, для конечных значений  $\alpha$  система (3.1)–(3.3) образует промежуточное между первым и вторым приближение мелкой воды, которое описывает дисперсионные свойства аналогично второму приближению, но сохраняет гиперболичность, как и в первом приближении. Выбор параметра  $\alpha$  в уравнениях соответствует выбору масштаба осреднения при описании волн, генерируемых на фронте нелинейного бора. Заметим, что по структуре система (3.1)–(3.3) аналогична односкоростной модели Иорданского для монодисперсной пузырьковой жидкости [16].

Характеристики системы (3.1)–(3.3) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm = u \pm \sqrt{(1 + \alpha)gh}.$$

Кроме того, существует кратная контактная характеристика

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_0 = u.$$

Равновесная система ( $h \equiv \zeta$ ) совпадает с обычными уравнениями мелкой воды, следовательно, характеристики равновесной системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_e^\pm = u \pm \sqrt{gh}.$$

Таким образом, при анализе структуры волн в модели (3.1)–(3.3) имеем дело с классической ситуацией, когда характеристики исходной и равновесной моделей чередуются:  $\lambda^- < \lambda_e^- < \lambda_0 < \lambda_e^+ < \lambda^+$ , поэтому гладкие бегущие волны (солитоны) для полной системы уравнений существуют в диапазонах скоростей  $\lambda_e^+ < D < \lambda^+$  и  $\lambda^- < D < \lambda_e^-$  (см. [13]).

Бегущие волны системы (3.1)–(3.3). Пусть решения зависят только от переменной  $\xi = x - Dt$  ( $D > 0$ ), причем при  $\xi \rightarrow \infty$  решение стремится к равновесному:  $h_0 = \zeta_0$ ,  $u_0 = w_0 = 0$ . Как и в предыдущем случае, единственным безразмерным параметром, определяющим волну, является число Фруда  $Fr = D/\sqrt{gh_0}$ . Для бегущей волны система (3.1)–(3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} (h(u - D))' &= 0, & \left(\frac{1}{2}u^2 - Du + (1 + \alpha)gh - \alpha g\zeta\right)' &= 0, \\ (u - D)\zeta' &= w, & h(u - D)w' &= 2\alpha g(h - \zeta). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной  $\xi$ . Следствием (3.4) являются соотношения

$$h(u - D) = -h_0 D, \quad \frac{1}{2}u^2 - Du + (1 + \alpha)gh - \alpha g\zeta = gh_0, \quad (3.5)$$

из которых могут быть получены зависимости  $u = u(h)$  и  $\zeta = \zeta(h)$ :

$$u(h) = \frac{D(h - h_0)}{h}, \quad \zeta(h) = h - \frac{G(h)}{\alpha g}, \quad (3.6)$$

где  $G(h) = p^*(h) = g(h - h_0) + D^2(h^2 - h_0^2)/(2h^2)$ .

Введем обозначение  $a(h) = d\zeta(h)/dh = 1 - (D^2 h_0^2/h^3 - g)/(\alpha g)$ . С учетом (3.5), (3.6) система (3.4) принимает вид

$$D^2 h_0^2 \left(\frac{a(h)}{h} h'\right)' = 2G(h). \quad (3.7)$$

Домножив уравнение (3.7) на  $a(h)h'/h$ , получаем интеграл

$$\frac{1}{2} D^2 h_0^2 \left(\left(\frac{a(h)h'}{h}\right)^2\right)' = (F(h))' = \frac{2G(h)a(h)h'}{h}. \quad (3.8)$$

Поведение функции

$$F(h) = \int_{h_0}^h \frac{2G(s)a(s) ds}{s}$$

в окрестности точки  $h_0$  определяет структуру стационарного решения (3.4). Зависимость  $F(h)$  можно представить в элементарных функциях, но для определения пределов существования солитонов достаточно выяснить качественное поведение этой функции в окрестности точки  $h_0$ . Профиль бегущей волны восстанавливается из (3.8) в квадратурах

$$\xi = \xi_0 \pm \int_{h_0}^h \frac{D h_0 a(s) ds}{s \sqrt{2F(s)}}. \quad (3.9)$$

Функция  $a(h) = d\zeta(h)/dh$  обращается в нуль в единственной точке  $h_*$ , соответствующей минимуму функции  $\zeta(h)$ . Отметим, что  $h_* > h_0$  тогда и только тогда, когда  $D > \sqrt{(1 + \alpha)gh_0}$ . Из (3.9) следует, что необходимым условием существования решения (3.8) является положительность функции  $F(h)$  в окрестности точки  $h = h_0$ . Так как

$$\frac{dF}{dh} = \frac{2\alpha g(h - \zeta(h))a(h)}{h},$$

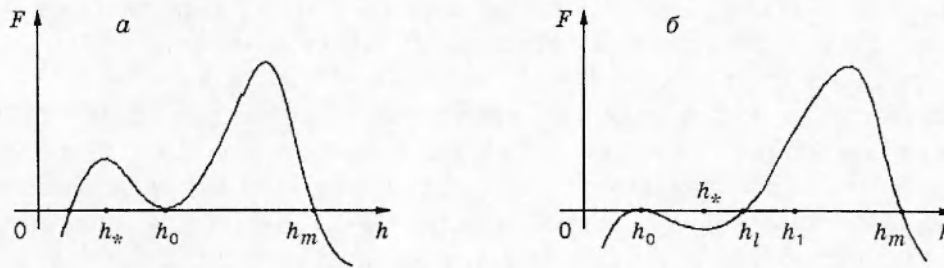


Рис. 4

то неравенство  $0 < a(h_0) < 1$ , обеспечивающее положительность функции  $F(h)$  вблизи точки  $h_0$ , выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{gh_0} < D < \sqrt{(1 + \alpha)gh_0}. \quad (3.10)$$

На рис. 4, а представлен график функции  $F(h)$  для скорости  $D$ , удовлетворяющей неравенствам (3.10). При  $h > h_0$  решение системы (3.4) представляет собой солитон, скорость распространения которого лежит в интервале между равновесной и замороженной скоростями распространения характеристик, а максимальная глубина равна  $h_m$ . Распределение средней глубины  $h(\xi)$  и мгновенной глубины  $\zeta(\xi)$  в солитоне изображено на рис. 3. Напомним, что разность  $h(\xi) - \eta(\xi)$  пропорциональна дефициту давления  $p^*$  в волне. При  $h < h_0$  поведение функции  $F(h)$  аналогично случаю  $h > h_0$ , однако эта ветвь не дает солитона, так как при переходе через точку  $h = h_*$  функция  $a(h)$  меняет знак и решение (3.9) не может быть продолжено в область  $h < h_*$ .

Гладкий солитон предельной амплитуды реализуется при  $D = \sqrt{(1 + \alpha)gh_0}$  ( $\text{Fr} = \sqrt{1 + \alpha}$ ). Для значений  $D > \sqrt{(1 + \alpha)gh_0}$  возможна только конфигурация типа прыжок — волна [16], состоящая из гидравлического прыжка (бора), переводящего слой глубины  $h_0$  в слой глубины  $h_1$  ( $h_l \leq h_1 \leq h_m$ ) при  $F(h_1) \geq 0$ , и примыкающего к нему периодического решения с минимальной глубиной  $h_l$  и максимальной глубиной  $h_m$  (рис. 4, б).

Поскольку уравнения (3.1)–(3.3) записаны в недивергентной форме, то выбор соотношений на гидравлическом прыжке, определяющих значение  $h_1$  за фронтом, представляет собой отдельную проблему. Здесь на ней останавливаться не будем, заметим только, что одновременный учет эффектов дисперсии и перемешивания (см. п. 4) позволяет построить непрерывный профиль волны и для значений  $D > \sqrt{(1 + \alpha)gh_0}$ .

**4. Уравнения мелкой воды с дисперсией и перемешиванием.** Для того чтобы объединить два подхода к моделированию эффектов перемешивания и дисперсии, развитых в пп. 2, 3, достаточно предположить, что в турбулентном слое достигается гидростатическое распределение давления за счет развитого мелкомасштабного движения. Поэтому негидростатичность проявляется только в нижнем однородном слое. Таким образом, к системе (3.1)–(3.3) фактически добавляются уравнения движения турбулентной прослойки с учетом процесса вовлечения.

*Уравнения движения.* Полная система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (\eta v)_x &= \sigma q, & u_t + uu_x + (1 + \alpha)gh_x + g\eta_x - \alpha g\zeta_x &= 0, \\ v_t + vv_x + g(h_x + \eta_x) &= \frac{\sigma q}{\eta} (u - v), & q_t + vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta} ((u - v)^2 - (1 + \delta)q^2), & & (4.1) \\ \zeta_t + u\zeta_x &= w, & w_t + uw_x &= \frac{2\alpha g(h - \zeta)}{h}. \end{aligned}$$



Система (4.1) описывает течение однородного слоя с турбулентной прослойкой. Уравнения (1.2) получаются из (4.1) предельным переходом при  $\alpha \rightarrow 0$ , а уравнения (3.1)–(3.3) — при  $\eta \rightarrow 0$  и  $\sigma = 0$ .

Несмотря на существенное расширение системы (4.1) по сравнению с (1.2), введение новых искомых переменных не влияет на гиперболичность системы. Более того, характеристики системы (4.1) совпадают с характеристиками системы уравнений двухслойной мелкой воды с плотностями  $\rho$  и  $(1 + \alpha)\rho$  в слоях (см. [14]). Введение переменных  $\zeta$  и  $w$  в систему (4.1) приводит только к появлению кратной характеристики  $dx/dt = u$ . Интересно отметить, что для однородной жидкости характеристики системы (4.1) не вырождаются, как это происходит в (1.2), так как эффективная плотность  $(1 + \alpha)\rho$  нижнего слоя уже не совпадает с плотностью  $\rho$  прослойки. Поэтому эффект негидростатичности распределения давления на фронте волны оказывает определенное стабилизирующее действие на начальных этапах развития прослойки. Далее остановимся подробнее на решении задачи о структуре бегущих волн в однородной жидкости в рамках модели (4.1).

*Структура волнового бора в однородной жидкости.* Рассмотрим бегущие волны системы (4.1). Пусть решение зависит от переменной  $\xi = x - Dt$  ( $D > 0$ ). Обозначив штрихом производную по переменной  $\xi$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} (h(u - D))' &= -\sigma q, & (\eta(v - D))' &= \sigma q, & (u - D)u' + (1 + \alpha)gh' + g\eta' - \alpha g\zeta' &= 0, \\ (v - D)v' + g(h' + \eta') &= \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), & (v - D)q' &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \delta)q^2), & & (4.2) \\ (u - D)\zeta' &= w, & h(u - D)w' &= 2\alpha g(h - \zeta). \end{aligned}$$

Требуется найти непрерывное решение (4.2), которое при  $\xi \rightarrow \infty$  имеет пределы  $h \rightarrow h_0$ ,  $\zeta \rightarrow h_0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow 0$ . Система (4.2) сильно вырождается при  $\eta \rightarrow 0$ . Следовательно, для нахождения асимптотики решения при больших значениях  $\xi$  рассмотрим полулинейную систему уравнений, полученную из (4.2) линеаризацией левой части на вырожденном решении  $h = h_0$ ,  $\zeta = h_0$ ,  $\eta = 0$ ,  $u = 0$ ,  $w = 0$ ,  $v = 0$ ,  $q = 0$ . При этом правую часть уравнений (4.2) оставим без изменений:

$$\begin{aligned} h_0\tilde{u}' - D\tilde{h}' &= -\sigma\tilde{q}, & -D\tilde{\eta}' &= \sigma\tilde{q}, & -D\tilde{u}' + (1 + \alpha)g\tilde{h}' + g\tilde{\eta}' - \alpha g\tilde{\zeta}' &= 0, \\ -D\tilde{v}' + g\tilde{h}' + g\tilde{\eta}' &= \frac{\sigma\tilde{q}(\tilde{u} - \tilde{v})}{\tilde{\eta}}, & -D\tilde{q}' &= \frac{\sigma((\tilde{u} - \tilde{v})^2 - (1 + \delta)\tilde{q}^2)}{2\tilde{\eta}}, & & (4.3) \\ -D\tilde{\zeta}' &= \tilde{w}, & -Dh_0\tilde{w}' &= 2\alpha g(\tilde{h} - \tilde{\zeta}). \end{aligned}$$

Малые возмущения основного течения отмечены знаком «~». Заметим, что относительно возмущений система (4.3) однородна, поэтому ее решениями являются функции вида

$$\tilde{h} = \hat{h}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{\zeta} = \hat{\zeta}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{\eta} = \hat{\eta}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{u} = \hat{u}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{v} = \hat{v}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{q} = \hat{q}e^{-\lambda\xi}, \quad \tilde{w} = \hat{w}e^{-\lambda\xi}$$

при подходящем положительном значении  $\lambda$ . Параметр  $\lambda$  определяется из алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda h_0\hat{u} - \lambda D\hat{h} &= \sigma\hat{q}, & \lambda D\hat{\eta} &= \sigma\hat{q}, & \lambda(D\hat{u} - (1 + \alpha)g\hat{h} - g\hat{\eta} + \alpha g\hat{\zeta}) &= 0, \\ \lambda D\hat{v} - \lambda g\hat{h} - \lambda g\hat{\eta} &= \frac{\sigma\hat{q}(\hat{u} - \hat{v})}{\hat{\eta}}, & \lambda D\hat{q} &= \frac{\sigma((\hat{u} - \hat{v})^2 - (1 + \delta)\hat{q}^2)}{2\hat{\eta}}, & & (4.4) \\ \lambda D\hat{\zeta} &= \hat{w}, & \lambda Dh_0\hat{w} &= 2\alpha g(\hat{h} - \hat{\zeta}). \end{aligned}$$

Пусть  $\sigma \neq 0$  и  $\lambda \neq 0$ . Соотношения (4.4) можно преобразовать следующим образом:

$$h_0\hat{u} - D\hat{h} = D\hat{\eta}, \quad D\hat{u} - (1 + \alpha)g\hat{h} - g\hat{\eta} + \alpha g\hat{\zeta} = 0, \quad D\hat{v} - g\hat{h} - g\hat{\eta} = D(\hat{u} - \hat{v}),$$

$$2\lambda D\hat{\eta}\hat{q} = \sigma((\hat{u} - \hat{v})^2 - (1 + \delta)\hat{q}^2), \quad \lambda D\hat{\eta} = \sigma\hat{q}, \quad \lambda^2 D^2 h_0 \hat{\zeta} = 2\alpha g(\hat{h} - \hat{\zeta}). \quad (4.5)$$

Система (4.5) нелинейна, причем тривиальным ее решением является  $\hat{h} = \hat{\eta} = \hat{\zeta} = \hat{u} = \hat{v} = \hat{q} = 0$ . Для получения спектрального соотношения на  $\lambda$ , при котором существует нетривиальное физически допустимое решение ( $\hat{\eta} > 0$ ,  $\hat{h} > 0$ ,  $\hat{\zeta} > 0$ ,  $\hat{q} > 0$ ,  $\lambda > 0$ ), достаточно выразить все искомые величины через какую-либо одну. Из (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \frac{2\alpha g\hat{h}}{2\alpha g + \lambda^2 D^2 h_0} < \hat{h}, & \hat{h} &= \frac{(gh_0 - D^2)\hat{\eta}}{D^2 - (1 + \alpha)gh_0 + \gamma}, & \hat{v} &= \frac{(gh_0 + D^2)(\hat{h} + \hat{\eta})}{2Dh_0}, \\ \hat{u} &= \hat{v} + \frac{(D^2 - gh_0)(\hat{h} + \hat{\eta})}{2Dh_0}, & \hat{q} &= \frac{\lambda D\hat{\eta}}{\sigma}, & (3 + \delta)\lambda^2 D^2 \hat{\eta}^2 - \sigma^2(\hat{u} - \hat{v})^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\gamma = 2\alpha^2 g^2 h_0 / (2\alpha g + \lambda^2 D^2 h_0)$ . Подставляя в последнее соотношение (4.6) выражение величин  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  через  $\hat{\eta}$ , приходим к уравнению на  $\lambda$

$$\frac{(D^2 - gh_0)(\gamma - \alpha gh_0)}{D^2 h_0 (D^2 - (1 + \alpha)gh_0 + \gamma)} = \frac{\lambda}{p},$$

где  $p = \pm \sigma / (2\sqrt{3 + \delta})$ . Величина  $\gamma$  в силу (4.6) также зависит от  $\lambda$ . Так как допустимым является только значение  $\lambda > 0$ , то окончательно уравнение на  $\lambda$  приобретает вид

$$\lambda^2 D^2 h_0 (D^2 - (1 + \alpha)gh_0) - \lambda p \alpha gh_0 (gh_0 - D^2) + 2\alpha g (D^2 - gh_0) = 0.$$

При  $\sigma \rightarrow 0$  ( $p \rightarrow 0$ ) получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\alpha g (D^2 - gh_0)}{D^2 h_0 ((1 + \alpha)gh_0 - D^2)}},$$

и решение типа уединенной волны (солитона) существует в диапазоне

$$gh_0 < D^2 < (1 + \alpha)gh_0, \quad (4.7)$$

как это и было показано в п. 3. При  $\sigma > 0$  в диапазоне скоростей (4.7) физически допустимое решение с  $\hat{\eta} > 0$ ,  $\hat{q} > 0$ ,  $\hat{h} > 0$ ,  $\hat{\zeta} > 0$  реализуется при  $p = \sigma / (2\sqrt{3 + \delta})$  и

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{p\alpha gh_0 (gh_0 - D^2)}{2D^2 h_0 (D^2 - (1 + \alpha)gh_0)} + \\ &+ \frac{\sqrt{p^2 \alpha^2 g^2 h_0^2 (gh_0 - D^2)^2 - 8\alpha g (D^2 - gh_0) D^2 h_0 (D^2 - (1 + \alpha)gh_0)}}{2D^2 h_0 (D^2 - (1 + \alpha)gh_0)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Используя полученную асимптотику при  $\xi \rightarrow \infty$ , можно восстановить профиль волны численным интегрированием системы (4.2). Как было отмечено выше, при  $\sigma \rightarrow 0$  и  $\eta \rightarrow 0$  волна представляет собой солитон. Для  $\sigma = 0,15$ ,  $\alpha = 1$  и  $Fr = 1,2$  профиль волны ( $h = h(\xi)$  и  $h + \eta = (h + \eta)(\xi)$ ) изображен на рис. 5 ( $a - \delta = 0$ ;  $b - \delta = 2$ ).

Как и в случае турбулентного бора ( $\alpha = 0$ ), при  $\sigma \neq 0$  прослойка достигает дна, и далее к волне примыкает равномерный поток. Однако профиль волны уже не является монотонным. Как показывают численные расчеты, гладкий волновой бор существует в диапазоне чисел Фруда  $1 < Fr < Fr_* < \sqrt{1 + \alpha}$  ( $Fr_* \sim 1,3$  для  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 0$ ). Достигая критического значения числа Фруда  $Fr_*$ , определитель системы (4.2) обращается в нуль на фронте волны, т. е. в некоторой точке течение с турбулентной прослойкой становится критическим. Продолжить решение гладким образом через критическую точку невозможно. На фронте волны возникает слабый гидравлический прыжок. Анализ характеристик показывает, что этот прыжок соответствует второй моде, при  $Fr_* < Fr < \sqrt{1 + \alpha}$

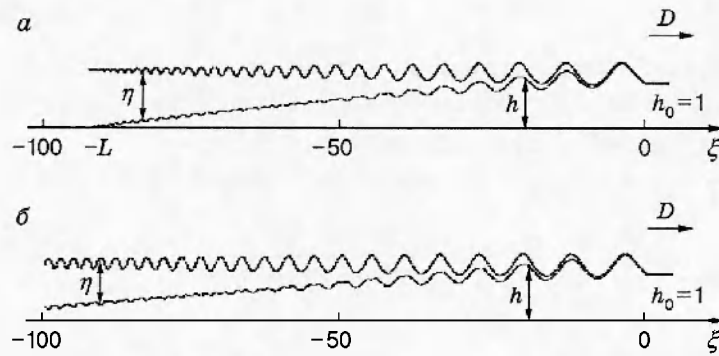


Рис. 5

он перемещается от гребня к подошве волны. Последние рассуждения носят качественный характер, так как система (4.2) записана в дифференциальной форме и для однозначного определения положения и амплитуды прыжка нужно привлекать дополнительные соотношения на разрывах. Исследование разрывных решений выходит за рамки данной работы. Отметим только, что возможность появления гидравлического прыжка (вальца) на гребне волны и перемещения его к подошве при возрастании амплитуды согласуется с наблюдаемой в лабораторных и натуральных условиях картиной обрушения первоначально гладких волн при достижении ими предельной амплитуды.

Остановимся кратко на поведении решения в отсутствие диссипации ( $\delta = 0$ ) для  $Fr > \sqrt{1 + \alpha}$ . При этих значениях числа Фруда асимптотическое поведение фронта волны меняется. Формула (4.8) уже не дает действительных значений  $\lambda$ , однако появляется решение, аналогичное по структуре турбулентному бору, рассмотренному в п. 2 для гидростатического распределения давления. Действительно, представляя решение системы (4.2) в виде функциональной зависимости искомых функций от одной функции, например скорости  $u = u(\xi)$ , получаем аналогично п. 2, что при  $u \rightarrow 0$  решение (4.2) имеет пределы  $h \rightarrow h_0$ ,  $\zeta \rightarrow \zeta_0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow 0$ , но  $v \rightarrow D$ ,  $q \rightarrow D$ . При этом

$$\left. \frac{dh}{du} \right|_{u=0} = \frac{h_0}{D}, \quad \left. \frac{d\eta}{du} \right|_{u=0} = \frac{D^2 - (1 + \alpha)gh_0}{gD}. \quad (4.9)$$

Из последнего соотношения (4.9) следует, что при  $Fr > \sqrt{1 + \alpha}$  функция  $\eta(\xi)$  должна убывать в окрестности фронта волны. Так же как и в п. 2, на фронте бора возникает интегрируемая особенность. Без ограничения общности можно считать, что фронт локализован в точке  $\xi = 0$ . В этом случае  $h \sim |\xi|^{1/2}$ ,  $\eta \sim |\xi|^{1/2}$  и зависимости  $h = h(\xi)$ ,  $\eta = \eta(\xi)$  находятся интегрированием уравнений (4.2) при  $\xi < 0$ . Как показывают численные расчеты при  $\alpha = 1$ ,  $\sigma = 0,15$ ,  $\delta = 0$ , в интервале  $\sqrt{2} < Fr < 2$  гладкого решения (4.2) не существует, так как определитель системы обращается в нуль в некоторой точке  $\xi_0 < 0$ , причем  $h(\xi_0) > 0$ . При  $Fr > 2$  может быть построено гладкое решение вплоть до достижения турбулентной прослойкой дна. На рис. 6, а, б изображен профиль волны при  $Fr = 2$  и  $Fr = 3$  соответственно.

При  $Fr < 2,5$  профиль волны не монотонный, однако при увеличении числа Фруда влияние негидростатичности распределения давления на фронте волны сказывается все меньше, и при больших значениях  $Fr$  решение приближается к структуре турбулентного бора, изученной в п. 2.

**Выводы.** Построенная модель турбулентного бора позволяет описать как нестационарный процесс развития нелинейных волн на поверхности однородной жидкости вплоть

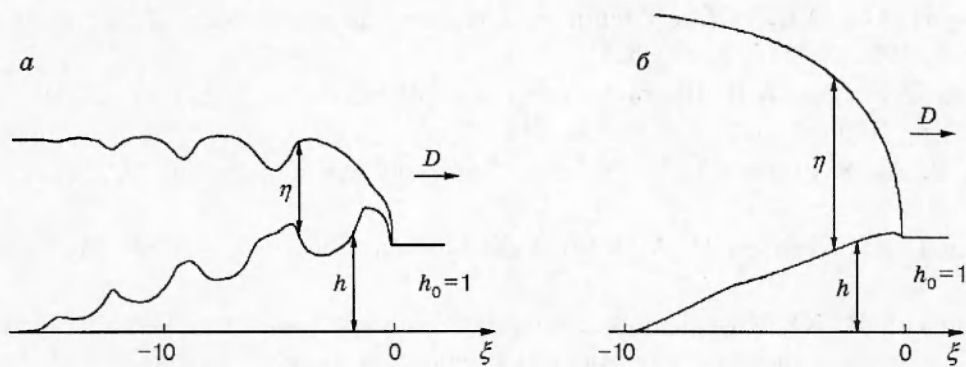


Рис. 6

до их обрушения, так и структуру бегущих волн или боров произвольной амплитуды. При малых амплитудах ( $Fr < 1,4$ ,  $\alpha = 1$ ) эффекты негидростатичности играют основную роль и формируется волновой бор. При  $Fr > 1,4$  интенсивно развивается поверхностный турбулентный слой, и при  $Fr > 2,5$  бор становится монотонным.

Непрерывное решение системы (4.2) существует при  $1 < Fr < Fr_* \sim 1,3$  и  $Fr > 2$  ( $\delta = 0$ ). В диапазоне  $1,3 < Fr < 2$  на фронте бегущей волны развивается гидравлический прыжок, предположительно соответствующий второй моде. В данной работе структура бора в этом диапазоне не рассматривалась, так как для определения положения и амплитуды гидравлического прыжка необходимо задать соотношения на разрывах. Для системы (4.1) это невозможно, так как она записана в недивергентном виде. Вопрос о влиянии диссипации на структуру бора также не затрагивался. Показано только, что при  $\delta > 0$  структура фронта турбулентного и волнового боров качественно не меняется по сравнению со случаем  $\delta = 0$ .

Следует отметить, что модель (1.1) с гидростатическим распределением давления на фронте ( $\alpha = 0$ ) является расширением модели, предложенной в [10], где уравнение энергии использовалось для определения толщины прослойки  $\eta$  в предположении о том, что производство и диссипация турбулентной энергии в верхнем слое находятся в равновесии ( $q^2 \sim (u - v)^2$ ). В модели (1.1) уравнение энергии используется для определения  $q^2$ , а для описания эволюции турбулентного слоя добавляется уравнение на  $\eta$  (последнее уравнение в (1.1)), в котором скорость вовлечения жидкости из нижнего слоя пропорциональна  $q$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Peregrine D. H., Svendsen I. A. Spilling breakers, bores and hydraulic jumps // Proc. 17th Coastal Engng. Conf. ASCE, Hamburg, 1978. V. 1. P. 540-550.
2. Battjes J. A., Sakai T. Velocity field in a steady breaker // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 421-437.
3. Nadaoka K., Hino M., Koyano Y. Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone // J. Fluid Mech. 1989. V. 204. P. 359-387.
4. Peregrine D. H. Breaking water waves // Nonlinear Topics in Ocean Physics / Ed. by A. R. Osborne. North Holland, 1989. P. 499-526.
5. Hoyt J. W., Sellin R. H. J. Hydraulic jump as «mixing layer» // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1989. V. 115, N 12. P. 1607-1614.
6. McCorquodale J. A., Khalifa A. Internal flow in hydraulic jumps // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1989. V. 109, N 5. P. 684-701.

7. **Hornung H. G., Willert C., Turner S.** The flow field downstream of a hydraulic jump // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 287. P. 299–316.
8. **Gunal M., Narayanan R.** Hydraulic jump in sloping channels // *J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1996. V. 122, N 8. P. 436–442.
9. **Madsen P. A., Svendsen I. A.** Turbulent bores and hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 129. P. 1–25.
10. **Svendsen I. A., Madsen P. A.** A turbulent bore on a beach // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 73–96.
11. **Ляпидевский В. Ю.** Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // *Лабораторное моделирование динамических процессов в океане.* Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1991. С. 87–97.
12. **Ляпидевский В. Ю.** Блокировка потока при обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью // *Прикл. математика и механика.* 1994. Т. 58, № 4. С. 108–112.
13. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
14. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
15. **Ляпидевский В. Ю.** Уравнения мелкой воды с дисперсией. Гиперболическая модель // *ПМТФ.* 1998. Т. 39, № 2. С. 40–46.
16. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР.* Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 62. С. 75–92.

*Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.*

---