

О ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ ТРЕЩИН, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД УГЛОМ

И. Д. Суздальницкий

(Новосибирск)

В упругой плоскости, ослабленной системой трещин, взаимодействие трещин обычно исследовалось для случая коллинеарного их расположения. Более сложным конфигурациям посвящены работы [1, 2], в первой из которых методами преобразования Фурье изучены четыре симметричных относительно общего центра разреза, а во второй — периодическая система продольно-поперечных трещин. В [3] приведены сингулярные интегральные уравнения для системы произвольно ориентированных трещин, однако численные результаты даны только для ряда коллинеарных трещин, ориентированных под одним и тем же углом к направлению действия нагрузки.

В теории хрупкого разрушения представляет интерес исследование взаимного влияния двух произвольно ориентированных трещин, которому посвящена данная работа.

Пусть в плоскости xOy имеются два разреза L_1 и L_2 (фиг. 1), параметрические уравнения которых ($k = 1, 2$)

$$L_k: x(t) = a_k t, y(t) = b_k t, 0 < t_k \leq t \leq t_{k+2} \\ (a_k = \cos \alpha_k, b_k = \sin \alpha_k).$$

Берега разрезов предполагаются свободными от напряжений, на бесконечности приложены усилия

$$(1) \quad \sigma_x^\infty = \sigma_1, \quad \sigma_y^\infty = \sigma_2, \quad \tau_{xy}^\infty = 0.$$

Воспользуемся представлением [2] функции напряжений U , приведенным к виду

$$(2) \quad U(x, y) = \frac{1}{2} (\sigma_1 y^2 + \sigma_2 x^2) + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+2}} [f_1(t) r_{1k} + \\ + f_2(t) r_{2k}] \ln(r_{1k}^2 + r_{2k}^2) dt,$$

где

$$r_{1k} = a_k x + b_k y - t; r_{2k} = -b_k x + a_k y.$$

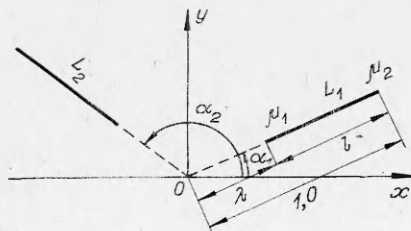
Функция (2) удовлетворяет условиям (1). Из условий на берегах разрезов L_k

$$(\sigma_y + \sigma_x) + (\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\alpha_k - 2\tau_{xy} \times \\ \times \sin 2\alpha_k = 0,$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha_k + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha_k = 0,$$

где

$$\sigma_x = \partial^2 U / \partial y^2; \quad \sigma_y = \partial^2 U / \partial x^2; \quad \tau_{xy} = \\ = -\partial^2 U / \partial x \partial y,$$



Ф и г. 1

получаем систему четырех сингулярных интегральных уравнений для определения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. В случае симметрично расположенных ($\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi - \alpha$) разрезов равной длины $l = 1 - \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) имеем для уравнения ($k = 1, 2$)

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\lambda a}^a \left\{ \frac{f_k(\xi)}{x - \xi} + f_1(\xi) R_{1k}(\xi, x) + f_2(\xi) R_{2k}(\xi, x) \right\} d\xi = -p_k,$$

где

$$R_{11} = (cx - \xi)(1 + 2s^2x\xi D)D;$$

$$R_{12} = sx[2\xi(cx - \xi)(x - c\xi)D - 1]D;$$

$$R_{21} = sx[(x - c\xi)^2 - (s\xi)^2]D^2;$$

$$R_{22} = \frac{cx - \xi}{sx} R_{21};$$

$$D = (x^2 - 2cx\xi + \xi^2)^{-1}; \quad c = -\cos 2\alpha, \quad s = \sin 2\alpha;$$

$$p_1 = 0,5[(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\alpha]; \quad p_2 = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

Преобразование

$$\xi = (1/2)[(\xi_2 + \xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)v], \quad x = (1/2)[(\xi_2 + \xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)u]$$

приводит уравнения (3) к симметричному интервалу $(-1, 1)$. Следуя [4], полагаем

$$(4) \quad f_k(\xi) = g_k(v) = \frac{\sigma g_k^0(v)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Функции $g_k^0(v)$ разыскиваются в виде интерполяционного тригонометрического многочлена

$$(5) \quad g_k^0(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+i} g_{kj} \sin \vartheta_j \frac{\cos N\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_j},$$

$$v = \cos \vartheta, \quad \vartheta_j = \frac{2j-1}{2N} \pi.$$

Задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов g_{kj} . Эту систему следует дополнить условием однозначности перемещений при обходе вокруг трещины $\int_{\lambda a}^a f_k(\xi) d\xi = 0$,

принимающим в силу (5) вид $\sum_{j=1}^N g_{kj} = 0$ ($k = 1, 2$).

Определим коэффициенты интенсивности напряжений на концах разрезов. Имеем

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sum_{k=1}^2 \frac{2}{\pi} \int_{t_k}^{t_k+2} [f_1(t) r_{1k} + f_2(t) r_{2k}] \frac{dt}{r_{1k}^2 + r_{2k}^2},$$

откуда для функции Колосова — Мухелишвили следует представление в виде

$$(6) \quad \Phi(z) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{t_b}^{t_k+2} \frac{f(t) e^{i\alpha_k t}}{z - e^{i\alpha_k t}} dt, \quad f = f_1 + if_2.$$

Используя разложения (4), (5) и полагая

$$z = x + iy = \frac{1}{2a} e^{i\alpha} [(\xi_2 + \xi_1) + (\xi_2 - \xi_1) \zeta],$$

после вычисления интеграла (6) получаем

$$(7) \quad \Phi(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^j (g_{1j} + ig_{2j}) \sin \vartheta_j \frac{\cos(N \arccos \zeta)}{\sqrt{\zeta^2 - 1} (\zeta - \cos \vartheta_j)} + R(z),$$

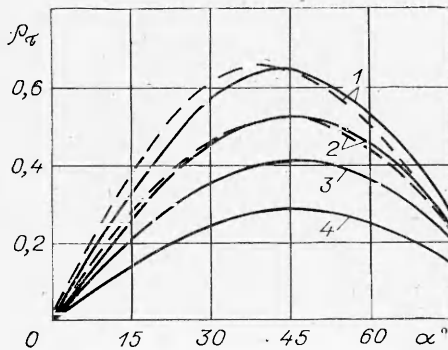
где $R(z)$ — функция, регулярная на концах разрезов.

Коэффициенты разложения (7) имеют комплексный вид $g_{1j} + ig_{2j}$. Таким образом, при растяжении плоскости с трещинами, расположенными под углом, следует учитывать не только коэффициенты интенсивности нормальных усилий $K_\sigma = \sigma \rho_\sigma$, но и коэффициенты касательных усилий $K_\tau = \sigma \rho_\tau$. Для вычисления этих коэффициентов вычисляются пределы $2 \lim_{M \rightarrow M_n} \sqrt{2\pi} |MM_n| \Phi(z)$, где на ближних концах $MM_1 = (\lambda - t)e^{i\alpha}$ ($t < \lambda$) и на удаленных концах $M_2M = (t - 1)e^{i\alpha}$ ($t > 1$). Выражения коэффициентов интенсивности на ближних концах имеют вид

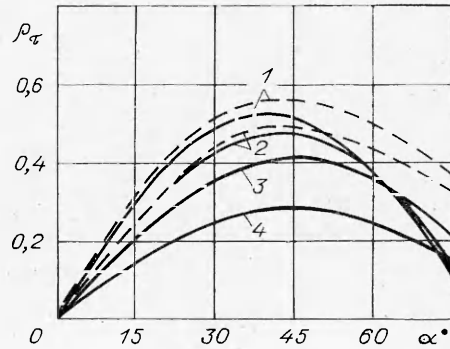
$$(8) \quad \rho_{1\sigma} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} \pi \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} g_{1j} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_j}{2}.$$

Значение $\rho_{1\tau}$ получается из (8) заменой g_{1j} на g_{2j} . Для удаленных концов в формуле (8) вместо $\operatorname{ctg}(\vartheta_j/2)$ следует взять $-\operatorname{tg}(\vartheta_j/2)$, соответствующие выражения далее обозначены через $\rho_{2\sigma}$, $\rho_{2\tau}$.

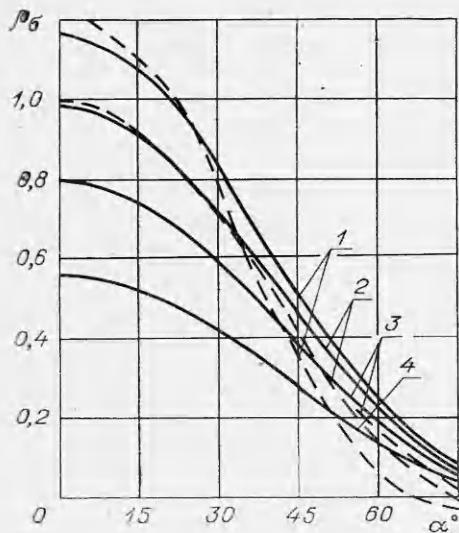
На фиг. 2, 3 даны графики коэффициентов интенсивности $\rho_{1\tau}$, $\rho_{2\tau}$ при продольном растяжении ($\sigma_2 = 0$), на фиг. 4, 5 — графики для поперечного растяжения $\rho_{1\sigma}$, $\rho_{2\sigma}$ ($\sigma_1 = 0$) в зависимости от изменения величины угла наклона разрезов к горизонтальной оси для значений λ , равных 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 (соответственно кривые 1—4). Сплошными линиями даны



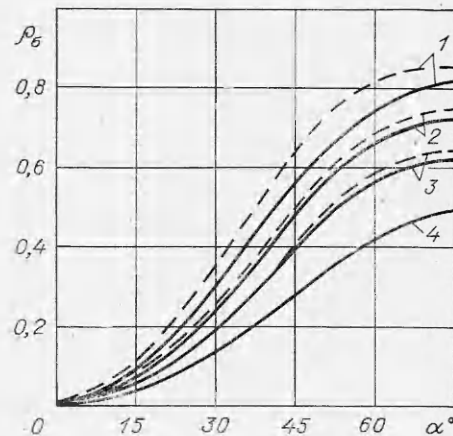
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

коэффициенты интенсивности для удаленных концов, штриховыми — для ближних концов.

При решении алгебраических систем для g_{Rj} в вычислениях удерживалось 21 слагаемое. Расчеты с удержанием 31 слагаемого показали, что с точностью до 10^{-4} результаты не изменяются.

Коэффициенты интенсивности касательных усилий достигают наибольших значений для угла между направлениями трещин и направлением действия нагрузки, равного 45° . Сопоставляя значения коэффициентов интенсивности касательных напряжений с коэффициентами интенсивности нормальных напряжений, замечаем, что при продольном растяжении в зависимости от значений λ для углов, меньших $40-45^\circ$, $\rho_\sigma < \rho_\tau$. Аналогичное явление наблюдается при растяжении в поперечном направлении, но для углов, больших $40-45^\circ$. При $\alpha = 0$ результаты вычисления совпадают с известными результатами [5].

Автор выражает благодарность Л. М. Куршину за постоянное внимание к работе и А. М. Каганскому за выполнение расчетов.

Поступила 6 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Das S. C., Sneddon I. N. The stress field near a system of four symmetrically situated line cracks of equal length. — В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. К 80-летию акад. Н. И. Мухелишвили. М., «Наука», 1972.
2. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Напряженное состояние упругой плоскости, ослабленной бесконечным рядом продольно-поперечных трещин. — ПМТФ, 1975, № 5.
3. Дашиция А. П., Саврук М. П. Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
4. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
5. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.