

8. Калиткин Н. Н., Ермаков В. В. Таблицы проводимости и электронной теплопроводности плотной плазмы 11 веществ.— М., 1978.— Деп. в ВИНТИ 05.26.78, № 2813—78.
9. Aingner S., Igenbergs E. Friction and ablation measurements in a round bore railgun // IEEE Trans. on Magnetics.— 1989.— V. 25, N 1.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1969.
11. Marshall R. A. Plasma puffing from a railgun armature // IEEE Trans. on Magnetics.— 1984.— V. 20, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 22/XI 1991 г.,
в окончательном варианте — 6/IV 1992 г.

УДК 532.526.2

В. И. Васильев, С. В. Хохлов

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ТЕПЛООБМЕНОМ И ЗАКРУТКОЙ

В [1] показано, что течения с тонкими замкнутыми отрывными зонами можно рассчитать с помощью уравнений пограничного слоя, если рассматривать для них обратную задачу и учитывать взаимодействие с внешним невязким потоком (этот метод называют прямообратным). Данный подход довольно широко применяется для описания течений вокруг профилей [2]. В [3] разработана вычислительная методика, позволяющая рассчитывать ламинарные и турбулентные отрывные течения во входном участке широкого канала, в [4] — в канале с разделителем.

В данной работе прямообратный метод используется для расчета течений с теплообменом и закруткой. В то время как для безотрывных течений связь динамических и тепловых характеристик хорошо изучена [5], для отрывных течений она изучена недостаточно. В частности, требует более подробного исследования эффект возрастания тепловых потоков в окрестности точки присоединения; для этих целей может оказаться полезным прямообратный метод. В данной работе рассмотрено ламинарное отрывное течение с теплообменом и показано, что расчет удовлетворительно согласуется с результатами численного решения уравнений Навье — Стокса и экспериментальными данными [6].

В расчетах пограничного слоя в закрученном потоке давление поперек слоя обычно считается постоянным и исследуются безотрывные режимы течения [7]. В данной работе изучаются отрывные закрученные течения в предположении, что поперечный градиент давления в пограничном слое уравновешивается центробежными силами. В этих условиях возможен отрыв пограничного слоя на цилиндрической поверхности. Рассматриваются также автомодельные решения уравнений пограничного слоя с закруткой, соответствующие течениям с обратными токами.

1. Исследуем два типа ламинарных течений несжимаемой жидкости (рис. 1, где a — плоское течение над поверхностью, контур которой в декартовых координатах x, y описывается уравнением $y = r(x)$, а температура отличается от температуры набегающего потока, но температурный фактор близок к единице, так что жидкость можно считать несжимаемой с постоянными коэффициентами переноса; b — осесимметричное закрученное течение в канале, контуры стенок которого в цилиндрических координатах x, y описываются уравнениями $y = r_{\pm}(x)$, индекс плюс

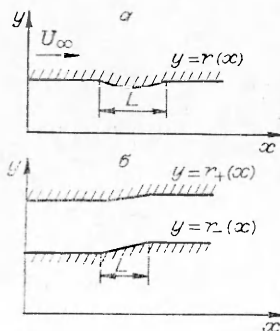


Рис. 1

относится к верхней, а минус — к нижней стенке). За характерный линейный масштаб принимаются продольный размер неровности на свободной поверхности или длина переходного участка канала L , а за характерную скорость — скорость набегающего потока или скорость на входе в канал U_∞ . Считается, что число Рейнольдса $Re = U_\infty L/\nu$ (ν — кинематическая вязкость) велико, а поперечный размер неоднородности поверхностей порядка толщины пограничного слоя δ ($\Delta_y r = O(\delta)$), в силу чего отрывные зоны будут тонкими.

Поток разбивается на вязкую и невязкую зоны, между которыми возможно сильное взаимодействие, причем отрывная область находится внутри вязкой зоны. Для течения в канале полагается, что характерный поперечный размер невязкого ядра порядка ширины канала, а $\delta_\pm \ll r_+ - r_-$; кроме того, считается, что $r_\pm \gg L$. Течение в вязкой зоне описывается уравнениями пограничного слоя, для которого (во избежание появления особенности в точке отрыва) решается обратная задача, т. е. задается толщина вытеснения, а продольный градиент давления определяется. Течение в невязкой зоне описывается уравнениями Эйлера, для решения которых в данных задачах можно использовать линейное приближение. Необходимая толщина вытеснения определяется из условия срачивания решений в областях вязкого и невязкого течений.

2. При выполнении указанных выше условий пограничный слой удобно описывать в переменных

$$X = x, Y = \pm(y - r_\mp), U = u, V = \pm(v - u dr_\mp/dx),$$

где u, v — составляющие вектора скорости в координатах x, y ; верхний знак относится к нижней стенке или свободной поверхности, а нижний — к верхней стенке.

Отбрасывая в уравнениях Навье — Стокса члены порядка $O(\delta/L) = O(Re^{-1/2})$ и выше (поскольку $\Delta_y r = O(\delta)$, то сюда входят и члены, учитывающие отличие направления координаты Y от нормали к поверхности), получим систему уравнений, описывающую пограничный слой с закруткой и теплообменом:

$$(2.1) \quad U\partial U/\partial X + V\partial U/\partial Y = -1/\rho \partial p/\partial X + \Gamma^2/r_\mp^3 dr_\mp/dX + \nu \partial^2 U/\partial Y^2;$$

$$(2.2) \quad (1/\rho) \partial p/\partial Y = \pm \Gamma^2/r_\mp^3;$$

$$(2.3) \quad \partial U/\partial X + \partial V/\partial Y = 0;$$

$$(2.4) \quad U\partial \Gamma/\partial X + V\partial \Gamma/\partial Y = \nu \partial^2 \Gamma/\partial Y^2;$$

$$(2.5) \quad U\partial T/\partial X + V\partial T/\partial Y = \nu/\text{Pr} \partial^2 T/\partial Y^2.$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; T — температура; Pr — число Прандтля; $\Gamma = yw$; w — окружная составляющая вектора скорости. При записи уравнения энергии (2.5) учтено, что изучается течение несжимаемой жидкости с температурным фактором, близким к единице.

Отметим, что в рассматриваемом приближении ($r_\pm \gg L, \Delta_y r_\pm = O(\delta)$) при отсутствии закрутки ($\Gamma = 0$) уравнения пограничного слоя на поверхности вращения совпадают с уравнениями плоского пограничного слоя. Если закрутка слабая или умеренная, т. е. $\Gamma/U_\infty r \ll 1$, то ее влияние также можно не учитывать. Действительно, как вытекает из (2.2), $\Delta p = O(Re^{-1/2})$ и, значит, изменение давления поперек пограничного слоя является величиной следующего порядка малости по сравнению с остальными членами уравнений. Член с Γ в правой части (2.1) также имеет порядок $O(Re^{-1/2})$, и им можно пренебречь. Существенно влияет на поток сильная закрутка. Так, если $\Gamma/U_\infty r = O(Re^{1/4})$, то все члены в (2.1) одинакового порядка. Однако, как показывают анализ автоматических решений (см. п. 5) и результаты расчетов прямообратным методом в случаях, когда закрутка приводит к отрыву потока, решение существует лишь при $\Gamma/U_\infty r < \text{const} Re^{1/4}$. Таким образом, система (2.1) — (2.5) позволяет описать закрученные течения с параметром Γ , лежащим в диапазоне $1 \ll \Gamma/U_\infty r \ll Re^{1/4}$. При этом эффект непостоянства давления

поперек пограничного слоя столь же существен, как и эффект, обусловленный искривлением поверхности.

Вне пограничного слоя уравнения (2.1) — (2.5) переходят в

$$(2.6) \quad U_e \partial U_e / \partial X = -(1/\rho) \partial p_e / \partial X + \Gamma_e^2 / r_{\pm}^3 dr_{\pm} / dX;$$

$$(2.7) \quad (1/\rho) \partial p_e / \partial Y = \pm \Gamma_e^2 / r_{\pm}^3$$

(индексом e отмечены значения параметров при $Y \rightarrow \infty$). Исключая в (2.1) давление с помощью (2.2), (2.6), (2.7), приходим к уравнению

$$(2.8) \quad U \partial U / \partial X + V \partial U / \partial Y = \beta + (\Gamma^2 - \Gamma_e^2) / r_{\pm}^3 dr_{\pm} / dX \pm \pm \partial \left(\int_Y^{\infty} (\Gamma^2 - \Gamma_e^2) / r_{\pm}^3 dY \right) / \partial X + \nu \partial^2 U / \partial Y^2$$

($\beta = U_e dU_e / dX$). Таким образом, для расчета пограничного слоя следует проинтегрировать соотношения (2.3) — (2.5), (2.8).

Граничные условия имеют вид

$$(2.9) \quad U = V = \Gamma = 0, \quad T = T_w \text{ при } Y = 0, \quad \partial U / \partial Y \rightarrow 0, \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_e, \\ T \rightarrow T_e \text{ при } Y \rightarrow \infty,$$

где T_w — температура поверхности; Γ_e , T_e — циркуляция и температура во внешнем потоке на контуре, подправленном на толщину вытеснения, что обеспечивает сращивание по этим переменным.

В обратной задаче пограничного слоя параметр β заранее неизвестен и для его определения необходимо задать распределение толщины вытеснения

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} (1 - U/U_e) dY = \delta(X).$$

В начальном сечении $X = X_0$ должно быть задано распределение параметров $U(0, Y)$, $\Gamma(0, Y)$, $T(0, Y)$.

Для сращивания решений в пограничном слое и внешнем потоке нужно выполнить условие

$$(2.11) \quad U_e(X) = u_e(X)$$

($u_e(X)$ — скорость внешнего невязкого потока на контуре, подправленном на толщину вытеснения, т. е. при $y = r_{\pm} \pm \delta_{\pm}$). С помощью уравнения неразрывности можно показать, что при выполнении условия (2.11) обеспечивается и сращивание поперечных составляющих вектора скорости. Условие (2.11) позволяет найти $\delta(X)$, что можно осуществить с помощью итераций: при заданном δ находятся U_e и u_e , и если (2.11) не выполняется, то проводится коррекция δ и т. д.

3. Для расчета скорости внешнего потока в данной работе использовалось линейное приближение. Так, при расчете обтекания свободной поверхности $y = r(x)$ внешнее плоское течение считалось потенциальным и, используя теорию тонкого тела, для u_e можно получить интегральное представление [1]

$$(3.1) \quad u_e(X) = U_{\infty} \left(1 + (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dr/d\xi / (X - \xi) d\xi \right).$$

Для потока в канале полагалось, что $w_e = \Gamma_e / r$, т. е. он закручен по закону свободного вихря ($\Gamma_e = \text{const}$) и, следовательно, также является потенциальным. Для упрощения рассмотрен случай узкого канала, т. е. $(r_+ - r_-) / r_- \ll 1$, тогда течение в меридиональной плоскости можно считать плоским. Как показывают результаты численного решения уравнения для функции тока потенциального течения, выполненного с помощью той же вычислительной программы, которая использовалась в [3], скорости на контуре в плоском и осесимметричном случаях при $(r_+ - r_-) / r_- \lesssim 0,1$ отличаются менее чем на 1%. Для скорости потенци-

ального течения в плоском канале с параллельными стенками на входном и выходном участках ($dr_{\pm}/dx = 0$ при $|x| > |x_L|$, где $x_L = O(L)$) и со слабо возмущенным контуром переходного участка ($\Delta_y r_{\pm} = O(\delta)$, т. е. является малым параметром) аналогично [4] получим формулы

$$(3.2) \quad U_{e\mp} = U_{\infty} \left(R_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (K((X-\xi)/R_0) dr_{\mp}/d\xi + K_1((X-\xi)/R_0) dr_{\pm}/d\xi) d\xi \right) / R(X).$$

Здесь $R(X) = r_+(X) - r_-(X)$; $R_0 = R(-\infty)$; $K(X) = (1/2) \operatorname{sgn}(X) (\operatorname{cth} \pi|X|/2 - 1)$; $K_1(X) = (1/2) \operatorname{sgn}(X) (1 - \operatorname{th} \pi|X|/2)$. Соотношения (3.2) справедливы с точностью до членов порядка $O(|\Delta_y r|^2)$.

Для расчета параметров на контуре, подправленном на толщину вытеснения, в (3.1), (3.2) надо заменить r_{\pm} на $r_{\pm} \pm \delta_{\pm}$. В численных расчетах интегралы вычисляются на конечном отрезке, вне которого $dr/dX = 0$, и вкладом $d\delta/dX$ можно пренебречь. Размер отрезка следует определять из условия независимости результата от пределов интегрирования.

Расчеты отрывных течений изложенным прямообратным методом выполнены с помощью численного алгоритма [3]. Уравнения (2.3) — (2.5), (2.8) интегрировались конечно-разностным методом по схеме второго порядка точности. Интегралы в (3.1), (3.2) рассчитывались по формуле трапеций. Для нахождения $\delta(X)$ с помощью (2.11) использовалась итерационная процедура [3], учитывающая нелокальность связи δ с U_e и u_e .

4. Для оценки возможностей расчета отрывных течений при наличии теплообмена рассматривалось обтекание углубления, форма которого описывается зависимостью $r(x)/L = -0,1(1 - \cos(2\pi(x^0 - 1)))$ при $1 \leq x^0 \leq 2$ и $r(x) = 0$ при $x^0 > 2$, $x^0 < 1$, где $x^0 = x/L$. Число Рейнольдса $Re = 1,21 \cdot 10^4$, температура набегающего потока $t_e = 71^\circ\text{C}$, а температура поверхности $t_w = 56^\circ\text{C}$, т. е. температурный фактор $T_w/T_e = 0,96$. Данное течение экспериментально исследовалось в [6], там же проведен расчет этого течения в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса.

В расчете в сечении $x^0 = 0$ распределения скорости $U^0 = U/U_{\infty}$ и избыточной температуры $\theta = (T - T_w)/(T_e - T_w)$ задавались профилем Блазиуса с толщиной вытеснения $\delta_0/L = 2,5 \cdot 10^{-2}$, число Прандтля полагалось равным 0,75. Пограничный слой рассчитывался на сетке, содержащей 61×60 узлов. Итерационная процедура [3] позволяла получить решение задачи взаимодействия за 20 итераций; при этом затраты времени ЦПУ ЭВМ ЕС-1061 составляли около 2 мин.

На рис. 2 приведены профили скорости и избыточной температуры, полученные в данной работе (сплошные кривые), и результаты измерений (точки) и расчета (штриховые кривые) [6]. Здесь $Y^0 = 10Y/L$, $x^0 = 1,0; 1,2; 1,4; 1,6$ (линии 1—4). Расчет с помощью уравнений пограничного слоя хорошо согласуется с расчетом на основе уравнений Навье — Стокса. Соответствие рассчитанных и измеренных профилей скорости также вполне удовлетворительное. Несколько хуже согласуются

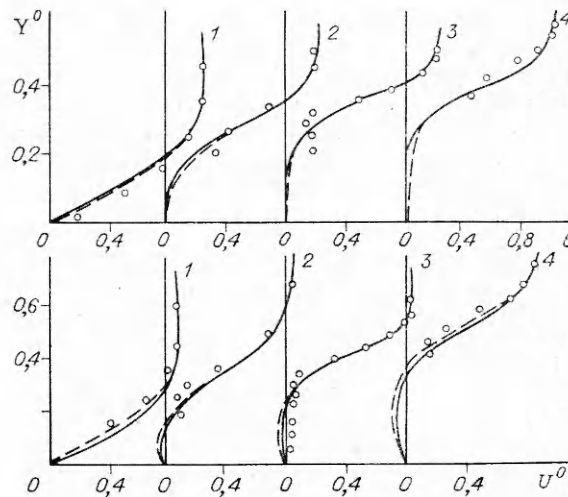


Рис. 2

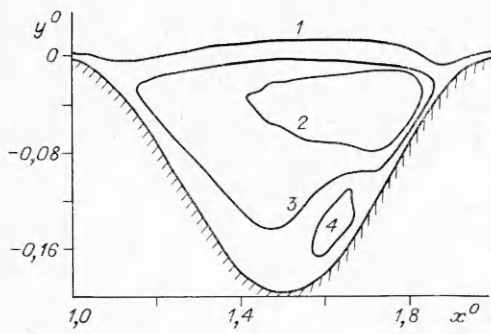


Рис. 3

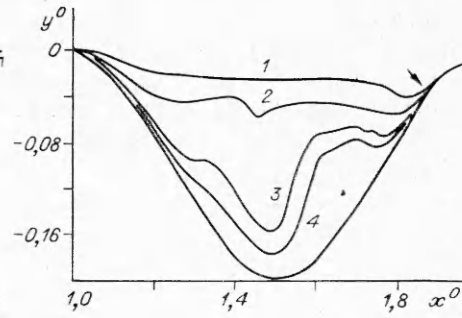


Рис. 4

расчетные и экспериментальные профили температуры в отрывной зоне, что, по-видимому, можно объяснить наличием в опыте переходных эффектов (авторы [6] отмечали наличие нестационарности течения), которые не учитывались в расчете.

В отрывной зоне формируется двухвихревая структура, о чем свидетельствует картина линий тока, показанная на рис. 3, где линии 1—4 отвечают значениям функции тока $\psi/U_\infty L = 0,02; -0,01; -0,002; 0,0005$. Основная часть углубления занята первичным вихрем, а на дне формируется малый вторичный вихрь. Такая же структура получена в [6] с помощью уравнений Навье — Стокса. На рис. 4 показана картина изолиний избыточной температуры $\theta = 0,1; 0,04; 0,01; 0,005$ (линии 1—4), стрелкой отмечено положение точки присоединения. Видно, что в ее окрестности изолинии сгущаются, что соответствует возрастанию теплового потока в этой области.

В целом можно сделать вывод, что использование уравнений пограничного слоя позволяет описать течения с тонкими отрывными зонами при наличии теплообмена с той же точностью, что и с помощью уравнений Навье — Стокса.

5. Рассмотрим теперь автомодельные решения системы (2.3), (2.4), (2.8) при наличии закрутки потока. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя с закруткой для безотрывных режимов течения и с постоянным поперек слоя давлением исследованы в [7]. Наличие в (2.8) дополнительного члена приводит к сужению класса допустимых автомодельных решений, но зато свойства этих решений несколько иные. Интересно также изучить автомодельные решения, отвечающие течению с возвратными токами.

В дальнейшем полагается, что внешнее течение закручено по закону свободного вихря, т. е. $\Gamma_e = \text{const}$. В этом случае система (2.3), (2.4), (2.8) имеет автомодельные решения при условии, что $r = r_0 = \text{const}$, $U_e = U_0 X^{1/5}$. Решения образуют однопараметрическое семейство с параметром, зависящим от Γ_e . Однако если $r = r_0 + r_1 X^{2/5}$ и $r_1 X^{2/5} \ll r_0$, то, пренебрегая в (2.8) членами с $r_1 X^{2/5}/r_0$, можно получить дополнительное двухпараметрическое семейство автомодельных решений, которое включает в себя и решения первого типа как частный случай.

Автомодельные переменные имеют вид

$$(5.1) \quad \eta = (3/5 U_0/\nu)^{1/2} Y/X^{2/5}, \quad U/U_e = f'(\eta), \\ V = -((3/5 U_0/\nu)^{1/2}/X^{2/5})(f - 2/3 \eta f'(\eta)), \quad \Gamma/\Gamma_e = g(\eta),$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной η . В этих переменных уравнения (2.3), (2.4), (2.8) и граничные условия (2.9) преобразуются:

$$(5.2) \quad f''' + ff'' + (1/3)(1 - f'^2) + \gamma_0 \int_{\eta}^{\infty} (g^2 - 1) d\eta + (g^2 - 1)\eta + \gamma_1(g^2 - 1) = 0;$$

$$(5.3) \quad g'' + fg' = 0;$$

$$(5.4) \quad f(0) = f'(0) = g(0) = 0, \quad f'(\infty) \rightarrow 1, \quad g(\infty) \rightarrow 1.$$

Здесь $\gamma_0 = \pm 2\Gamma_e^2/3r_0U_c^2(5\nu/3U_0)^{1/2}$; $\gamma_1 = 2\Gamma_e^2r_1/3r_0^3U_0^2$; причем значения $\gamma_0 > 0$ соответствуют пограничному слою на внешней стороне поверхности вращения (для канала это нижняя стенка), а $\gamma_0 < 0$ — на внутренней (для канала это верхняя стенка). Знак γ_1 определяется наклоном образующей поверхности вращения по отношению к оси вращения: $\gamma_1 > 0$, если образующая отклонена от оси, и $\gamma_1 < 0$, если образующая наклонена к оси. В отсутствие закрутки ($\gamma_0 = \gamma_1 = 0$) автомодельное решение соответствует автомодельному решению Фолкнера — Скэн с параметром автомодельности $\beta = 1/3$. При $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$ уравнения (5.2) — (5.4) совпадают с автомодельными уравнениями [7].

Поскольку $0 \leq g \leq 1$, то знак γ_0 и γ_1 определяет знак продольного градиента давления, индуцированного закруткой. На внутренней стороне поверхности вращения ($\gamma_0 < 0$) и при наклоне образующей поверхности к оси ($\gamma_1 < 0$) закрутка способствует ускорению потока в пограничном слое. При этом скорость внутри пограничного слоя может превышать скорость внешнего потока. На внешней стороне поверхности вращения ($\gamma_0 > 0$) или при отклонении поверхности от оси ($\gamma_1 > 0$) закрутка способствует торможению потока в пограничном слое и может вызвать отрыв даже на цилиндрической поверхности и при ускоренном внешнем течении. Отсюда видно, что в кольцевом цилиндрическом канале с ростом закрутки неизбежно появление отрывной зоны на нижней стенке, в то время как на верхней стенке поток будет ускоряться.

Для определения диапазона параметров, в котором возможны автомодельные решения с обратными токами, рассмотрены два случая: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 > 0$. Система уравнений (5.2) — (5.4) интегрировалась численно с использованием конечно-разностного метода, аналогичного численному методу решения обратной задачи для неавтомодельных уравнений; при этом аналогом толщины вытеснения служила величина $\int_0^\infty (1 - f') d\eta$. На рис. 5 показана зависимость величины $\tau^0 =$

$= f''(0)$, пропорциональной напряжению трения на стенке, от параметров γ_0 , γ_1 (кривая 1 — зависимость τ^0 от γ_0 , а 2 от γ_1). Здесь же для сравнения приведена известная зависимость τ^0 от $(-\beta)$, где β — параметр автомодельности в решении Фолкнера — Скэн (кривая 3). Решения существуют при $\gamma_0 \leq 0,265$ и $\gamma_1 \leq 0,660$. Эти предельные значения есть точки ветвления решений: одному и тому же значению $\gamma_0(\gamma_1)$ соответствуют решения с обратными токами и без них, т. е. качественно свойства этих решений такие же, как и решений Фолкнера — Скэн.

Поскольку $\gamma_0 \sim (\Gamma_e/U_e r_0)^2 L/r_0 \text{Re}^{1/2}$, а $\gamma_1 \sim (\Gamma_e/U_e r_0)^2 (\Delta_y r/r_0)$, то из ограничений на γ_0 , γ_1 при условиях $r_0 = O(L)$, $\Delta_y r = O(\delta)$ вытекает ограничение на возможный уровень закрутки:

$$(5.5) \quad \Gamma_e/U_e r_0 \leq \text{const Re}^{1/4}.$$

Оно возникает в том случае, если закрутка индуцирует неблагоприятный продольный градиент давления. Как уже отмечалось, в канале такая ситуация реализуется у нижней стенки, поэтому для течений в каналах условие (5.5) определяет в рассматриваемом приближении предельно допустимый уровень закрутки по закону свободного вихря.

6. Качественные результаты по влиянию закрутки, которые следуют из анализа автомодельных решений, подтверждаются решением задачи вязко-невязкого взаимодействия, полученным прямообратным методом. Рассматривалось течение в s -образном канале (рис. 1, б), контуры стенок которого заданы соотношениями: $r_-(x^0)/L = 10$ при $x^0 < 2$, $r_-(x^0)/L = 10 + 0,08(x^0 - 2)(3 - 2(x^0 - 2))$ при $2 \leq x^0 \leq 3$ и $r_-(x^0)/L = 10,08$ при $x^0 > 3$, $r_+(x^0)/L = r_-(x^0)/L + 1$. Число Рейнольдса составляло $6,25 \cdot 10^3$, ядро потока предполагалось закрученным по закону свободного вихря, причем интенсивность закрутки варьировалась в пределах $0 \leq \Gamma_e/U_\infty r_- \leq 5$. Температура потока предполагалась постоянной, т. е. теплообмен не рассматривался. В начальном сечении ($x^0 = 0$) скорость в ядре потока

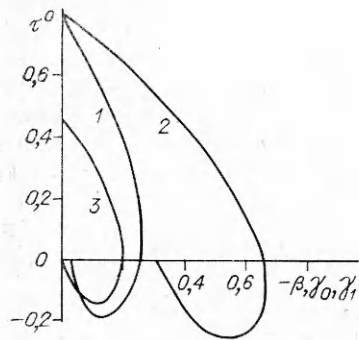


Рис. 5

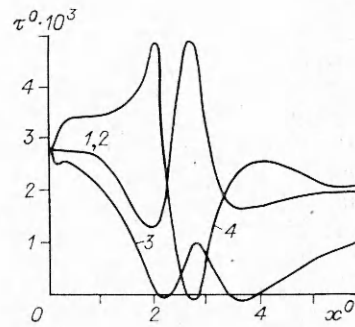


Рис. 6

принималась постоянной поперек канала, а распределения скорости U и циркуляции Γ задавались профилем Блазиуса, причем толщины вытеснения $\delta_-/L = \delta_+/L = 3 \cdot 10^{-2}$. Конечно-разностная сетка, на которой рассчитывались пограничные слои, содержала 150×60 узлов. Для получения решения задачи взаимодействия требовалось 15 итераций, время счета одного варианта около 5 мин на ЭВМ ЕС-1061.

Результаты расчетов трения, определенного по продольной составляющей скорости на нижней стенке канала, показаны на рис. 6 ($\tau^0 = \nu \partial U / \partial Y (X, Y = 0) / U_\infty^2$), где $\Gamma_e / U_\infty r_- = 0; 1; 4; 4$ (линии 1—4). Видно, что при отсутствии закрутки поток в канале безотрывный, поскольку площадь поперечного сечения канала почти не меняется. При умеренных уровнях закрутки ($\Gamma_e / U_\infty r_- = 1$) ее влияние несущественно и результаты практически не отличаются от предыдущего случая. Дальнейшее повышение уровня закрутки ($\Gamma_e / U_\infty r_- = 4$) приводит к отрыву потока. Поскольку на переходном участке угол между образующими верхней и нижней стенок канала и осью положительный, то закрутка вызывает отрыв потока как на нижней, так и на верхней стенке (на рис. 6 кривая 4 отвечает распределению трения на верхней стенке канала). На нижней стенке за переходным участком возникает вторая отрывная зона (кривая 3), вызванная наличием поперечного перепада давления.

При попытке увеличить интенсивность закрутки до $\Gamma_e / U_\infty r_- = 5$ сходящегося решения задачи взаимодействия получить не удалось, что, по-видимому, соответствует достижению ограничения (5.5) (в данном примере $Re^{1/4} \approx 9$).

Приведенные результаты показывают, что уравнения пограничного слоя позволяют рассчитать теплообмен в тонких замкнутых отрывных зонах и определить условия, при которых происходит отрыв потока при наличии закрутки. В тех ситуациях, когда рассматриваемое приближение применимо, расчет может быть выполнен с весьма малыми затратами машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter J. E. Solutions for laminar boundary-layers with separation and reattachment.— N. Y., 1974.— (Pap./AIAA; N 583).
2. McDonald H., Briley W. R. A survey of recent work on interacted boundary-layer theory for flow with separation // Numerical and physical aspects of aerodynamic flows II.— N. Y.: Berlin: Springer, 1984.
3. Васильев В. И., Хохлов С. В., Шальман Е. Ю. К расчету отрывных течений с помощью уравнений пограничного слоя // ПМТФ.— 1990.— № 6.
4. Васильев В. И. Расчет течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с разделителем и определение его интегральных характеристик // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1991.— № 1.
5. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен.— М.: Мир, 1987.

6. Saidi C., Legay-Desesquelles F., Prunet-Foch B. Laminar flow past sinusoidal cavity // Int. J. Heat Mass Transfer.— 1987.— V. 30, N 4.
 7. Богданова В. В. Ламинарный пограничный слой в осесимметричном закрученном потоке // Техническая гидрогазодинамика.— Л., 1965.— (Тр./Ленингр. политехн. ин-т; № 248).

г. Москва

Поступила 23/VII 1991 г.,
 в окончательном варианте — 27/III 1992 г.

УДК 532.522.2

В. Е. Козлов

МОДЕРНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматриваются две модели турбулентности, получившие широкое распространение: однопараметрическая [1] и двухпараметрическая [2]. Предлагаемая их модификация позволяет значительно точнее описывать процесс смешения осесимметричной струи.

1. Интерпретация теории Прандтля для плоского и осесимметричного струйных течений. Система стационарных уравнений Рейнольдса для струйного турбулентного изобарического течения несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$) имеет вид

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} (-y^i \overline{u'v'}), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

где $i = 0, 1$ в плоском и осесимметричном случаях; черта означает осреднение. Для замыкания системы уравнений воспользуемся гипотезой Бусинеска

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon \partial \bar{u} / \partial y$$

(ε — коэффициент турбулентной вязкости). Чтобы построить теорию турбулентного переноса для ε , Прандтль [3] использовал нестрогие соображения о переносе случайным полем давления крупномасштабных частиц жидкости, которые условно назвал молями. Эта теория получила название теории «пути смешения». Рассмотрим, следуя Прандтлю, механизм турбулентного переноса для ε на примере плоского турбулентного потока жидкости с однородным сдвигом ($\bar{w} = 0, \bar{v} = 0, \partial \bar{u} / \partial x = 0, \partial \bar{u} / \partial y = \text{const} \neq 0$). Пусть некоторый моль получает импульс в поперечном направлении y . В результате этого его поперечная компонента скорости становится равной v' , а сам моль перемещается на характерную длину «пути смешения» l , вытесняя при этом находящийся там другой моль. Предположим, что при перемещении моля его продольная компонента скорости остается неизменной. Разность между продольными компонентами скорости вытесняющего и вытесняемого молей составит $u' \approx -l \partial \bar{u} / \partial y$. Теперь легко получить оценку для интересующей нас корреляции $\overline{u'v'} \approx -\bar{v}' (\partial \bar{u} / \partial y)$. Таким образом, согласно теории «пути смешения», коэффициент турбулентной вязкости есть корреляция \bar{v}' . Тот же результат имеет место и в осесимметричном случае. В данной работе различие между плоским и осесимметричным случаями было получено благодаря следующей модификации теории «пути смешения».

Рассмотрим движение моля в плоскости yOz , перпендикулярной вектору осредненной скорости. Следуя логике рассуждений теории «пути смешения», введем характерное расстояние l_1 , на которое перемещается моль из-за случайного пульсационного воздействия на него поля давления. Предположим, что моль имеет форму шара с радиусом $R = l_1/2$ и может перемещаться в плоскости yOz в любом направлении. Одно из