Теплофизика и аэромеханика, 2022, том 29, № 2

УДК 532.517.4

Численное моделирование динамики зоны турбулентного смешения ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде

Н.П. Мошкин[1,2], А.В. Фомина[3], Г.Г. Черных[2,4]

[1]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

[2]*Новосибирский государственный университет*

[3]*Кузбасский гуманитарно-педагогический институт Кемеровского государственного университета, Новокузнецк*

[4]*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*

E-mails: nikolay.moshkin@gmail.com, fav@rdtc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Построена численная модель динамики плоской локализованной области турбулентных возмущений ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде, основанная на математической модели, включающей в себя дифференциальные уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений и алгебраические представления компонент вектора турбулентного потока скаляра. Рассмотрена эволюция нагретого турбулентного пятна. Наличие ненулевой плавучести приводит к увеличению размеров турбулентного пятна и генерации внутренних волн большей амплитуды по сравнению с турбулентным пятном нулевой плавучести. Порождение суммарной энергии турбулентности незначительно даже в случае, когда начальная потенциальная энергия турбулентного пятна ненулевой плавучести сопоставима с начальной суммарной энергией турбулентности в нем.

Ключевые слова: зона турбулентного смешения ненулевой плавучести, линейно стратифицированная среда, полуэмпирические модели турбулентности, численное моделирование.

Введение

Эволюция локализованных областей турбулизованной жидкости (пятен турбулентности) оказывает определяющее влияние на формирование тонкой микроструктуры гидрофизических полей в океане [1]. Достаточно подробный анализ исследований динамики турбулентных пятен в покоящейся жидкости можно найти в работах [2–10]. В [2] было проведено качественное экспериментальное исследование динамики плоской локализованной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной среде. Некоторые количественные экспериментальные данные были получены в однородной [4] и стратифицированной [6] жидкостях. В работах [3, 5] на основе построенной математической модели, включающей уравнение баланса энергии турбулентности, было выполнено численное моделирование эволюции плоской локализованной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной среде. В работах [7, 8] с целью более детального описания процесса вертикального турбулентного обмена применялась математическая модель турбулентности, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. Авторами [8] было показано, что при больших временах вырождения воздействие турбулентности на поле осредненной плотности прекращается и внутренние волны развиваются далее независимо от характеристик турбулентности. Результаты расчетов фазовой картины генерируемых при эволюции зоны турбулентного смешения внутренних волн для одного из моментов времени были сопоставлены с экспериментально измеренной фазовой картиной, приведенной в работе [6], и получено удовлетворительное количественное согласование.

В ряде работ (см., например, [9, 10]) изучение турбулентного следа за самодвижущимся телом в стратифицированной жидкости сводилось к модельной задаче об эволюции плоской зоны турбулентного смешения (турбулентного пятна). В работе [9] такое приближение получило обоснование путем проведения численных экспериментов с полуэмпирическими моделями турбулентности второго порядка, включая модели с дифференциальными уравнениями переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений и усовершенствованные алгебраические представления компонент вектора турбулентного потока скаляра. Течение в следе рассчитывалось здесь также и в полной постановке с применением параболизованной системы уравнений гидродинамики, замкнутой на основе вышеуказанных математических моделей. В исследовании [10] численные эксперименты осуществлялись на основе метода прямого численного моделирования (DNS, Direct Numerical Simulation).

Двумерные турбулентные пятна, образующиеся при обрушении подветренных внутренних волн (lee waves) при обтекании препятствия набегающим потоком линейно стратифицированной жидкости с постоянной скоростью, изучались на основе метода DNS в работе [11]. Типичные турбулентные числа Рейнольдса, определяемые по высоте области перемешанной жидкости и скорости набегающего потока, оказались порядка 6000. Было показано, что сформировавшееся турбулентное течение является развитым; процессы порождения, диссипации и переноса в нем близки к квазистационарному состоянию в течение значимого интервала времени.

Динамика плоской локализованной зоны турбулентного смешения в однородном линейном поперечном сдвиговом потоке однородной и линейно стратифицированной среды изучалась в работе [12]. Было получено, что поперечное сдвиговое течение приводит к значительному искажению границы зоны турбулентного смешения и картины генерируемых внутренних волн в стратифицированной среде. Также было показано, что и в однородной, и в стратифицированной жидкостях оно приводит к существенному порождению энергии турбулентности и продлевает жизнь турбулентного пятна.

В работе [13] было отмечено, что эволюция пятен перемешанной жидкости ненулевой плавучести (термиков) играет важную роль при формировании тонкой структуры вод океана, образовании облаков и во многих других природных явлениях. Также был приведен краткий обзор исследований плавучих термиков и выполнены численные эксперименты по исследованию роли начальной формы ламинарного плавучего пятна перемешанной жидкости и распределения в нем плотности. Продемонстрирована существенная зависимость линейных размеров термика и ряда других его параметров от начальных условий.

В работе [14] рассматривалась задача о динамике слабонагретых ламинарной и турбулизованной локальных областей перемешанной жидкости в линейно стратифицированной среде. Для описания динамики слабонагретого турбулентного пятна, характеризуемого малой суммарной потенциальной энергией в сравнении с суммарной начальной энергией турбулентности, привлекалась алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений и компонент вектора турбулентного потока скалярной величины. Было показано, что малая ненулевая плавучесть приводит к существенному увеличению амплитуд внутренних волн, генерируемых при эволюции областей перемешанной жидкости, в сравнении со случаем нулевой плавучести.

В настоящей работе построена основанная на полуэмпирической модели турбулентности, включающей дифференциальные уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений и алгебраической модели компонент вектора турбулентного потока скалярной величины, математическая модель динамики локализованных областей турбулизованной жидкости с ненулевой плавучестью в линейно стратифицированной среде. В дополнение к работе [14] рассматриваются варианты задания начальных условий, в которых суммарная начальная потенциальная энергия сопоставима с суммарной начальной энергией турбулентности в пятне. Вывод о существенной зависимости амплитуд генерируемых при эволюции слабонагретых турбулентных пятен внутренних волн и их размеров подтверждается и в этом случае; вызванное при эволюции пятен ненулевой плавучести осредненное движение не приводит к существенному порождению энергии турбулентности. Представленная работа является развитием и продолжением исследования [14].

1. Математическая модель динамики области турбулентного смешения ненулевой плавучести

Для описания течения используется система осредненных уравнений гидродинамики в приближении Обербека–Буссинеска:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'^2\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle v'w'\rangle, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'w'\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'^2\rangle-g\frac{\langle\rho_1\rangle}{\rho_0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial t}+V\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial z}+W\frac{d\rho_s}{dz}=-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'\rho'\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'\rho'\rangle, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0, \tag{4}$$

здесь V, W — компоненты скорости осредненного движения в направлении горизонтальной и вертикальной осей y, z соответственно, $\langle p_1\rangle$ — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией ρ_s; g — ускорение силы тяжести; $\langle\rho_1\rangle$ — осредненный дефект плотности, $\rho_1=\rho-\rho_\text{s}$, $\rho_\text{s}=\rho_\text{s}(z)=\rho_0(1-az)$ — плотность невозмущенной жидкости ($d\rho_\text{s}/dz\le 0$ — устойчивая стратификация); $\rho_0=\rho_\text{s}(0)$; штрихом обозначены пульсационные компоненты, символ $\langle\ \rangle$ означает теоретико-вероятностное осреднение [1]. Плотность жидкости линейно зависит от температуры, стратификация предполагается слабой. Слагаемые с молекулярной вязкостью и диффузией в правых частях уравнений (1)–(3) опущены в предположении малости. Система уравнений (1)–(4) незамкнута. Ниже изложена математическая модель, которая вместе с этими уравнениями образует замкнутую модель течения.

В рассматриваемой математической модели, в отличие от работы [14], с целью более детального описания вертикального турбулентного обмена величины рейнольдсовых напряжений $\left\langle u_i' u_j' \right\rangle$ и скорости диссипации ε находятся путем численного интегрирования дифференциальных уравнений переноса [15, 16] с упрощенными представлениями диффузионных слагаемых [7 – 9, 12, 17]:

$$\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial t}+V\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{ey}\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{ez}\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial z}\right)+P_{11}+$$
$$+G_{11}-\frac{2}{3}\varepsilon-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle u'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)-C_2\left(P_{11}-\frac{2}{3}P\right)-C_2\left(G_{11}-\frac{2}{3}G\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial t}+V\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{ey}\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{ez}\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial z}\right)+P_{22}+$$
$$+G_{22}-\frac{2}{3}\varepsilon-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle v'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)-C_2\left(P_{22}-\frac{2}{3}P\right)-C_2\left(G_{22}-\frac{2}{3}G\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial t}+V\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{ey}\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{ez}\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial z}\right)+P_{33}+$$
$$+G_{33}-\frac{2}{3}\varepsilon-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle w'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)-C_2\left(P_{33}-\frac{2}{3}P\right)-C_2\left(G_{33}-\frac{2}{3}G\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial\left\langle v'w'\right\rangle}{\partial t}+V\frac{\partial\left\langle v'w'\right\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\left\langle v'w'\right\rangle}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{ey}\frac{\partial\left\langle v'w'\right\rangle}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{ez}\frac{\partial\left\langle v'w'\right\rangle}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(1-C_2\right)P_{23}+\left(1-C_2\right)G_{23}-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left\langle v'w'\right\rangle, \tag{8}$$

здесь

$$K_{ey}=C_{\mathrm{s}}\frac{e}{\varepsilon}\langle v'^2\rangle,\quad K_{ez}=C_{\mathrm{s}}\frac{e}{\varepsilon}\langle w'^2\rangle,\quad e=(\langle u'^2\rangle+\langle v'^2\rangle+\langle w'^2\rangle)/2,$$
$$P_{ij}=-\left\{\left\langle u_i'u_k'\right\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\left\langle u_j'u_k'\right\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right\},$$
$$G_{ij}=\frac{1}{\rho_0}\left(\left\langle u_i'\rho'\right\rangle g_j+\left\langle u_j'\rho'\right\rangle g_i\right),\ (i,j,\,k=1,\ 2,\ 3); \tag{9}$$

$$\vec{g}=(g_1,g_2,g_3)=(0,0,-g),\ 2P=P_{ii},\ \ 2G=G_{ii},\ \ U_1=U,\ \ U_2=V,\ U_3=W.$$

Уравнение переноса скорости диссипации ε записывается следующим образом:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+V\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+W\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{\varepsilon y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{\varepsilon z}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)+C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{e}\left(P+G\right)-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{e}. \tag{10}$$

Упрощенные диффузионные слагаемые в уравнениях переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений появились в связи с тем, что здесь тензор турбулентной диффузии в модели Дейли–Харлоу (Daly and Harlow) [15] заменяется на более простой тензор, в котором остаются только диагональные элементы, равные K_{ey}, K_{ez}. Аналогичным образом упрощаются и диффузионные слагаемые в (10).

Величины турбулентных потоков $\langle u_i'\rho'\rangle$ и дисперсии флуктуаций плотности $\langle \rho'^2\rangle$ находятся из известных алгебраических соотношений [15, 16]:

$$-\langle u_i'\rho'\rangle = \frac{e}{C_{1T}\varepsilon}\left[\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k} + (1-C_{2T})\left(\langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle\right)\right], \quad (11)$$

$$\langle\rho'^2\rangle = -\frac{2}{C_T}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k}. \quad (12)$$

Исходя из физических особенностей течения, алгебраические представления (11)–(12) упрощаются следующим образом:

$$\langle\rho'^2\rangle = -\frac{2}{C_T}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\langle w'\rho'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}, \quad (13)$$

$$-\langle v'\rho'\rangle = \frac{\langle v'^2\rangle}{C_{1T}}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y} = K_{\rho y}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}, \quad (14)$$

$$-\langle w'\rho'\rangle = \frac{e}{C_{1T}\varepsilon}\left[\langle w'^2\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} + (1-C_{2T})\frac{g}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle\right] =$$

$$= \frac{e\langle w'^2\rangle}{C_{1T}\varepsilon\left(1 - 2\frac{1-C_{2T}}{C_{1T}C_T}\cdot\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{e^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}\right)}\cdot\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} = K_{\rho z}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}. \quad (15)$$

Представленная математическая модель — одна из рассмотренных в работах [9, 17]. Коэффициенты турбулентной вязкости в уравнении (10) составляют: $K_{\varepsilon y} = K_{ey}/\sigma$, $K_{\varepsilon z} = K_{ez}/\sigma$. Величины C_1 = 2,2, C_2 = 0,55, $C_s = 0{,}22$, $C_{1T} = 3{,}2$, $C_{2T} = 0{,}5$, $C_T = 1{,}25$, $C_{\varepsilon 1} = 1{,}44$, $C_{\varepsilon 2} = 1{,}92$, σ = 1,3 относятся к общепринятым эмпирическим константам [15, 16].

При $t = t_0$ задаются следующие начальные условия:

$$\langle u'^2\rangle = \langle v'^2\rangle = \langle w'^2\rangle = 2e/3,$$

$$e(t_0, y, z) = \Theta_1(r),\ \varepsilon(t_0, y, z) = \Theta_2(r),\quad r^2 = y^2 + (z - z_c)^2,\quad 0 \le r < \infty,$$

$$\langle\rho_1\rangle = \varphi(y, z),\ V = W = \langle v'w'\rangle = 0,\quad -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\quad t = t_0,$$

здесь $\Theta_1(r)$ и $\Theta_2(r)$ — функции, согласующиеся с лабораторными экспериментальными данными [18, 19] в безымпульсном турбулентном следе в однородной жидкости на расстоянии $x/D_1 = 8$ (D_1 — диаметр тела). Начальное распределение дефекта плотности будет приведено ниже.

Величина $z = z_c$ в настоящей работе характеризует начальное положение центра турбулентного пятна — точку M_0 с координатами (0, z_c). При $r \to \infty$ ставятся условия невозмущенного потока:

$$\langle u'^2\rangle = \langle v'^2\rangle = \langle w'^2\rangle = \varepsilon = \langle v'w'\rangle = \langle\rho_1\rangle = V = W = 0,\quad t \ge t_0. \quad (16)$$

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие $r \to \infty$, сносятся на границы достаточно большого прямоугольника: $-Y \le y \le Y$, $-Z \le z \le Z$.

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением масштаба длины D — характерного диаметра зоны турбулентного смешения в начальный момент времени, масштаба скорости $U_0 = \sqrt{e_0}$ и плотности $aD\rho_0$, где $e_0 = e(t_0, 0, 0)$. При этом в обезразмеренных уравнениях вместо g появляется величина $4\pi^2 / \mathrm{F}_\mathrm{d}^2$, где F_d — плотностное число Фруда, определяемое равенством $\mathrm{F}_\mathrm{d} = U_0 T / D$, $T = 2\pi / \sqrt{ag} = 1/N$, T, N — период и частота Брента–Вяйсяля, $a = -\left(1/\rho_0\right)\left(d\rho_s / dz\right)$. В дальнейшем обезразмеренные величины будут, как правило, обозначаться знаком * сверху.

2. Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи основан на применении конечно-разностных методов расщепления по физическим процессам и пространственным переменным. Для построения конечно-разностного алгоритма решения задачи введем по аналогии с [9] новые независимые переменные:

$$t' = t,\ \ \xi = \chi_1(y),\ \ \eta = \chi_2(z)\ \ \left(\text{или}\ t = t',\ y = \varphi_1(\xi),\ z = \varphi_2(\eta)\right).$$

Функции $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\eta)$ задавались таблично. Выбор этих функций позволял сгущать узлы сетки в окрестности положения турбулентного пятна. В новой системе координат (t, ξ, η) узлы расчетной сетки на плоскости (ξ, η) распределялись равномерно: $\xi_i = (i - 0{,}5)\cdot h_\xi$, $\eta_j = (j - 0{,}5)\cdot h_\eta$, $i = -N_y, \ldots, 0, \ldots, N_z$, $j = -N_z, \ldots, 0, \ldots, N_z$, $y(\xi_{\pm N_y}) = \pm Y$, $z(\eta_{\pm N_z}) = \pm Z$.

Шаг по времени Δt^n выбирался переменным. Неизвестные функции определялись в узлах разнесённой сетки. Значения осредненных дефекта плотности $\langle \rho_1 \rangle$, рейнольдсовых напряжений $\langle u'_i\, u'_j \rangle$, скорости диссипации ε и дефекта давления $\langle p_1 \rangle$ вычислялись в узлах основной сетки i, j (в центре ячеек). Значения горизонтальной компоненты вектора скорости $V_{i+1/2,j}$ вычислялись в узлах сетки, сдвинутой на половину шага h_ξ в горизонтальном направлении. Значения вертикальной компоненты вектора скорости $W_{i,j+1/2}$ вычислялись в узлах сетки, сдвинутой на половину шага h_η в вертикальном направлении (другими словами, значения горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости отнесены к серединам соответствующих сторон ячеек разностной сетки).

Алгоритм решения задачи сводится к последовательному интегрированию системы уравнений (1) – (8), (10), записанных в новой системе координат. Условимся, что верхний индекс n будет соответствовать моменту времени $t = t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$, нижние индексы i, j — узлу сетки (ξ_i, η_j) в момент времени $t = \mathrm{const}$ (соответственно $(i + 1/2,\ j + 1/2)$ — узлу сдвинутой сетки).

Пусть все неизвестные функции уже определены в момент времени t^n. Решение для следующего момента t^{n+1} находится следующим образом.

1. Для определения компонент вектора скорости V, W и дефекта давления $\langle p_1 \rangle$ используются уравнения (1), (2) и уравнение несжимаемости (4), которые интегрируются

с применением явного метода расщепления по физическим процессам [20]. Для аппроксимации конвективных слагаемых в настоящей работе используется осредненная взвешенная аппроксимация центральной и направленной разностями второго порядка [21].

2. С применением неявного метода расщепления по пространственным переменным из уравнений (3), (5)–(10), последовательно определяются сеточные функции $\langle \rho_1 \rangle_{i,j}^{n+1}$, $\langle u'_l\, u'_k \rangle_{i,j}$, $\varepsilon_{i,j}^{n+1}$. При интегрировании уравнений для определения $\langle u'_i\, u'_j \rangle$, ε, $\langle \rho_1 \rangle$, используются центрально-разностные аппроксимации конвективных слагаемых.

Вычисленные на очередном этапе алгоритма переменные участвуют в определении неизвестных на последующих этапах. Реализованная таким образом идея блочного аналога метода Зейделя существенно упрощает процедуру расчетов. Более подробно численный алгоритм с упрощенной аппроксимацией конвективных слагаемых в уравнениях (1), (2) и его детальное тестирование приведены в работах [17, 22].

3. Результаты расчетов

С целью анализа влияния ненулевой плавучести нагретого турбулентного пятна выполнены численные эксперименты, соответствующие $\mathrm{F_d} = 29,7$ и трем вариантам значений:

I: $z_{\mathrm{c}} = 0,\ \langle \rho_1 \rangle = z,\ r^2 = y^2 + (z - z_c)^2 \le r_{1/2}^2;$

II: $z_{\mathrm{c}} = -r_{1/2},\ \langle \rho_1 \rangle = z - r_{1/2},\ r^2 \le r_{1/2}^2;$

III: $z_{\mathrm{c}} = -4r_{1/2},\ \langle \rho_1 \rangle = z - 6 \cdot r_{1/2},\ r^2 \le r_{1/2}^2;$

где $r_{1/2}$ — полуширина турбулентного пятна в начальный момент времени; $\Theta_1(r_{1/2}) = \Theta_1(0)/2$. Вариант I соответствует полному перемешиванию жидкости в круге с центром $M_0(0, 0)$ радиуса $r_{1/2}$; вариант II записан для случая задания в круге радиуса $r_{1/2}$ с центром $M_0(0, -r_{1/2})$ плотности, соответствующей $\langle \rho \rangle = \rho_{\mathrm{s}}(r_{1/2})$. Величина $\langle \rho_1 \rangle$ полагалась равной нулю вне круга радиуса $r_{1/2}$. Так достигается ситуация слабо нагретого турбулентного пятна. Вариант III отличается от варианта II значительно большей потенциальной энергией — в нем плотность $\langle \rho \rangle = \rho_{\mathrm{s}}(6r_{1/2})$ в круге радиуса $r_{1/2}$ с центром $(0, -4r_{1/2})$. Рассматривались также другие близкие к последнему варианты начальных данных.

Вычисления проводились на неравномерной сетке с числом узлов 421×433 для области размером $-47,6 \le y^* \le 47,6$, $-132 \le z^* \le 132$. В плоскости $(y^*,\ z^*)$ узлы сеточной области распределялись следующим образом:

$$y_i^* = (i - (N_y + 1)) \cdot h_y \ \ (i = N_y, \ldots, N_y + N_{ys} + 1),$$

$$y_i^* = y_{i-1}^* q_y \ \ (i = N_y + N_{ys} + 2, \ldots, 2N_y + 1),$$

$$y_i^* = -y_{2N_y+2-i}^* \ (i = 1, \ldots, N_y), \ \text{где}\ \ q_y = 1,06,\ N_y = 210,\ N_{ys} = 181,\ h_y = 0,05;$$

$$z_j^* = (j - (N_z + 1)) \cdot h_z \ \ (j = N_z, \ldots, N_z + N_{zs} + 1),$$

$$z_j^* = z_{j-1}^* q_z \ \ (j = N_z + N_{zs} + 2, \ldots, 2N_z + 1),$$

$$z_j^* = -z_{2N_z+2-j}^* \ (j = 1, \ldots, N_z), \ \text{где}\ \ q_z = 1,113,\ N_z = 216,\ N_{zs} = 196,\ h_z = 0,05.$$

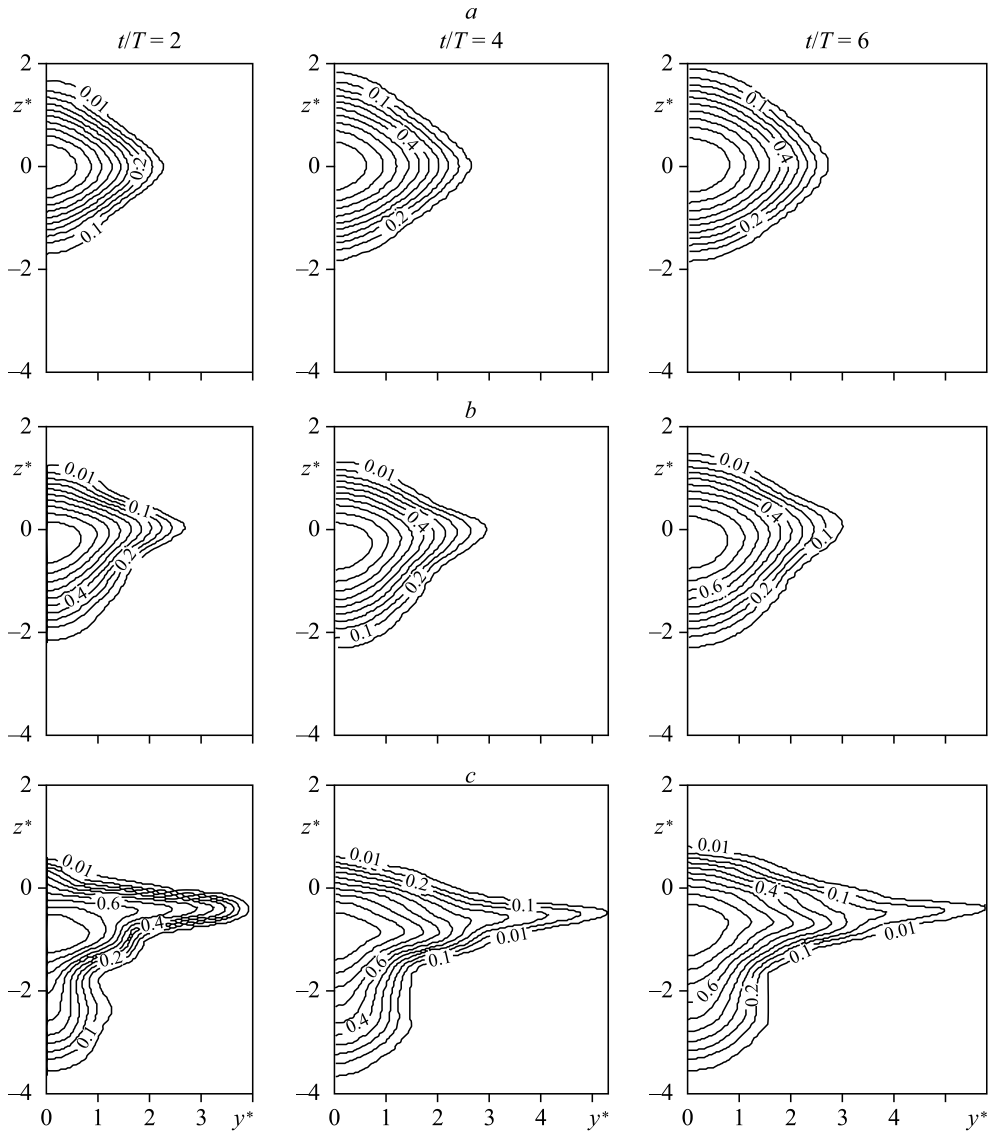

Рис. 1. Изолинии e^*/e^*_{m} = const для моментов времени t/T = 2, 4, 6
в зависимости от варианта начальных условий: a — I, b — II, c — III.
Линии представлены уровнями: 0,01, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9.

На рис. 1 для трех моментов времени (t/T = 2, 4, 6) приведены изолинии $e^*\big/e^*_{\mathrm{m}} = \mathrm{const}$, соответствующие трем вариантам задания начальных условий, где $e^*_{\mathrm{m}} = e^*_{\mathrm{m}}(t) = \max\limits_{i,j} e^*_{i,j}$ — максимальное значение энергии турбулентности для заданного значения времени. Можно видеть, что ненулевая плавучесть в значительной мере влияет на форму турбулентного пятна. Соответствующие моментам времени t/T = 2, 4 линии равного дефекта плотности представлены на рис. 2. Видно, что большему возмущению соответствует более интенсивная волновая картина. Этот же эффект подтверждается графиками функции $\left\langle \rho_1^*\left(\tilde{t}^*, y^*, \tilde{z}^*\right)\right\rangle$ на рис. 3.

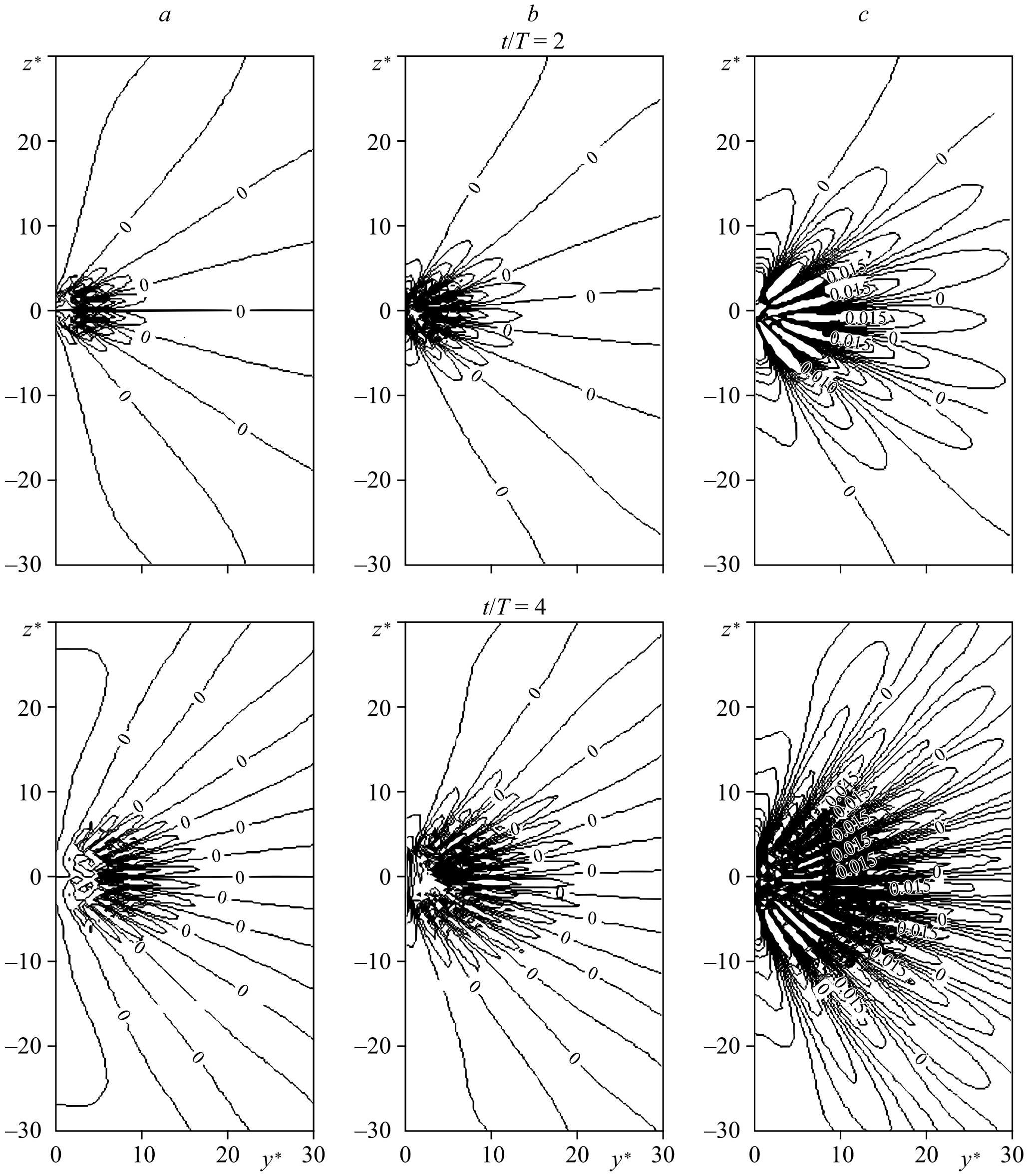

Рис. 2. Линии равного дефекта плотности $\langle\rho\rangle^* = \mathrm{const}$ для трех вариантов задания начальных данных: *a* — I, *b* — II, *c* — III и моментов времени $t/T = 2$, 4.

Линии представлены уровнями: –0,035, –0,03, –0,025, –0,02, –0,015, –0,01, –0,005, 0, 0,005, 0,01, 0,015, 0,02, 0,025; 0,03; 0,035.

Графики суммарных энергии турбулентности $E_\mathrm{t}^* = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^* dy^* dz^*$ и энергии осредненного движения $P_\mathrm{t}^* = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \left(\frac{V^{*2} + W^{*2}}{2} + \frac{4\pi^2}{\mathrm{F}_\mathrm{d}^2} \frac{\left\langle \rho_1^* \right\rangle^2}{2} \right) dy^* dz^*$ приведены на рис. 4. Суммарные энергии турбулентности E_t^* для вариантов I, II практически совпадают, в варианте III наблюдается незначительное порождение суммарной энергии турбулентности. Суммарные энергии генерируемого турбулентными пятнами осредненного движения значительно отличаются.

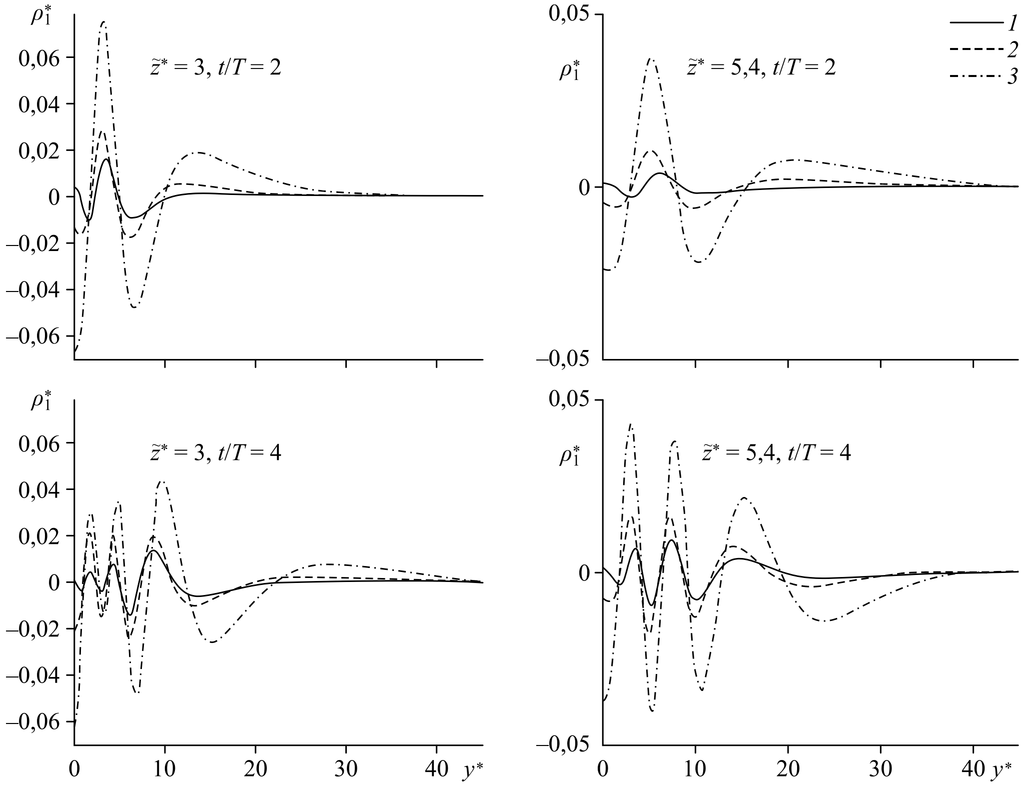

Рис. 3. Графики дефекта плотности для трех вариантов задания начальных условий и двух моментов времени.

Варианты: *a* — I (*1*), *b* — II (*2*), *c* — III (*3*).

Можно видеть, что значения P_t^* мало изменяются с ростом времени при $t / T \geq 1$. В работе [8] подобное поведение величин P_t^* отмечалось для случая нулевой плавучести (вариант I). Оно свидетельствует о независимой эволюции пульсационного и осредненного движений.

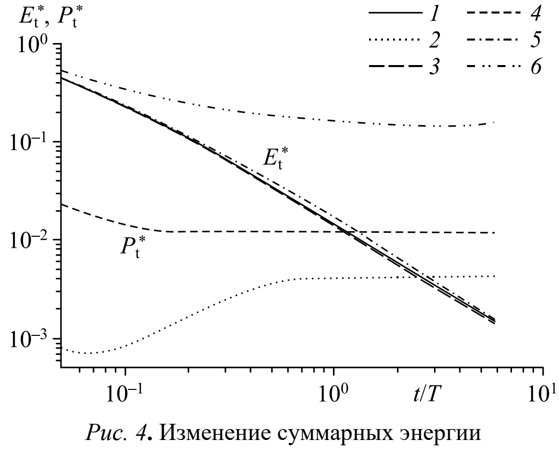

Рис. 4. Изменение суммарных энергии турбулентности E_t^* и энергии осредненного движения P_t^* в зависимости от варианта течения и времени.

E_t^* для вариантов I (1), II (3), III (5) и P_t^* для вариантов I (2), II (4), III (6).

Заключение

Построена математическая модель динамики плоского турбулентного пятна ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса рейнольдсовых напряжений и алгебраические представления компонент вектора турбулентного потока скаляра. Выполнено численное моделирование эволюции плоской зоны турбулентного смешения ненулевой плавучести. Рассмотрены варианты пятна, когда потенциальная энергия возмущения P_{t}^{*} существенно меньше суммарной начальной энергии турбулентности E_{t}^{*} и турбулентного пятна ненулевой плавучести с сопоставимыми начальными значениями P_{t}^{*} и E_{t}^{*}. Показано, что во всех случаях порождение суммарной энергии турбулентности незначительно. Наличие ненулевой плавучести приводит к увеличению размеров турбулентных пятен и генерации внутренних волн большей амплитуды в сравнении с турбулентным пятном нулевой плавучести.

Список литературы

1. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. СПб: Гидрометеоиздат, 1992. Т. 1. 696 с.
2. **Schooley A.H.** Wake collapse in a stratified fluid // Sci. 1967. Vol. 157, No. 3787. P. 421–423.
3. **Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G.** Development of the turbulized fluid region in stratified medium // Intern. Simposium on Stratified Flows, Novosibirsk, USSR, Aug 29 – 31, 1972. Paper 4.
4. **Власов Ю.Н., Некрасов В.Н., Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д.** О развитии области турбулентного смешения в жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1973. № 2. С. 91–95.
5. **Васильев О.Ф., Кузнецов Б.Г., Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.** Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 45–52.
6. **Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д.** Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // Теория дифракции и распространения волн (кр. тексты докл. 7-й Всесоюзн. Симп. по дифракции и распространению волн), Ростов-на-Дону. 1977. Т. 3. С. 186–189.
7. **Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G.** Development of the turbulent mixed region in a stratified medium // Heat transfer and turbulent buoyant convection: studies and applications for natural environment, buildings, engineering systems : papers presented at a seminar of the Intern. Center for Heat and Mass Transfer at Dubrovnik, Yugoslavia, in Aug. 1976. Vol. 1 / Eds Spalding D.B., Naim H. Afgan.–Washington: Hemisphere Pub. Corp.: in association with McGraw-Hill Intern. Book Co., 1977. (Series in thermal and fluids engng). P. 123–136.
8. **Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.** Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Математические проблемы механики сплошных сред: сб. научн. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980. Вып. 47. С. 70–89.
9. **Chernykh G.G., Voropayeva O.F.** Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28, No. 3. P. 281–306.
10. **Pal A., De Stadler M.B., Sarkar S.** The spatial evolution of fluctuations in a self-propelled wake compared to a patch of turbulence // Physics of Fluids. 2013. Vol. 25. P. 095106-1–095106-20.
11. **Yakovenko S.N., Thomas T.G., Castro I.P.** A turbulent patch arising from a breaking internal wave // J. Fluid Mechanics. 2011. Vol. 677. P. 103–133.
12. **Воропаева О.Ф., Черных Г.Г.** Динамика локальных областей турбулизованной жидкости в условиях фоновых возмущений гидрофизических полей // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2015. Т. 8, № 4. С. 12–17.
13. **Антропов И.В., Кронрод В.А.** О зависимости процесса эволюции термика в стратифицированной среде от начальных условий // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 12. С. 1261–1266.
14. **Chernykh G.G., Fomina A.V., Moshkin N.P.** Numerical simulation of dynamics of weakly heated turbulent mixing zone in linearly stratified medium // J. Engng Thermophysics. 2020. Vol. 29, Iss. 4. P. 674–685.
15. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics. University of Karlsruhe, 1980. 104 p.
16. **Rodi W.** Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, No. C5. P. 5305–5328.

17. **Chernykh G.G., Fomina A.V., Moshkin N.P.** Numerical simulation of dynamics of turbulent wakes behind towed bodies in linearly stratified media // J. Engng. Thermophysics. 2009. Vol. 18, No. 4. P. 279–305.
18. **Lin J.T., Pao Y.H.** Wakes in stratified fluids // Annual Review Fluid Mechanics. 1979. Vol. 11. P. 317–338.
19. **Hassid S.** Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 25–32.
20. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
21. **Zurigat Y.H., Chajar A.J.** Comparative study of weighted upwind and second order upwind difference schemes // Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals. 1990. Vol. 18, Iss. 1. P. 61–80.
22. **Мошкин Н.П.** Метод расщепления в задаче численного моделирования турбулентного следа за буксируемым телом в стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 4. С. 1–12.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2021 г.,
после доработки — 17 ноября 2021 г.,
принята к публикации 14 декабря 2021 г.,
после дополнительной доработки — 30 декабря 2021 г.