

УДК 532.584; 536.24

## КОНВЕКЦИЯ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. В. Беляев, Б. Л. Смородин

Пермский государственный университет, 614990 Пермь

E-mails: al\_belyaev@inbox.ru, smorodin@psu.ru

Исследована параметрическая конвективная неустойчивость горизонтального слоя однородной магнитной жидкости под влиянием переменного магнитного поля. Рассмотрен случай твердых границ. Найдены пороги конвекции. Установлено, что в переменном магнитном поле, среднее значение которого равно нулю, возмущения имеют синхронный характер и могут принадлежать разным классам, поскольку зависят от разности температур на границах слоя, его толщины, частоты и амплитуды переменного внешнего поля, а также от физических свойств магнитной жидкости.

**Ключевые слова:** феррожидкость, термомагнитная неустойчивость, параметрическая конвекция.

**Введение.** Магнитные жидкости представляют собой коллоидные растворы, которые содержат магнитные наночастицы, покрытые поверхностно-активным веществом для предотвращения их агрегации и взвешенные в непроводящей жидкости. Начало систематическому изучению магнитных жидкостей положено в работах [1, 2], в которых установлено, что в общем случае механическое равновесие неизотермической магнитной жидкости в магнитном поле невозможно.

Термомагнитный механизм неустойчивости феррожидкости во внешнем магнитном поле обусловлен неоднородностью ее намагниченности при неоднородном нагреве и проявляется даже в условиях невесомости. В основе термомагнитной конвекции лежит зависимость намагниченности от температуры: в одних и тех же условиях более холодный элемент жидкости более сильно намагничен, и, следовательно, на него действует большая магнитная сила в направлении градиента магнитного поля [3]. Теоретическим и экспериментальным исследованиям конвекции магнитных жидкостей, в частности порогов устойчивости и эволюции стационарных и волновых структур в жидкости, посвящено большое количество работ (см., например, [4–6]), в которых показано, что взаимодействие термомагнитной и рэлеевской неустойчивости приводит к появлению сложных режимов конвекции и влияет на перенос тепла через слой. (Подобные свойства конвекции феррожидкостей можно использовать в устройствах для контроля переноса тепла и управления тепловыми потоками.) Влияние переменных магнитных полей на конвекцию ферроколлоидов изучено в меньшей степени (см., например, [7–9]), несмотря на то что наличие модулируемого параметра оказывает значительное воздействие на конвективную устойчивость равновесия и течений жидкости. Параметрическое возбуждение конвекции магнитной жидкости исследовано при условиях, когда магнитная жидкость является однородной по составу [7, 9] либо

стратифицированной в неоднородном магнитном поле [8]. Показано, что вследствие параметрической неустойчивости модуляция поля может существенно понижать порог конвекции. Следует отметить, что в [9] рассмотрена конвективная неустойчивость магнитной жидкости в магнитных полях, однако не исследован характер отклика конвективной системы под действием переменного магнитного поля и не рассмотрены свойства различных режимов параметрической конвекции. В настоящей работе в рамках квазистационарного подхода исследовано влияние переменного однородного магнитного поля на конвекцию в горизонтальном слое магнитной жидкости, найдены пороги конвекции на плоскости амплитуда — обратная частота внешнего поля, изучены различные типы отклика магнитной жидкости на внешнее воздействие.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим горизонтальный слой однородной магнитной жидкости толщиной  $h$ , помещенный во внешнее однородное ортогональное слою магнитное поле, которое изменяется по закону

$$\mathbf{H}^{ext} = H_0^{ext} \cos(\Omega t) \mathbf{e},$$

где  $\Omega$  — циклическая частота изменения поля;  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$  — единичный вектор, ортогональный слою;  $\mathbf{H}^{ext}$  — напряженность внешнего магнитного поля;  $H_0^{ext}$  — амплитуда напряженности внешнего магнитного поля. Начало координат находится в середине слоя, ось  $x$  расположена в плоскости слоя, ось  $z$  ортогональна поверхности слоя и направлена вверх. На нижней границе слоя поддерживается постоянная температура  $T_1$ , на верхней —  $T_2$ . Поведение несжимаемой непроводящей магнитной жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений [3]

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p_H + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{H}\mathbf{B}, \\ \left[ \rho C_{V,H} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} \right)_{V,H} \right] \frac{DT}{Dt} + \mu_0 T \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} \right)_{V,H} \cdot \frac{D\mathbf{H}}{Dt} &= \varkappa \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность магнитной жидкости;  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ;  $\mathbf{v}$  — скорость;  $p_H = p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2$ ;  $\eta$  — динамическая вязкость;  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}$  — ускорение свободного падения;  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  — магнитное поле внутри слоя и намагниченность элемента жидкости;  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  — магнитная индукция;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $C_{V,H}$  — теплоемкость при постоянных объеме и напряженности магнитного поля;  $\varkappa$  — теплопроводность;  $T$  — температура. Систему (1) дополняют уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Скорость жидкости на границах равна нулю. Плотность магнитной жидкости полагается линейно зависящей от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_a)) \quad (3)$$

( $\alpha$  — коэффициент теплового расширения;  $T_a$  — средняя температура в слое).

В рамках используемой квазистационарной модели [3, 9] полагается, что в каждый момент времени векторное поле намагниченности принимает равновесное (в термодинамическом смысле) значение, при этом ее направление совпадает с направлением магнитного поля. В общем случае намагниченность зависит от магнитного поля и температуры по закону Ланжевена:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{H}}{H} M_S L(\xi), \quad L(\xi) = \operatorname{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi}, \quad \xi = \frac{\mu_0 m H_0}{k_B T_a}, \quad (4)$$

где  $M_S$  — намагниченность насыщения;  $m$  — магнитный момент одной частицы;  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Состояние механического равновесия, в котором находится система, характеризуется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{qs} &= 0, & T_{qs}(z) &= T_1 - (z + h/2)A, & A &= (T_1 - T_2)/h, \\ \mathbf{H}_{qs} &= H_{qs}\mathbf{e} = H_0 \cos(\Omega t)\mathbf{e} = (H_0^{ext}/\mu) \cos(\Omega t)\mathbf{e}, \\ \mathbf{M}_{qs} &= M_{qs}\mathbf{e}, & M_{qs} &= M_S L(\xi), \\ \frac{dH_{qs}}{dz} &= -\frac{dT_{qs}}{dz} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial M_{qs}}{\partial T} \right)_H \frac{dT_{qs}}{dz}, & \mu &= 1 + \left( \frac{\partial M_{qs}}{\partial H} \right)_T. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим малые возмущения основного состояния (5):

$$\{\mathbf{v}, T, p_H, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{B}\} = \{0, T_{qs}, (p_H)_{qs}, \mathbf{H}_{qs}, \mathbf{M}_{qs}, \mathbf{B}_{qs}\} + \{\mathbf{v}, \theta, p', \mathbf{H}', \mathbf{M}', \mathbf{B}'\}.$$

В соответствии с (2) возмущения напряженности и индукции магнитного поля внутри слоя представим в виде

$$\mathbf{H}' = \nabla\Phi; \quad (6)$$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \left\{ \left( 1 + \frac{M_{qs}}{H_{qs}} \right) \mathbf{H}' + \mathbf{e} \left[ \left( \frac{\partial M_{qs}}{\partial T} \right)_H \theta + \left( \left( \frac{\partial M_{qs}}{\partial H} \right)_T - \frac{M_{qs}}{H_{qs}} \right) H'_z \right] \right\}. \quad (7)$$

С учетом (3), (4) линеаризованная система уравнений для возмущений принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p' + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho_0 \alpha \theta g \mathbf{e} + (\mathbf{B}_{qs} \cdot \nabla) \mathbf{H}' + (\mathbf{B}' \cdot \nabla) \mathbf{H}_{qs}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_{qs} &= K_\theta \Delta \theta, & K_\theta &= \frac{\varkappa}{\rho_0 C_{V,H}}, & \operatorname{div} \mathbf{B}' &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (6), (7) после исключения давления из соотношения (8) получаем уравнение для возмущений вертикальной скорости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \Delta v_z + \alpha g \Delta_1 \theta - \frac{3\mu_0 A H_{qs} \chi_0}{\rho_0 T_{qs}} L' \Delta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{9\mu_0 A H_{qs}^2 \chi_0^2}{\rho_0 T_{qs}^2 (1 + 3\chi_0 L')} (L')^2 \Delta_1 \theta,$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ;  $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ;  $\chi_0 = \mu_0 M_S m / (3k_B T)$  — начальная магнитная восприимчивость;  $L' = dL/d\xi$ .

Уравнение для магнитного потенциала запишем в виде

$$\Delta \Phi + \frac{M_{qs}}{H_{qs}} \Delta_1 \Phi + 3\chi_0 L' \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi - 3\chi_0 L' \left( \frac{A H_{qs}}{T_{qs}^2} \theta + \frac{H_{qs}}{T_{qs}} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0,$$

где

$$\frac{H_{qs}}{T_{qs}} \simeq \frac{H_0 \cos \Omega t}{T_a}, \quad \frac{M_{qs}}{H_{qs}} = \frac{3\chi_0 L}{\xi}.$$

Введем безразмерные величины, выбирая в качестве нормирующих единиц измерения длину  $h$ , время  $h^2 \rho_0 / \eta$ , температуру  $Ah$ , скорость  $K_\theta / h$ , магнитный потенциал  $hH_0$ . Тогда для периодических в плоскости слоя нормальных возмущений  $\{v_z, \theta, \Phi\} \sim \exp(ik_x x + ik_y y)$  получаем систему уравнений в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \frac{\partial}{\partial t} v_z(z, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)^2 v_z(z, t) - \\ &\quad - R(1 + M_1 \cos^2 \omega t) k^2 \theta(z, t) + R M_2 \cos(\omega t) k^2 \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t), \\ \text{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \theta(z, t) - v_z(z, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \theta(z, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) - k_1^2 \Phi(z, t) - \frac{3\chi_0 L'}{1 + 3\chi_0 L'} M_3 \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial z} \theta(z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь величины  $M_1 = \mu_0 A (3\chi_0 L')^2 H_0^2 / (\rho_0 \alpha g \mu T_a^2)$ ,  $M_2 = 3\chi_0 L' \mu_0 H_0^2 (\rho_0 \alpha g T_a h)$  характеризуют пороги термомагнитной конвекции;  $M_3 = Ah/T_a$ ;  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ;  $k_1^2 = k^2 (1 + (3\chi_0 L)/\xi) / (1 + 3\chi_0 L')$ ;  $\mu = 1 + 3\chi_0 L'$ ;  $R = \rho_0 \alpha g Ah^4 / (\eta K_\theta) = \rho_0^2 C_{V,H} \alpha g Ah^4 / (\eta \varkappa)$  — тепловое число Рэлея;  $\text{Pr} = \eta / (\rho_0 K_\theta) = \eta C_{V,H} / \varkappa$  — тепловое число Прандтля;  $\omega = h^2 \rho_0 \Omega / \eta$  — безразмерная частота.

В случае твердых изотермических границ слоя систему уравнений (9) дополним стандартными граничными условиями

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \theta = 0, \quad (1 + 3\chi_0 L') \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) \pm k \Phi(z, t) = 0. \quad (10)$$

Для решения амплитудной задачи (9), (10) используем метод Галеркина и аппроксимируем вертикальную скорость четной функцией

$$v_z(z, t) = w(t) (\cos(\pi z))^2,$$

а возмущение температуры  $\theta(z, t)$  разложим в ряд по четным функциям  $z$ :

$$\theta(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos(\lambda_n z), \quad \lambda_n = \pi + 2\pi n. \quad (11)$$

Это обусловлено тем, что в задачах тепловой конвекции, где возмущения можно разделить на классы различной четности, четная мода возмущений скорости является наиболее опасной [10].

Подставляя (11) в уравнение для магнитного потенциала из системы (9) и решая его стандартным способом совместно с граничными условиями для  $\Phi(z, t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{3\chi_0 L' M_3}{1 + 3\chi_0 L'} \times \\ &\quad \times \left( \sin(\lambda_n z) + \frac{(-1)^{n+1} \text{sh}(k_1 z)}{\sqrt{(1 + 3\chi_0 L')(1 + 3\chi_0 L'/\xi)} \text{ch}(k_1/2) + \text{sh}(k_1/2)} \right), \\ \varphi_n(t) &= A_n(t) \cos(\omega t) \lambda_n / (k_1^2 + \lambda_n^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что решение (12) представляет собой нечетную функцию  $z$ . Кроме того, из (12) следует, что возмущения магнитного потенциала и температуры во времени должны иметь разный период.

В результате ортогонализации система уравнений для амплитуд нормальных возмущений скорости и температуры принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{3k^2}{8}\right) \frac{dw}{dt} = & -w \left(2\pi^2 + \pi^2 k^2 + \frac{3k^4}{8}\right) + \\ & + (R + N \cos^2(\omega t)) k^2 \sum_{n=0}^{n'} \frac{4A_n (-1)^{n+1} k_1^2}{\pi(8n^3 + 12n^2 - 2n - 3)(k_1^2 + \lambda_n^2)} - \\ & - N k^2 \cos^2(\omega t) \frac{4\pi^2 \operatorname{sh}(k_1/2)}{k_1^2 + 4\pi^2} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{n'} \frac{A_n \lambda_n (-1)^{n+1}}{(k_1^2 + \lambda_n^2) (\sqrt{(1 + 3\chi_0 L')(1 + 3\chi_0 L/\xi)} \operatorname{ch}(k_1/2) + \operatorname{sh}(k_1/2))}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\operatorname{Pr} \frac{dA_m}{dt} = \frac{8(-1)^{m+1} w}{\pi(8m^3 + 12m^2 - 2m - 3)} - A_m (k^2 + \lambda_m^2), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n', \quad (14)$$

где  $N = R M_1 = \mu_0 A^2 h^4 (3\chi_0 L')^2 H_0^2 / [\eta K_\theta T_a^2 (1 + 3\chi_0 L')]$  — магнитное число Рэлея.

**2. Общие свойства возмущений и метод решения.** Для анализа общих свойств возмущений первое и второе уравнения системы (9) запишем в матричном виде

$$B \frac{d}{dt} X(t) = A(t) X(t), \quad (15)$$

где

$$X(t) = [v_z(z, t), \theta(z, t)]^T, \quad B = \begin{pmatrix} D_z^2 - k^2 & 0 \\ 0 & \operatorname{Pr} \end{pmatrix}, \quad D_z \equiv \frac{\partial}{\partial z},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}(t) \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A(t + T_{\min}) —$$

периодическая во времени квадратная матрица, основной период которой  $T_{\min} = \pi/\omega$ . Элементы матрицы  $A(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= (D_z^2 - k^2)^2, & a_{21} &= 1, & a_{22} &= D_z^2 - k^2, \\ a_{12}(t) &= -k^2 \left[ R + N \cos^2(\omega t) \left( 1 - \frac{3\chi_0 L'}{1 + 3\chi_0 L'} D_z \Xi \right) \right]. \end{aligned}$$

Оператор  $\Xi$  определяется из соотношения

$$\Xi \theta(z, t) = \Phi_1(z, t),$$

где  $\Phi_1(z, t)$  — решение дифференциального уравнения  $D_z^2 \Phi_1 - k_1^2 \Phi_1 - D_z \theta = 0$  (с граничными условиями (10)).

Рассмотрим периодическое решение вида

$$X(t + \pi/\omega) = D X(t), \quad (16)$$

где  $D$  — трансляционная матрица (матрица класса), определяющая временную симметрию и свойства рассматриваемого типа отклика системы на параметрическое воздействие. Каждая из четырех матриц

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = -D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I, \quad D_4 = -D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

соответствует специфическому типу отклика, синхронного по отношению к внешнему полю с периодом  $2\pi/\omega$ . Однако не все эти матрицы реализуются в исследуемой конвективной системе.

Для всех рассматриваемых матриц  $D = D^{-1}$  уравнение (16) запишем в виде

$$X(t) = DX(t + \pi/\omega). \quad (17)$$

Подставляя (17) в выражение (15), получаем

$$\begin{aligned} BD \frac{d}{dt} X\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) &= A(t)DX\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right), \\ \frac{d}{dt} X\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) &= D(B^{-1}A(t))DX\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнивая соотношение (18) с результатом, полученным из (15) после воздействия на систему в течение промежутка времени, равного половине периода внешнего магнитного поля:

$$\frac{d}{dt} X\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = B^{-1}A\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) X\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right),$$

получаем условие реализации одного из классов синхронных возмущений, соответствующих матрицам  $D_l$  ( $l = \overline{1, 4}$ ):

$$B^{-1}A(t + \pi/\omega) = D(B^{-1}A(t))D. \quad (19)$$

Нетрудно показать, что классы матриц  $D_1, D_2$  не могут реализовываться в системе, так как для них не выполняется условие (19). Записав матрицу  $B$  в виде

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

вычислим левую часть уравнения (19)

$$B^{-1}A\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{b_{11}b_{22}} \begin{pmatrix} a_{11}b_{22} & a_{12}(t + \pi/\omega)b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} \end{pmatrix}$$

и правую часть

$$D_1(B^{-1}A(t))D_1 = \frac{1}{b_{11}b_{22}} \begin{pmatrix} a_{11}b_{22} & -a_{12}(t)b_{22} \\ -a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} \end{pmatrix}.$$

Сравнение этих выражений показывает, что  $B^{-1}A(t + \pi/\omega) \neq D_1(B^{-1}A(t))D_1$ , так как  $a_{21}b_{11} \neq -a_{21}b_{11} \neq 0$  и  $a_{12}(t + \pi/\omega)b_{22} \neq -a_{12}(t)b_{22}$ . В то же время матрицы  $D_3, D_4$  тождественно удовлетворяют (19).

Следует отметить, что полная конвективная система (9) характеризуется возмущениями  $v_z, \theta, \Phi$ ; возмущения температуры и магнитного потенциала, как сказано выше, меняются с разными периодами. Таким образом, в системе реализуются два класса синхронных (по отношению к внешнему полю) возмущений, меняющихся во времени следующим образом:

$$\begin{aligned} t \rightarrow t + \pi/\omega: \quad v_z &\rightarrow v_z, & \theta &\rightarrow \theta, & \Phi &\rightarrow -\Phi, \\ v_z &\rightarrow -v_z, & \theta &\rightarrow -\theta, & \Phi &\rightarrow \Phi. \end{aligned} \quad (20)$$

Первый из этих классов (соответствующий матрице  $D_3$ ) обозначим Н1, второй (соответствующий матрице  $D_4$ ) — Н2.

Поиск границ конвективной неустойчивости и анализ отклика системы проводится с помощью теории Флоке [11] — построения матрицы монодромии для амплитуд нормальных возмущений в результате численного интегрирования системы уравнений (13), (14) методом Рунге — Кутты — Фельберга 4–5-го порядка и вычисления собственных значений — мультипликаторов  $\gamma_k$ . Численное интегрирование уравнений проводится на интервале времени, соответствующем периоду внешнего поля  $T_{\min} = 2\pi/\omega$ . Если упорядочить мультипликаторы  $|\gamma_1| \geq |\gamma_2| \geq \dots \geq |\gamma_{n'+2}|$ , то условие  $|\gamma_1| = 1$  будет соответствовать порогу конвективной неустойчивости. В случае нейтральных синхронных возмущений значение мультипликатора  $\gamma_1 = 1$ , в случае порога субгармонического отклика  $\gamma_1 = -1$ .

Расчеты проводились для феррожидкости, состоящей из магнитных частиц диаметром  $d = 10$  нм, взвешенных в керосине ( $\text{Pr} = 25$ ). Намагниченность насыщения  $M_S = 48\,000$  А/м, начальная магнитная восприимчивость  $\chi_0 = 0,12$ .

**3. Пороги параметрической неустойчивости.** Рассмотрим случай постоянного внешнего поля ( $\omega = 0$ ) и определим критические значения параметра Ланжевена  $\xi$  и волнового числа  $k$ . При фиксированном числе Рэлея  $R$  магнитное число Рэлея  $N = N(k, \xi)$  представляет собой функцию двух переменных. При фиксированном значении  $\xi$  минимум  $N = N_*$  на кривой соответствует критическому значению волнового числа  $k_*$ . При этом величина  $N_*$  достигает минимума при  $\xi = \xi_*$  (рис. 1). Полученные таким образом значения  $k = k_*$ ,  $\xi = \xi_*$  используются в дальнейших вычислениях порогов конвекции в переменном поле (при  $\omega \neq 0$ ). В частности, при  $R = -108\,200$   $k_* = 8,129$ ,  $\xi_* = 4,12$ . Изложенный выше алгоритм применяется для вычисления порогов конвекции при всех рассматриваемых значениях числа Рэлея  $R$ . Вычисления показывают, что с увеличением интенсивности нагрева слоя сверху ( $|R|$  растет,  $R < 0$ ) наблюдается увеличение критического волнового числа  $k_*$ .

Рассмотрим случай переменного поля. В результате численного исследования устойчивости субгармонических возмущений не обнаружено. На рис. 2 представлены нейтраль-

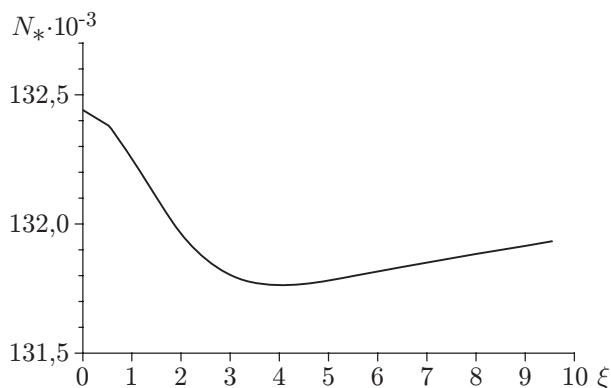


Рис. 1

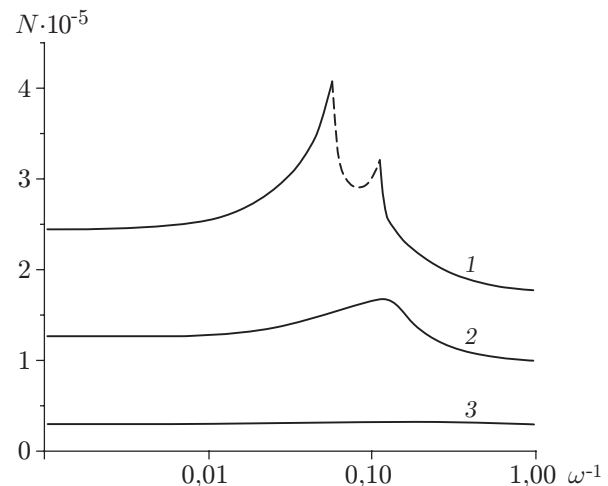


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость критического магнитного числа Рэлея  $N_*$  от параметра Ланжевена  $\xi$  в постоянном внешнем поле при  $R = -108\,200$ ,  $\chi_0 = 0,12$

Рис. 2. Нейтральные кривые при  $\chi_0 = 0,12$ ,  $\text{Pr} = 25$  и различных значениях  $R$ :

1 —  $R = -100\,000$ ,  $\xi = 4,06$ ,  $k = 8,128$ ; 2 —  $R = -70\,000$ ,  $\xi = 4,10$ ,  $k = 7,447$ ; 3 —  $R = -10\,000$ ,  $\xi = 4,45$ ,  $k = 5,066$ ; сплошные линии — граница устойчивости для синхронных нейтральных возмущений класса N1, штриховые — то же для синхронных нейтральных возмущений класса N2

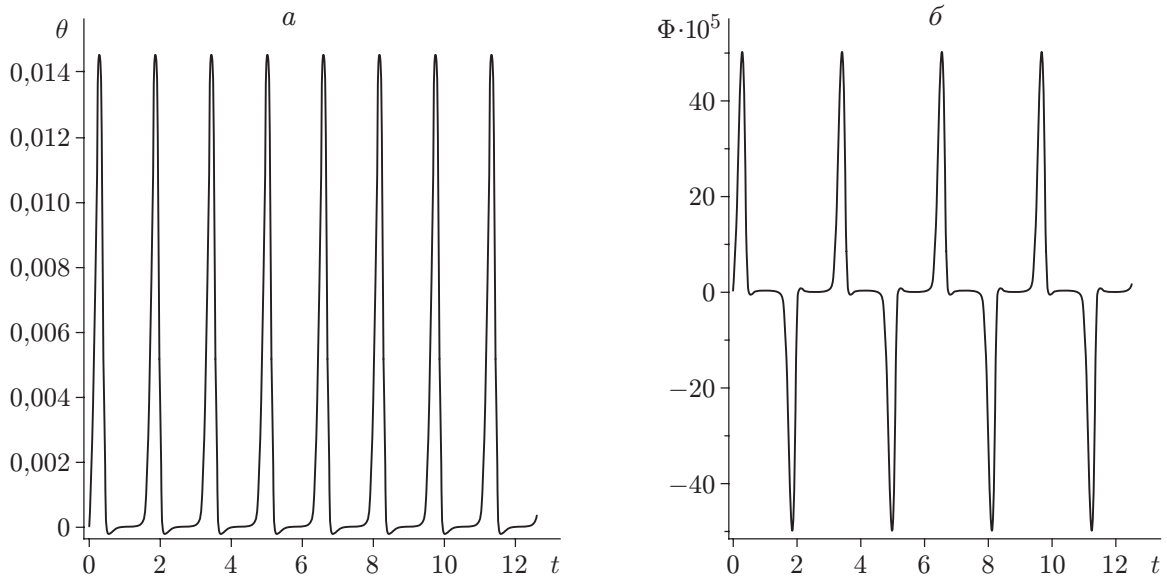


Рис. 3. Синхронные нейтральные возмущения класса Н1 температуры (а) и магнитного потенциала (б) при  $\omega = 2$ ,  $N = 197\,600$ ,  $R = -108\,200$ ,  $Pr = 25$ ,  $\chi_0 = 0,12$ ,  $\xi = 4,12$ ,  $k = 8,129$ ,  $z = 0$

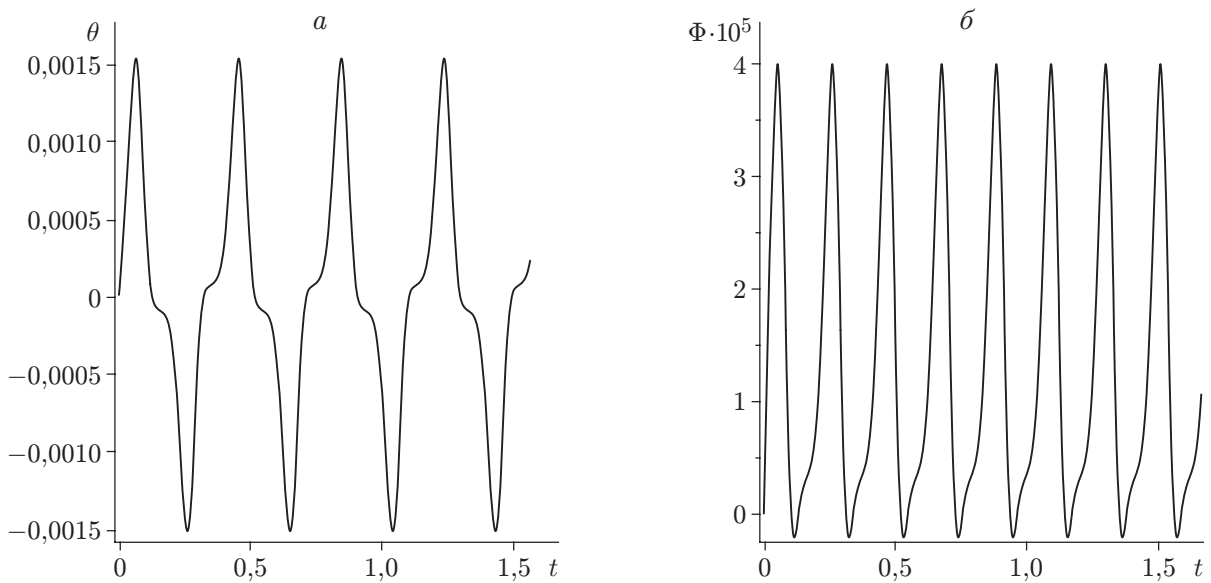


Рис. 4. Синхронные нейтральные возмущения класса Н2 температуры (а) и магнитного потенциала (б) при  $\omega = 16$ ,  $N = 331\,250$ ,  $R = -108\,200$ ,  $Pr = 25$ ,  $\chi_0 = 0,12$ ,  $\xi = 4,12$ ,  $k = 8,129$ ,  $z = 0$



ные кривые на плоскости магнитное число Рэлея  $N$  — обратная частота  $1/\omega$  при различных числах Рэлея  $R$ . Области конвективной неустойчивости находятся выше кривых. Результаты расчетов подтверждают справедливость разделения синхронных возмущений на два класса. Результаты параметрического резонанса проявляются только при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях числа Рэлея ( $R \approx -10^5$ , нагрев сверху). При  $|R| \ll 10^5$  ( $R < 0$ ) критическое магнитное число Рэлея практически не зависит от частоты воздействия  $\omega$ , а нейтральные возмущения имеют свойства возмущений синхронного класса Н1. При  $R > 0$  поведение системы аналогично. Увеличение степени нагрева сверху  $|R|$  ( $R < 0$ ) приводит к появлению возмущений класса Н2; области неустойчивости приобретают характерную для параметрического резонанса форму.

На рис. 3, 4 представлены зависимости нейтральных возмущений температуры и магнитного потенциала от времени для синхронных классов Н1, Н2 соответственно (по оси абсцисс отложен интервал времени, соответствующий четырем периодам изменения внешнего поля). Видно, что класс Н1 характеризуется частотой  $\theta$ , в два раза превышающей частоту внешнего магнитного поля (согласно (20) период изменения скорости совпадает с периодом изменения возмущений температуры). Потенциал  $\Phi$  меняется с частотой внешнего поля. Для класса Н2 справедливы обратные соотношения.

Сравнение рис. 3,а, 4,а показывает, что возмущения температуры  $\theta$  класса Н1 осциллируют вблизи ненулевого среднего значения, в то время как для класса Н2 среднее по времени возмущение температуры  $\theta$  равно нулю. Как следствие переход между классами Н1 и Н2 характеризуется скачкообразным изменением величины конвективного теплопотока через слой. Таким образом, меняя частоту переменного магнитного поля, можно управлять потоком тепла через слой магнитной жидкости.

**Заключение.** В рамках линейной задачи устойчивости исследовано влияние переменного магнитного поля на возникновение конвекции в горизонтальном плоскопараллельном слое магнитной жидкости. На основе матричных преобразований показана невозможность субгармонических возмущений равновесия магнитной жидкости при нулевом среднем значении магнитного поля. Построены зависимости критического магнитного числа Рэлея  $N$  от частоты изменения поля  $\omega$ . Расчеты показали, что возникновение параметрического резонанса возможно только при отрицательных числах Рэлея ( $R < 0$ ), что соответствует случаю нагрева сверху. При малых абсолютных значениях числа Рэлея ( $|R| \ll 10^5$ ) пороговое значение  $N$  практически не зависит от частоты, в то время как при  $R \approx -10^5$  наблюдается появление характерных резонансных “мешков” и чередование в соседних областях конвективной неустойчивости откликов разного типа. В случае переменного магнитного поля возмущения имеют исключительно синхронный характер и могут быть разделены на классы Н1 и Н2, различающиеся соотношением периодов осцилляций возмущений температуры и потенциала магнитного поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1927.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989.
3. Finlayson B. A. Convective instabilities of ferromagnetic fluids // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. P. 753–767.
4. Шлиомис М. И. Магнитные жидкости // Успехи физ. наук. 1974. Т. 112, вып. 3. С. 427–458.
5. Баштовой В. Г. Введение в термомеханику магнитных жидкостей / В. Г. Баштовой, Б. М. Берковский, А. Н. Вислович. М.: Наука, 1985.
6. Божко А. А., Путин Г. Ф. Экспериментальное исследование термомагнитной конвекции в однородном магнитном поле // Изв. АН СССР. Сер. Физика. 1991. Т. 55, № 6. С. 1149–1155.

7. **Krekhov A. P., Shliomis M. I., Kamiyama S.** Ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field // Phys. Fluids. 2005. V. 17. 033105.
8. **Shliomis M. I., Smorodin B. L., Kamiyama S.** The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids // Philos. Mag. 2003. V. 83, N 17/18. P. 2139–2153.
9. **Kaloni P. N., Lou J. X.** Convective instability of magnetic fluids under alternating magnetic fields // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. 066311.
10. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972. С. 237–267.
11. **Карлов Н. В.** Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. М.: Физматлит, 2001. С. 34–38, 267–284.

*Поступила в редакцию 4/VI 2008 г.*

---