

УДК 539.4:678.067

АНАЛИЗ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ РАВНОПРОЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПРОФИЛИРОВАННЫХ БАЛОК

А. Н. Полилов, Н. А. Татусь, Ш. Тянь*

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990 Москва, Россия

* Университет г. Сиань, 710049 Сиань, Китай

E-mails: polilovan@mail.ru, nikalet@mail.ru, leoxyt@hotmail.com

Рассмотрены простейшие случаи консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой, распределенной нагрузкой или собственным весом. Выделены пять геометрических параметров, оптимальные значения которых могут быть определены на основе пяти требований: по жесткости (или по накопленной упругой энергии), по прочности, по равнопрочности, по соотношению размеров сечения и по сопротивлению перерезывающей силе (условие прочности при межслойном сдвиге). Определена область изменения параметров, вне которой при использовании линейной балочной теории некорректно вычисляется прогиб равнопрочных балок при нагружении распределенными усилиями или собственным весом.

Ключевые слова: листовая пружина, профилированная балка, равнопрочная балка, прочность, жесткость, упругая энергия, оптимальная форма, композитная плоская пружина.

DOI: 10.15372/PMTF20190118

Введение. Балки равного сопротивления (равнопрочные) исследовались во многих работах [1–3], но в них, как правило, рассматривались лишь некоторые простейшие формы этих балок, удовлетворяющие условию равнонапряженности для поперечного изгиба сосредоточенной силой. Такие ограничения при изучении равнопрочных элементов обусловлены сложностью изготовления профилированных металлических балок. Наиболее широко применяются треугольные балки (рис. 1) постоянной толщины: для тарировки тензодатчиков (вследствие однородности деформации на поверхности при изгибе концевой силой), в многолистовых рессорах, в которых длина листов изменяется по линейному закону (без учета трения такие рессоры представляют собой треугольную балку со ступенчато изменяющейся шириной). Скругляя концы листов, можно уменьшить размер “ступенек”, вследствие чего многолистовая рессора будет близка по свойствам к треугольной широкой балке.

После появления волокнистых композитов интерес к равнопрочным балкам возрос, так как для изготовления “ажурной” композитной листовой пружины, в отличие от металлической, не требуются дополнительные усилия. Аналогично тому как в природе создаются профилированные или ветвящиеся равнопрочные структуры (крона дерева, плавник рыбы, крыло бабочки), так и при создании композитных конструкций методами пултрузии

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 18-08-00372, 18-58-53029) и Национального научного фонда Китая (NSFC 51575430, 51811530107).

© Полилов А. Н., Татусь Н. А., Тянь Ш., 2019

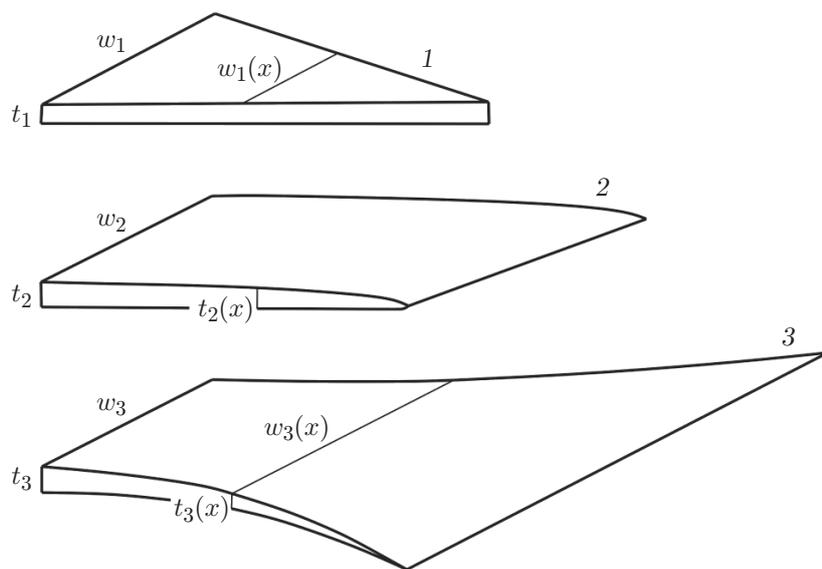


Рис. 1. Наиболее распространенные типы профилированных равнопрочных балок: 1 — треугольная, 2 — параболическая, 3 — констэра (балка с постоянной площадью поперечного сечения)

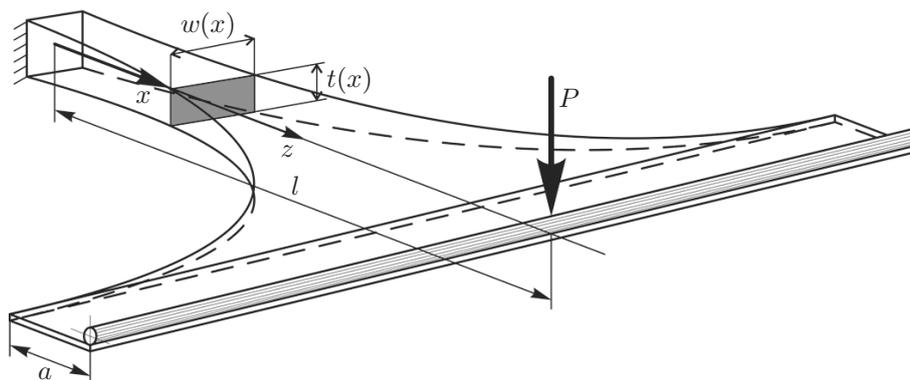


Рис. 2. Схема консольной балки констэра с концевым участком, имеющим постоянные размеры

(pulltrusion), пулформинга (pull-forming) можно сравнительно легко получить любую форму. В отличие от традиционных подходов и постановки Г. П. Черепанова задачи о получении равнопрочных конструкций [4] в данной работе балка рассматривается не только как несущий брус, но и как листовая пружина, накапливающая упругую энергию, также учитывается влияние на поведение конструкции концевых однородных участков различной (для разных типов балок) длины, определяемой заданным сопротивлением перерезывающей силе, т. е. межслойной сдвиговой прочностью.

Рассматривается простейший случай консольной балки фиксированной длины l с прямоугольным сечением, толщина t и ширина w которого полагаются переменными (рис. 2).

Рассматриваются три типа нагружения:

- 1) концевая сосредоточенная сила;
- 2) равномерно распределенная нагрузка;
- 3) собственный вес балки.

Возможны различные комбинации данных нагрузок, но простые аналитические решения для комбинированного нагружения равнопрочных балок получить не удастся. Случай нагружения сосредоточенной силой является наиболее простым и часто встречающимся. Случай равномерно распределенной нагрузки несколько сложнее и соответствует условиям нагружения строительных конструкций, ветровым нагрузкам на крону дерева и т. д. Случай нагружения собственным весом наиболее сложный.

1. Нагружение сосредоточенной силой. Нагружение сосредоточенной силой (тип 1) является наиболее простым и известным случаем. Рассмотрим равнопрочную, профилированную, нагруженную концевой силой консольную балку фиксированной длины (см. рис. 2), размеры сечения которой (ширина и толщина) полагаются изменяющимися по степенным законам, поскольку изгибающий момент также меняется по степенному закону:

$$x \leq l - a_i: \quad w_i(x) = w_i(0)(1 - x^*)^{\alpha_i}, \quad t_i(x) = t_i(0)(1 - x^*)^{\beta_i}, \quad x^* = x/l; \quad (1)$$

$$x \in [l - a_i; l]: \quad w_i(x) = w_i(l - a_i) = w_i(0)a_i^{*\alpha_i}, \quad t_i(x) = t_i(l - a_i) = t_i(0)a_i^{*\beta_i}, \quad a_i^* = a_i/l. \quad (2)$$

Здесь индекс i соответствует типу балки ($i = 0$ — прямоугольная балка с постоянными размерами сечения, $i = 1$ — балка постоянной толщины, $i = 2$ — балка постоянной ширины; $i = 3$ — балка констэра с постоянной площадью поперечного сечения).

В данной постановке при фиксированной длине l задача содержит пять параметров проектирования: начальные размеры сечения $w_i(0)$, $t_i(0)$, показатели степени α_i , β_i в законах их изменения (1) и длину концевого участка a_i . Их можно определить, если выполнены следующие пять условий:

1) по заданной жесткости C — отношению нагрузки к прогибу на конце балки (коэффициент формы по прогибу δ'_{vi} равен отношению максимального прогиба $v'_i(l)$ на конце профилированной балки к прогибу $v'_0(l)$ прямоугольной балки с теми же размерами корневого сечения $w_i(0)$, $t_i(0)$):

$$C = \frac{P}{v_i(l)} = \frac{Ew_i(0)t_i^3(0)}{4\delta'_{vi}l^3}, \quad \delta'_{vi} = \frac{v'_i(l)}{v'_0(l)} = \frac{1}{1 - \alpha_i/3 - \beta_i} \quad (3)$$

(штрих означает нагружение типа 1);

2) по прочности σ^* (способности выдержать заданную нагрузку P_{\max}):

$$\frac{6P_{\max}l}{w_i(0)t_i^2(0)} = \sigma_{\max} \leq \sigma^*; \quad (4)$$

3) по равнопрочности с учетом (1):

$$\frac{6P(l - x)}{w_i(x)t_i^2(x)} = \frac{6Pl}{w_i(0)t_i^2(0)}, \quad \alpha_i + 2\beta_i = 1. \quad (5)$$

4) по соотношению размеров сечения;

5) по сопротивлению перерезывающей силе.

Возможно бесконечное число вариантов условия 4, первые три из которых (см. рис. 1) представляются наиболее естественными:

4.1) постоянная толщина: $t_1(0) = \text{const}$, следовательно, $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ (это требование обусловлено сложностью изготовления металлических балок переменной толщины);

4.2) постоянная ширина: $w_2(0) = \text{const}$, следовательно, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1/2$ (это требование определяется габаритами детали, например рессоры в автомобиле);

4.3) постоянная площадь поперечного сечения: $w_3(x)t_3(x) = w_3(0)t_3(0)$ (это требование позволяет при изготовлении композитных балок сохранять неперерезанными постоянное число волокон по всей длине балки). В этом случае (балка констэра) из (1) следует

$$\alpha_3 + \beta_3 = 0, \quad (6)$$

Таблица 1

Параметры “идеальных” и “реальных” консольных балок при нагружении сосредоточенной силой (тип 1)

i	Тип балки	α_i	β_i	δ'_{vi}	δ'_{mi}	$\delta'_{\Sigma i}$	$\delta^*_{vi}/\delta'_{vi}$	$\delta^*_{mi}/\delta'_{mi}$	$a_i^* = a_i/l$
0	Прямоугольная	0	0	1	1	1	1	1	0
1	Треугольная ($t_1(x) = \text{const}$)	1	0	3/2	1/2	1/3	$1 - a_1^{*2}/3$	$1 + a_1^{*2}$	$A/(t_1(0)w_1(0))$
2	Параболическая ($w_2(x) = \text{const}$)	0	1/2	2	2/3	1/3	$1 - a_2^{*3/2}/2$	$1 + a_2^{*3/2}/2$	$[A/(t_2(0)w_2(0))]^2$
3	Констэра ($w_3(x)t_3(x) = \text{const}$)	-1	1	3	1	1/3	$1 - 2a_3^*/3$	1	$w_3(0)/w_*$

а из условия равнопрочности (5) —

$$\alpha_3 = -1, \quad \beta_3 = 1;$$

4.4) задана начальная ширина $w(0)$, либо начальная толщина балки $t(0)$, либо их постоянное отношение (другой размер корневого сечения определяется однозначно);

4.5) произвольный закон изменения ширины $w(x)$ или толщины $t(x)$ (закон изменения другого размера определяется из первых трех условий, при этом будет определен размер корневого сечения).

В данной работе рассматриваются условия 4.1–4.3.

Условие 5 заменим условием достижения критического значения межслойных касательных напряжений τ^* . Это условие определяет расстояние a от точки приложения силы (2), на котором площадь сечения должна быть не меньше какой-либо заданной величины, например оставаться постоянной:

$$w(l-a)t(l-a) = t(0)w(0)(a^*)^{\alpha+\beta} = \frac{3P_{\max}}{2\tau^*} = A. \quad (7)$$

В балке третьего типа (констэра) площадь сечения является постоянной, поэтому расстояние a_3 необходимо определять не через заданную площадь A , т. е. не по условию прочности на межслойный сдвиг, а через предельно допустимую ширину w_* .

Следует отметить, что нормированная длина a_i^* для различных равнопрочных балок различна, поэтому влияние их концов на жесткость также различается. Задача становится связанной по всем пяти условиям, что не позволяет определить коэффициент формы только из условия по жесткости.

Значения параметров, входящих в соотношения (1)–(7), приведены в табл. 1.

Для того чтобы было выполнено условие (3) по жесткости, необходимо рассчитать прогиб консольной балки:

$$v'(l) = \frac{P}{E} \left(\int_0^{l-a} \frac{(l-x)^2}{I(x)} dx + \int_{l-a}^l \frac{(l-x)^2}{I(l-a)} dx \right) = v_0 \delta_v^*, \quad I(x) = \frac{w(x)t^3(x)}{12}; \quad (8)$$

$$\delta_{vi}^* = \delta'_{vi} [1 - (\alpha_i + \beta_i)(a_i^*)^{3+\alpha_i+3\beta_i}]. \quad (9)$$

Масса балки вычисляется через размеры корневого сечения, законы их изменения (1), (2) и плотность ρ :

$$m(l) = \rho \left(\int_0^{l-a} w(x)t(x) dx + \int_{l-a}^l w(l-a)t(l-a) dx \right) = m_0 \delta_m^*,$$

$$\delta_m^* = \delta'_m + (1 - \delta'_m)(a^*)^{1/\delta'_m}.$$
(10)

В случае “идеальной” балки:

$$m(l) = \int_0^l \rho w(x)t(x) dx = \frac{\rho w(0)t(0)l}{1 + \alpha + \beta} = m_0 \delta'_m, \quad \delta'_{mi} = \frac{1}{1 + \alpha_i + \beta_i}.$$
(11)

Например, для балки констэра $\delta_{v3}^* = 3 - 2a/l$, $\delta_{m3}^* = \delta'_{m3} = 1$.

В (8)–(11) индекс “*” у коэффициентов формы означает, что они определены с учетом наличия участка с постоянными размерами; нижний индекс “0” соответствует прогибу (см. (8)) и массе (см. (10)) прямоугольной балки.

Требуемые размеры корневого сечения для выбранной формы балки (i) определяются из условия одновременного выполнения требований по прочности (4) и по жесткости (3) с учетом (9):

$$t_i(0) = \frac{2C\sigma^*l^2}{3EP_{\max}} \delta_{vi}^* = t_0 \delta_{vi}^*, \quad w_i(0) = \frac{27P_{\max}^3 E^2}{2\sigma^{*3} C^2 l^3 \delta_{vi}^{*2}} = \frac{w_0}{\delta_{vi}^{*2}}$$
(12)

(t_0 , w_0 — постоянные размеры сечений прямоугольной балки, параметры которой удовлетворяют условиям (3), (4)). С использованием формул (11), (12) (или (9), (10) в случае учета наличия участка с постоянными размерами) можно рассчитать минимально возможную массу “идеальной” балки:

$$m(l) = \rho w(0)t(0)l \delta_m = \frac{9\rho P_{\max}^2 E}{\sigma^{*2} C} \delta'_\Sigma.$$
(13)

Здесь $\delta'_\Sigma = \delta'_m / \delta'_v$ — коэффициент уменьшения массы профилированной балки по сравнению с прямоугольной. Из (13) следует, что масса балки зависит не только от прочности (которая у стали и однонаправленного стеклопластика приблизительно одинакова) и плотности ρ (которая у стеклопластика в три раза меньше, чем у стали), но и от модуля упругости E (для стали $E = 210$ ГПа, для стеклопластика $E = 45$ ГПа). Поэтому стеклопластик является наиболее эффективным материалом, используемым при изготовлении упругих элементов конструкций (масса стеклопластиковой рессоры может быть приблизительно в 15 раз меньше массы стальной рессоры).

С учетом условия равнопрочности (5) из (13) следует $\alpha + 2\beta = 1$. При нагружении концевой силой любых равнопрочных балок с заданными прочностью и жесткостью коэффициент уменьшения массы постоянен:

$$\delta'_\Sigma = \frac{3 - \alpha - 3\beta}{3(1 + \alpha + \beta)} = \frac{1}{3}.$$
(14)

Этот случай является предельным, поскольку большего уменьшения массы за счет изменения формы достичь нельзя. Для учета влияния концов балки следует использовать уточненную формулу

$$\delta_\Sigma^* = \delta_m^* / \delta_v^*.$$
(15)

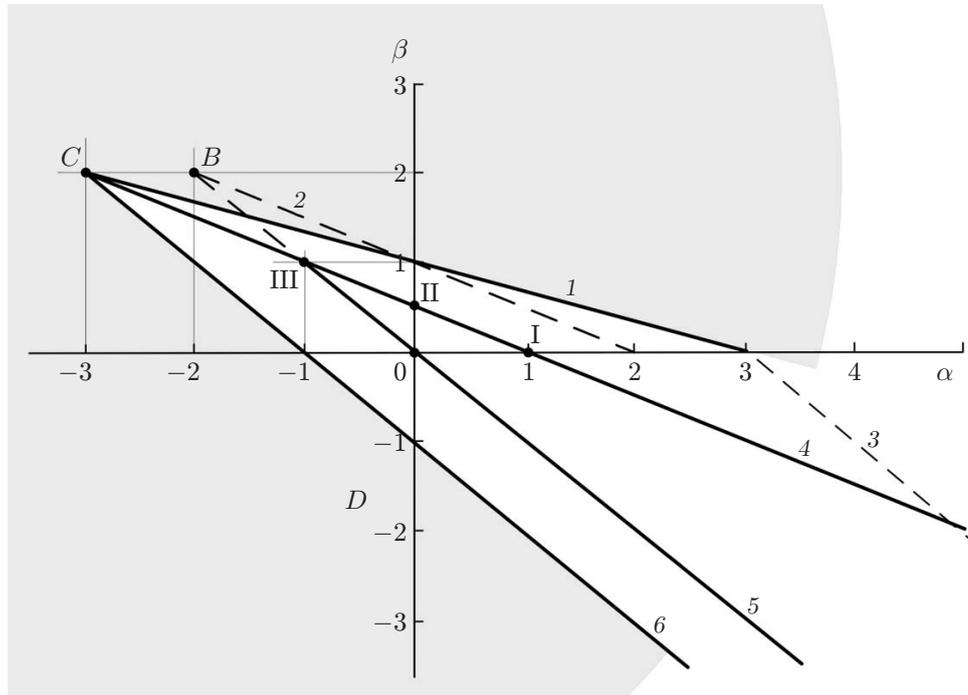


Рис. 3. Допустимая область изменения размеров сечения для консольных балок, нагруженных концевой сосредоточенной силой:

1 — $\alpha + 3\beta = 3$ ($v = \text{const}$), 2 — $\alpha + 2\beta = 2$, 3 — $\alpha + \beta = 3$ ($m = \text{min}$), 4 — $\alpha + 2\beta = 1$, 5 — $\alpha + \beta = 0$ (балка констэра), 6 — $\alpha + \beta = -1$ ($m = \infty$)

Случай силы, приложенной на конце балки, представляется простым, но даже для него не все равнопрочные проекты могут быть реализованы. На рис. 3 приведена область изменения параметров в допустимых проектах. Начало координат соответствует прямоугольной балке. Прямая 4, построенная по уравнению (5), соответствует множеству равнопрочных проектов: точки I, II соответствуют треугольной и параболической балкам. Прямые 5, 6 (и любые другие с тем же углом наклона) соответствуют проектам балок с равной массой, причем прямая 5 — балкам констэра с той же массой, что и у прямоугольной балки. Точка III соответствует равнопрочной балке констэра. Точки, лежащие на прямых, расположенных ниже прямой 5, соответствуют проектам более тяжелых балок, точки, лежащие ниже прямой 6, не соответствуют проектам реальных балок, так как их масса обращается в бесконечность. Точка $C(-3; 2)$, в которой пересекаются прямые 6 и 4, соответствует предельному проекту “бесконечно” тяжелой равнопрочной балки. Прямые, параллельные прямой 1, соответствуют проектам с одним и тем же коэффициентом формы по прогибу. Чем ниже подобные прямые относительно прямой 1, тем больше жесткость балки. Прямая 1 ограничивает область допустимых проектов сверху. Точки, лежащие на этой прямой, соответствуют прогибу, обращаемому в бесконечность, а точки, лежащие выше нее, — отрицательному прогибу. Прямая, параллельная прямой 5 (для балок с одинаковым весом), не может находиться выше точки $\alpha = 3, \beta = 0$, и прямая 3 пересекает прямую равнопрочности (прямую 4) в точке $(5; -2)$, которая соответствует проекту равнопрочной балки с коэффициентами формы по массе $\delta_m = 1/4$ и по прогибу $\delta_v = 3/4$, но коэффициент уменьшения массы в (14) остается прежним: $\delta_\Sigma = 1/3$.

Таким образом, прямые 1 и 6 являются границами сектора допустимых проектов. Можно утверждать, что вне этого сектора проекты, полученные в балочном приближении, будут содержать расходящиеся интегралы. Следует отметить, что при нагружении типа 1

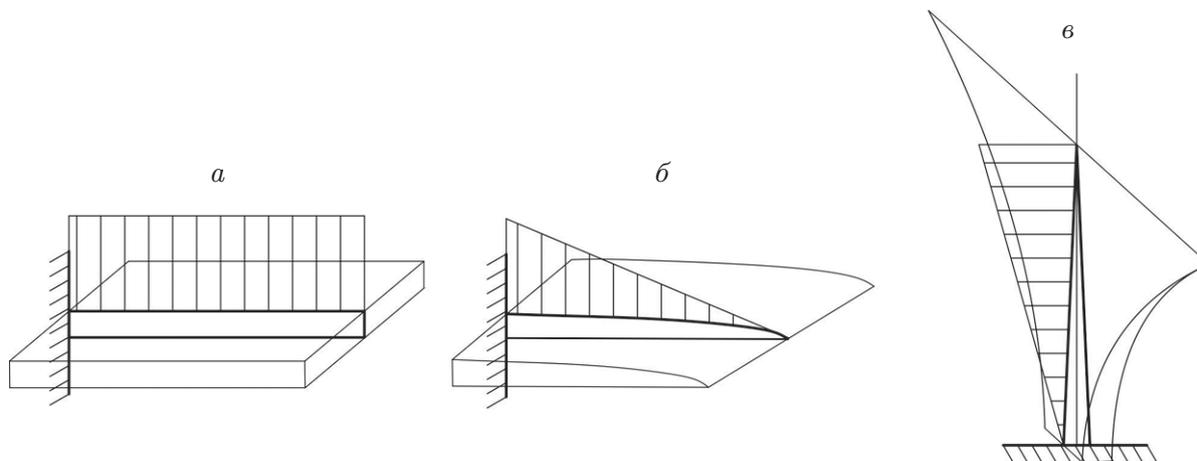


Рис. 4. Виды распределенной нагрузки:
a — равномерная, *б* — собственный вес профилированной балки, *в* — ветровая нагрузка, например, на крону дерева

отсутствует необходимость дополнительно рассчитывать запасенную упругую энергию: она равна половине произведения силы и прогиба, в то время как при нагружении типа 2 или 3 требуется интегрировать работу распределенной силы или веса на переменном прогибе вдоль всей длины балки. В этих случаях перемещение конца балки не определяет накопленную энергию, как при нагружении типа 1.

2. Равномерно распределенная нагрузка. Виды распределенной нагрузки (тип 2) представлены на рис. 4. Рассматривается балка заданной длины l , имеющая прямоугольное сечение с переменными толщиной $t(x)$ и шириной $w(x)$, изменение которых происходит по степенному закону (1), поскольку изгибающий момент также меняется по степенному закону. Случаи переменной распределенной нагрузки не описываются уравнениями (1). Условие равнопрочности (5) для равномерной нагрузки принимает вид

$$\frac{p(l-x)^2}{w(x)t^2(x)} = \frac{pl^2}{w(0)t^2(0)}, \quad \alpha + 2\beta = 2. \quad (16)$$

Перерезывающая сила на конце балки равна нулю, поэтому концевые участки с увеличенной площадью сечения рассматривать не требуется и пятое условие (как и пятый параметр проектирования) учитывать необязательно. Таким образом, остаются четыре параметра проектирования: два размера корневого сечения $w(0)$, $t(0)$ и два параметра α , β (см. зависимости (1), (16) условия 4.1–4.3). Условие по прочности (4) принимает вид ($P_{\max} = p_{\max}l$)

$$\frac{3P_{\max}l}{w_i(0)t_i^2(0)} = \sigma_{\max} \leq \sigma^*. \quad (17)$$

Для того чтобы было выполнено условие по жесткости (3), нужно найти прогиб на конце балки, для чего следует дважды проинтегрировать линеаризованное уравнение изгиба:

$$EI(x) \frac{d^2v''(x)}{dx^2} = \frac{l^2}{2} p(1-x^*)^2, \quad z^* = \frac{z}{l} \in [0; x^*],$$

$$\frac{dv''(x)}{dx} = \frac{6pl^3}{Ew(0)t^3(0)} \int_0^{x^*} \frac{(1-z^*)^2}{(1-z^*)^{\alpha+3\beta}} dz^*,$$

Таблица 2

Параметры “идеальных” равнопрочных консольных балок при нагружении равномерной нагрузкой (тип 2)

i	Тип балки	α_i	β_i	δ''_{vi}	δ''_{mi}	$\delta''_{\Sigma i}$	δ''_{U_i}	δ''_{S_i}
1	Квадратичная по ширине ($t(x) = \text{const}$)	2	0	2	1/3	1/6	5/3	1/5
2	Линейная по высоте ($w(x) = \text{const}$)	0	1	4	1/2	1/8	5/2	1/5
3	Констэра ($w(x)t(x) = \text{const}$)	-2	2	∞^*	1	0*	5	1/5

* Знаки “ ∞ ” и “0” означают, что точка B с координатами $\alpha_3'' = -2$; $\beta_3'' = 2$ находится за пределами допустимого сектора на рис. 3, т. е. анализ прогиба в балочном приближении становится некорректным.

$$v''(x) = \frac{6pl^4}{Ew(0)t^3(0)(3 - \alpha - 3\beta)} \int_0^{x^*} [1 - (1 - z^*)^{3-\alpha-3\beta}] dz^* = \quad (18)$$

$$= \frac{2pl^4}{Ew(0)t^3(0)\delta'_v} \left(x^* + \frac{(1 - x^*)^{4-\alpha-3\beta} - 1}{4 - \alpha - 3\beta} \right),$$

$$\frac{v''_i(l)}{v''_0(l)} = \delta''_{vi} = \frac{1}{1 - \alpha_i/4 - 3\beta_i/4}.$$

Здесь величины с двумя штрихами соответствуют равномерно распределенной нагрузке; δ''_{vi} — отношение прогиба равнопрочной балки к прогибу прямоугольной балки, имеющей такие же размеры корневого сечения и находящейся под действием такой же распределенной нагрузки. Так же как в случае концевой силы, можно записать выражение для условной жесткости равномерно нагруженной балки

$$C = \frac{pl}{v''(l)_i} = \frac{2Ew_i(0)t_i^3(0)}{3\delta''_{vi}l^3}. \quad (19)$$

Показатели степенных зависимостей (1), коэффициенты формы по прогибу (18) и по массе (11) для трех рассматриваемых типов равнопрочных балок приведены в табл. 2. Условия по прочности (17) и жесткости (19) совпадают с (4) и (3) с точностью до констант, поэтому имеют место формулы (12) и аналогично (13) минимальная масса равномерно нагруженной равнопрочной балки при заданной жесткости определяется по формуле

$$m(l) = \rho w(0)t(0)l\delta_{mi} = \frac{6\rho p_{\max}^2 l^2 E}{\sigma^* 2C} \delta''_{\Sigma i}, \quad \delta''_{\Sigma i} = \frac{\delta''_{mi}}{\delta''_{vi}}. \quad (20)$$

Однако в отличие от коэффициента $\delta''_{\Sigma i}$ (см. (14)) коэффициент $\delta''_{\Sigma i}$ снижения массы (20) при заданном прогибе не является постоянным для равномерно нагруженных равнопрочных балок (см. табл. 2).

При равномерном нагружении целесообразно задавать не жесткость, выраженную через максимальный прогиб, а накопленную при изгибе упругую энергию. При нагружении

сосредоточенной силой типа 1 максимально возможная накопленная упругая энергия равна половине произведения силы и максимального прогиба: $2U = P_{\max}v(l)$ и однозначно определяется через заданную жесткость C :

$$2U = P_{\max}^2/C = Cv_0^2\delta_v'^2.$$

При нагружении типа 2 упругая энергия равна работе распределенной нагрузки на переменном прогибе и вычисляется в результате интегрирования выражения (18):

$$U = \frac{3p^2l^5}{10Ew(0)t^3(0)(1 - \alpha_i/5 - 3\beta_i/5)} = U_0''\delta_{U_i}'' \quad (21)$$

Отношение накопленной энергии в равнопрочной балке к энергии в подобной прямоугольной балке δ_{U_i}'' следует использовать в (20) вместо δ_{v_i}'' . Тогда выражение для коэффициента уменьшения массы при заданной упругой энергии для равнопрочных балок (16) ($\alpha + 2\beta = 2$) записывается в виде

$$\delta_{S_i}'' = \frac{\delta_{m_i}''}{\delta_{U_i}''} = \frac{5 - \alpha - 3\beta}{5(1 + \alpha + \beta)} = \frac{3 - \beta}{5(3 - \beta)} = \frac{1}{5}. \quad (22)$$

Как следует из табл. 2, противоречия, возникающие при расчете прогиба профилированных балок, устраняются при проведении интегральной оценки накопленной упругой энергии. В этом случае коэффициенты уменьшения массы (22) различных равнопрочных балок, как и в (14), становятся одинаковыми. При одном и том же значении накопленной упругой энергии масса равномерно нагруженных равнопрочных балок в пять раз меньше массы прямоугольных балок с той же прочностью.

3. Равнопрочная тяжелая балка. Случай равнопрочной тяжелой балки (тип 3) является наиболее сложным, так как отсутствует метод построения аналитического решения подобных задач. В соответствии с работой [4] рассмотрим три типа равнопрочных консольных балок.

3.1. *Балка постоянной толщины:* $t_1(x) = t_1(0)$. Зададим условие, чтобы возникающий при действии собственного веса изгибающий момент $M(x)$ создавал в каждом сечении одинаковые максимальные напряжения, например равные пределу пропорциональности (прочности) σ^* :

$$\sigma^*w_1(x)t_1^2(0) = 6\rho t(0) \int_l^x w_1(z)(z - x) dz, \quad k^2w_0(x) = \int_l^x w_0(z)(z - x) dz = I_1, \quad (23)$$

$$k^2 = \sigma^*t_1(0)/(6\rho), \quad w_1(x) = w_1(0)w_0(x)$$

(ρ — удельный вес материала).

Ширина балки определяется из условия равнопрочности (23) с точностью до константы, поэтому размеры корневого сечения, как и в пп. **1, 2**, следует определять из условий по прочности и жесткости (или по накапливаемой упругой энергии). Продифференцируем дважды интеграл в правой части (23):

$$\frac{dI_1}{dx} = \left(\int_l^x w_1(z)z dz \right)' - \left(x \int_l^x w_1(z) dz \right)' = - \int_l^x w_1(z) dz, \quad \frac{d^2I_1}{dx^2} = -w_1(x). \quad (24)$$

Из (23), (24) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$k^2w_0''(x) = -w_0(x), \quad (25)$$

Таблица 3

Параметры равнопрочных консольных балок,
нагруженных собственным весом (тип 3)

i	Тип балки	α_i	β_i	δ'''_{vi}	δ'''_{mi}	$\delta'''_{\Sigma i}$	δ'''_{U_i}	δ'''_{S_i}
1	Линейная по ширине ($t(x) = \text{const}$)	≈ 1	0	$\approx 1/3$	$\approx 1/2$	$\approx 3/2$	$\approx 1/20$	$\approx 5,4$
2	Квадратичная по толщине ($w(x) = \text{const}$)	0	2	∞^*	1/3	0*	$\approx 1/22$	$\approx 7,2$
3	Констэра ($w(x)t(x) = \text{const}$)	-2	2	∞^*	1	0*	5	1/5

* Знаки " ∞ " и "0" означают некорректность определения максимального прогиба.

решение которого должно удовлетворять естественному граничному условию

$$w_0(l) = 0, \quad w_0(x) = \sin((l-x)/k). \quad (26)$$

Из условия прочности (23) можно определить необходимую толщину балки. Используя закон изменения ширины (26), получаем трансцендентное уравнение, анализ приближенного решения которого позволяет сделать вывод, что $t(0) \sim \rho l^2 / \sigma^*$, т. е. чем длиннее тяжелая балка, чем больше ее удельный вес и меньше прочность, тем бóльшая толщина необходима для предотвращения разрушения под действием собственного веса. Соотношение (26) можно привести к степенной зависимости. Заметим, что коэффициент $k = \sqrt{\sigma^* t(0) / (6\rho)}$ в (23) имеет размерность длины. Принимая для балки из стеклопластика приближенные значения $\sigma^* = 1000$ МПа, $t = 0,04$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $l = 0,8$ м, $l/k \approx 0,04$, изменение ширины можно полагать линейным, так как с точностью до малых более высокого порядка

$$w_0(x) \sim \sin \frac{l-x}{k} \approx \frac{l-x}{k}. \quad (27)$$

Тогда расчет прогибов и массы существенно упрощается (табл. 3).

Значения коэффициента формы по массе приведены в табл. 3, кроме того, его можно оценить из (26) или (27):

$$\delta'''_{m1} = \frac{m(l)}{m_0} = \frac{\rho t(0)}{\rho l t(0) \sin(l/k)} \int_0^l \sin\left(\frac{l-x}{k}\right) dx = \frac{k(1 - \cos(l/k))}{l \sin(l/k)} \approx \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Следует отметить, что на решение (28) оказывает влияние знак момента в (23). На первый взгляд, он должен влиять лишь на знак напряжений (растяжение или сжатие), но в линейной постановке они эквивалентны. Однако если в уравнении (23) выбрать противоположный знак, то получим отличное от (26) решение

$$k^2 w_0(x) = \int_l^x w_0(z)(z-x) dz, \quad k^2 w_0''(x) = w_0(x), \quad w_0(x) = \exp\left(\frac{l-x}{k}\right) - 1. \quad (29)$$

При малых значениях отношения l/k выражение (29) можно приближенно заменить линейным выражением (27).

Чтобы оценить влияние равнопрочной формы на прогиб балки под действием собственного веса, следует дважды проинтегрировать уравнение изгиба (18):

$$\frac{Ew(0)t^3(0)}{12} (1-x^*)^{\alpha+3\beta} \frac{d^2v'''(x)}{dx^2} = \rho w(0)t(0) \int_x^l (z-x)(1-z^*)^{\alpha+\beta} dz. \quad (30)$$

Для расчета накапливаемой при таком изгибе упругой энергии нужно еще раз проинтегрировать произведение локального прогиба и переменного по длине веса балки:

$$U_i''' = \frac{1}{2} \rho w(0)t(0) \int_0^l v'''(z)(1-z^*)^{\alpha+\beta} dz,$$

а затем сравнить эту энергию с энергией изгиба тяжелой прямоугольной балки с постоянным сечением. В результате получаем

$$v_0'''(x) = A_1[4l^3x + (l-x)^4 - l^4]/2, \quad v_0'''(l) = 3A_1l^4/2, \\ U_0''' = 3\rho^2l^5w(0)/(10Et(0)), \quad U_0'''/m_0''' = 0,3A_1l^4, \quad A_1 = \rho/(Et^2(0)).$$

В общем случае изменения размеров сечения по степенному закону решение является весьма громоздким и в данной работе не приводится. Сравнить это решение с решением задачи о профилировании при внешней нагрузке (см. табл. 1, 2) не удастся: профилированная тяжелая балка может накапливать меньшую упругую энергию, чем прямоугольная балка с теми же размерами корневого сечения. В данной работе рассматриваются балки типов 1, 2, 3 (см. табл. 2).

В случае равнопрочной тяжелой балки постоянной толщины (балка типа 1) с линейным изменением ширины (27) уравнение (30) принимает вид

$$\frac{Et^2(0)}{12\rho} (l-x) \frac{d^2v_1'''(x)}{dx^2} = \int_x^l (z-x)(l-z) dz = \frac{(l-x)^3}{6}, \quad A_1 = \frac{\rho}{Et^2(0)},$$

$$\frac{dv_1'''(x)}{dx} = \frac{2A_1[l^3 - (l-x)^3]}{3}, \quad v_1'''(x) = \frac{A_1[4l^3x - l^4 + (l-x)^4]}{6},$$

$$v_1'''(l) = A_1l^4/2, \quad \delta_{v_1}''' = 1/3,$$

$$U_1''' = \frac{1}{2} \frac{\rho w(0)t(0)}{l} \int_0^l (l-x)v_1'''(x) dx = \frac{\rho^2l^5w(0)}{72Et(0)},$$

$$\frac{U_1'''}{m_1'''} = \frac{A_1l^4}{36}, \quad \delta_{U_1}''' = \frac{U_1'''}{U_0'''} = \frac{5}{108}, \quad \delta_{S_1}''' = \frac{m_1'''}{m_0'''} \frac{U_0'''}{U_1'''} = \frac{54}{10}.$$

3.2. *Балка постоянной ширины:* $w(x) = w(0)$. Условие равнопрочности аналогично условию (23):

$$\sigma^* w_2(0)t_2^2(x) = 6\rho w(0) \int_x^l t_2(z)(z-x) dz.$$

Дважды продифференцировав (30), получаем уравнение

$$(t^2)'' = 2[t'^2 + t(x)t''] = k_1t(x), \quad k_1 = 6\rho/\sigma^* \quad (31)$$

(штрих обозначает дифференцирование).

Путем подстановки можно показать, что уравнению (31) удовлетворяет степенная функция

$$t(x) = a(l-x)^\beta, \quad (l-x)^{2\beta-2}a[\beta^2 + \beta(\beta-1)] = k_1(l-x)^\beta/2, \\ \beta = 2, \quad a = k_1/12, \quad t(x) = \rho(l-x)^2/(2\sigma^*).$$

Точка $(0; 2)$ находится вне области допустимых значений параметров α, β (см. рис. 3), поэтому при оценке прогиба появляются расходящиеся интегралы. Такая балка постоянной ширины подобна листу бумаги или жести: ее прогибы нельзя считать малыми ни при каких значениях удельного веса и модуля Юнга.

Прогиб и энергия прогиба тяжелой балки постоянной ширины (квадратичной по толщине) вычисляются путем последовательного интегрирования:

$$\frac{Et^2(0)(1-x^*)^6}{12\rho l^2} \frac{d^2v_2'''(x)}{dx^2} = \int_{x^*}^1 (1-z^*)^2(z^*-x^*) dz^* = \frac{(1-x^*)^4}{12}, \\ \frac{d^2v_2'''(x)}{dx^2} = A_1 l^2 (1-x^*)^{-2}, \quad \frac{dv_2'''(x)}{dx} = A_1 l^3 \left(\frac{1}{1-x^*} - 1 \right), \quad A_1 = \frac{\rho}{Et^2(0)}, \\ v_2'''(x) = A_1 l^4 [-\ln(1-x^*) - x^*] \xrightarrow{x \rightarrow l} \infty,$$

$$U_2''' = \frac{\rho w(0)t(0)}{2} \int_0^l (1-x^*)^2 v_2'''(x) dx = \frac{\rho^2 l^5 w(0)}{72 Et(0)}, \quad 1-x^* = y,$$

$$\int_0^1 (1-x^*)^2 [-\ln(1-x^*) - x^*] dx^* = \frac{1}{3} \left(y^3 \ln y - \frac{y^3}{3} \right)_1^0 - \int_1^0 (y^3 - y^2) dy = \frac{1}{36},$$

$$\frac{U_2'''}{m_2'''} = \frac{A_1 l^4}{24}, \quad \delta_{U_2}''' = \frac{U_2'''}{U_0'''} = \frac{5}{108}, \quad \delta_{S_2}''' = \frac{m_2'''}{m_0'''} \frac{U_0'''}{U_2'''} = \frac{36}{5}.$$

Согласно данным табл. 3, для того чтобы в балке накопилась такая же энергия, как и при изгибе балки только под действием собственного веса, надо увеличить вес равнопрочных балок типа 1 и 2 в 5–7 раз по сравнению с прямоугольной балкой и приблизительно в 30 раз по сравнению с балкой констэра.

3.3. Равнопрочная тяжелая балка констэра. Равнопрочная тяжелая балка констэра с постоянной площадью сечения эквивалентна балке, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (см. п. 2). Для такой балки линеаризованное уравнение изгиба не позволяет определить прогиб, можно лишь оценить упругую энергию, накапливаемую при изгибе под действием собственного веса. Заметим, что данные табл. 3 некорректно сравнивать с данными табл. 1, 2. Балка, изгибаемая под действием собственного веса, не является листовой пружиной, накапливающей упругую энергию работы внешней силы. Поэтому прогиб под действием собственного веса и накапливаемая энергия более легких равнопрочных балок значительно меньше, что приводит к уменьшению частоты собственных колебаний по первой изгибной форме.

4. Обсуждение результатов. Появление расходящихся интегралов при вычислении прогибов балок не означает, что подобные профилированные балки нельзя создать. Этот результат обусловлен тем, что задача решается в “трижды линейной” постановке.

Во-первых, гипотеза плоских сечений является допущением, справедливость которого обоснована для балок, имеющих длину, во много раз превышающую толщину и ширину.

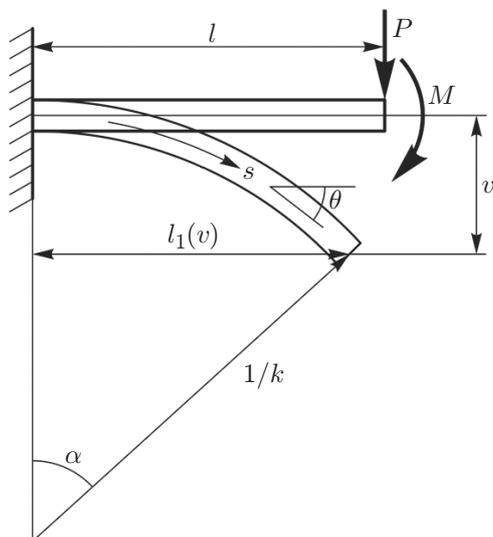


Рис. 5. Схема балки, изогнутой по дуге окружности

Для широких пластин (балка констэра) более адекватна гипотеза прямых нормалей: под действием распределенной нагрузки пластина может не иметь форму цилиндрического изгиба, а деформироваться в сложную поверхность ненулевой кривизны. Использование гипотезы о линейном распределении нормальных напряжений приводит к параболическому закону изменения касательных напряжений (7), но наличие в балке касательных напряжений, вызванных действием перерезывающих сил, обуславливает появление сдвигов, искажающих первоначально плоское сечение. Это противоречие обычно устраняется за счет предположения об относительной малости касательных напряжений по сравнению с нормальными. В отличие от изотропных металлов для полимерных композитов с малым модулем сдвига межслойного материала наличие касательных напряжений приводит к искажению плоского сечения и появлению дополнительного прогиба [5–7].

Во-вторых, в уравнении изгиба (18) нужно использовать точное выражение для кривизны нейтральной линии

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Пренебрегать производной от прогиба можно лишь в случае малых углов поворота сечений, что невозможно при больших прогибах.

В-третьих, необходим учет изменения плеча силы по мере увеличения прогиба балки. Для того чтобы получить приближенную оценку, можно считать, что балка изогнута по дуге окружности (рис. 5). Это предположение справедливо лишь при нагружении моментом. Угол $\alpha = lk$ определяется отношением длины дуги l к радиусу кривизны $1/k$, и его можно выразить через прогиб:

$$v = \frac{1 - \cos \alpha}{k} \approx \frac{kl^2}{2}$$

или через плечо силы P :

$$\frac{l_1(\alpha)}{l} = \frac{\sin kl}{kl} \approx 1 - \frac{(kl)^2}{6}.$$

При использовании этого уточненного подхода в решении появляются табулированные эллиптические интегралы. В данной работе этот подход не рассматривается.

5. Выводы. При заданной накопленной упругой энергии масса равнопрочной балки в три раза меньше массы прямоугольной балки при нагружении концевой силой и в пять раз меньше при равномерно распределенной нагрузке. При изменении изгибающего момента по произвольному степенному закону $M \sim (l - x)^\gamma$ коэффициент K уменьшения массы определяется формулой $K = 1 + 2\gamma$.

Существует область применимости линейных моделей при проектировании профилированных композитных балок. Использование балочного приближения приводит к некорректным результатам для равнопрочных балок с достаточно быстро изменяющимися размерами сечений.

В общем случае нагружения профилированных балок необходимо использовать точное выражение для кривизны и учитывать уменьшение изгибающего момента по мере увеличения прогиба или оценивать не прогибы, а накопленную упругую энергию, определение которой всегда корректно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полилов А. Н., Татусь Н. А., Шабалин В. В. Особенности проектирования упругих элементов в виде профилированных композитных балок // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 34–41.
2. Полилов А. Н., Плитов И. С., Татусь Н. А. Компьютерное моделирование рациональной структуры криволинейного армирования профилированных композитных элементов // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2013. № 4. С. 73–79.
3. Полилов А. Н., Татусь Н. А., Плитов И. С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2013. № 5. С. 58–67.
4. Черепанов Г. П. Равнопрочный тяжелый брус: решение проблемы Галилея // Физ. мезомеханика. 2016. Т. 19, № 1. С. 84–88.
5. Полилов А. Н. Экспериментальная механика композитов: Учеб. пособие для техн. ун-тов. М.: Моск. гос. техн. ун-т, 2015.
6. Полилов А. Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015.
7. Полилов А. Н. Биомеханика прочности волокнистых композитов / А. Н. Полилов, Н. А. Татусь. М.: Физматлит, 2018.

*Поступила в редакцию 27/IV 2018 г.,
после доработки — 27/IV 2018 г.
Принята к публикации 28/V 2018 г.*