$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65H05

Оптимальные семейства методов типа Чебышева–Хэлли без второй производной на основе средних значений

М. Кансал, В. Канвар, С. Бхатиа

University Institute of Engineering and Technology, Panjab University, Chandigarh-160 014, India
E-mails: mkmaths@gmail.com (М. Кансал), vmithil@yahoo.co.in (В. Канвар), s_bhatia@pu.ac.in (С. Бхатиа)

Кансал М., Канвар В., Бхатиа С. Оптимальные семейства методов типа Чебышева–Хэлли без второй производной на основе средних значений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2016.—Т. 19, № 2.—С. 167–181.

В данной статье представлены новые интересные оптимальные семейства методов четвертого порядка типа Чебышева–Хэлли без второй производной. С точки зрения вычислительных затрат для каждого члена семейства необходимо вычисление двух функций и одной производной первого порядка на итерацию, так что их показатели эффективности равны 1.587. На примерах показывается, что предложенные методы могут использоваться в высокопрецизионной вычислительной среде, а также, что большие области притяжения принадлежат нашим методам, тогда как другие методы являются медленными и имеют более темные области притяжения. В то же самое время некоторые методы являются слишком чувствительными к выбору начального приближения.

DOI: 10.15372/SJNM20160204

Ключевые слова: *области притяжения, метод Ньютона, методы Кинга, оптимальные итерационные методы, показатель эффективности.*

Kansal M., Kanwar V., Bhatia S. Optimized mean based second derivative-free families of Chebyshev–Halley type methods // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2016.—Vol. 19, № 2.—P. 167–181.

In this paper, we present new interesting fourth-order optimal families of Chebyshev–Halley type methods free from second-order derivatives. In terms of computational cost, each member of the families requires two functions and one first-order derivative evaluation per iteration, so that their efficiency indices are 1.587. It is found by way of illustration that the proposed methods are useful in high precision computing environment. Moreover, it is also observed that larger basins of attraction belong to our methods, whereas the other methods are slow and have darker basins, while some of the methods are too sensitive to the choice of the initial guess.

Keywords: *basins of attraction, Newton's method, King's methods, optimal iterative methods, efficiency index.*

1. Введение

Решение нелинейного уравнения $f(x) = 0$ — классическая задача численного анализа. Аналитических методов для решения этого уравнения почти не существует. Поэтому приближенные решения можно получить только численными методами на основе итерационной процедуры (см., например, [1, 2]). Классический квадратично сходящийся метод Ньютона — самый известный среди всех одномерных методов поиска корней для решения нелинейных уравнений.

Многоточечные итерационные алгоритмы (см. [1, 4, 6] и имеющиеся там ссылки) для решения одномерных нелинейных уравнений играют важную роль в области итерационных процессов, поскольку они устраняют недостатки одноточечных итераций для повышения их вычислительной эффективности. Позднее Кунг и Трауб [3] предположили, что порядок сходимости любого многоточечного метода без памяти, требующего n функциональных вычислений, не может превышать предел 2^{n-1}, называемый оптимальным порядком. Следовательно, порядок сходимости оптимального итерационного метода без памяти, требующего трех функциональных вычислений, не может быть выше четырех. Островский [1, 5] был первым математиком, который нашел оптимальный многоточечный итерационный метод четвертого порядка без памяти. Модель, часто используемая при построении двухточечных методов, — это двойной метод Ньютона четвертого порядка, задаваемый

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \tag{1.1}$$

где $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ — итерация Ньютона.

По предположению Кунга и Трауба метод (1.1) не является оптимальным, поскольку он имеет сходимость четвертого порядка и требует выполнения четырех функциональных вычислений за одну полную итерацию. Чтобы уменьшить число функциональных вычислений с четырех до трех, в [7] Кинг использовал следующую аппроксимацию для $f'(y_n)$:

$$f'(y_n) = f'(x_n)\frac{f(x_n) + \gamma f(y_n)}{f(x_n) + \beta f(y_n)}, \tag{1.2}$$

где β и γ — свободные параметры. Подставляя эту аппроксимацию для $f'(y_n)$ и $\gamma = \beta - 2$ в формулу двойного метода Ньютона, мы получим следующее известное квадратично сходящееся семейство Кинга:

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)\big(f(x_n) + \beta f(y_n)\big)}{f'(x_n)\big(f(x_n) + (\beta - 2)f(y_n)\big)}. \tag{1.3}$$

Классические методы типа Чебышева–Хэлли, улучшающие метод Ньютона, задаются следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

где $L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'^2(x_n)}$.

Известно, что это семейство является кубически сходящимся, и некоторые известные итерационные методы могут считаться его частными случаями. Например, классический метод Чебышева (МЧ) можно получить, если $\alpha = 0$, метод Хэлли (МХ) можно получить, если $\alpha = \frac{1}{2}$, а супер-метод Хэлли (СМХ) можно получить, если $\alpha = 1$.

Эти методы связаны с вычислением производной второго порядка и они эффективны, когда стоимость этого вычисления небольшая. Однако иногда вычисление производных второго порядка обходится дорого, и их практические применения ограничены. Для исключения производной второго порядка из (1.4) в [2, 9–13] и приведенных в этих статьях ссылках предложено и проанализировано несколько вариантов методов типа Чебышева–Хэлли.

Цель данной статьи — получить некоторые, основанные на средних значениях, модификации методов типа Чебышева–Хэлли без производной второго порядка. Для каждого члена семейства необходимо иметь три функциональных вычисления, а именно $f(x_n)$, $f(y_n)$ и $f'(x_n)$ на одну полную итерацию. Показатель эффективности всех предложенных семейств $E = \sqrt[3]{4} \approx 1.587$, что лучше, чем у большинства методов третьего порядка ($E \approx 1.442$) и метода Ньютона ($E \approx 1.414$). Характеристики предложенных многоточечных методов были протестированы в ряде численных экспериментов.

2. Основные определения

Дадим некоторые определения, которые мы будем использовать.

Определение 1 (Порядок сходимости). Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню r для $f(x) = 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к r с порядком сходимости $p \in \mathbb{R}$ (≥ 1), если существует *положительная постоянная* C, такая что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^p} = C,$$

где C называется *постоянной асимптотической ошибки.*

Определение 2 (Уравнение ошибки). Пусть $e_n = x_n - r$ — ошибка на итерации n. Тогда уравнение

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

называется уравнением ошибки. Если мы можем получить уравнение ошибки для какого-нибудь итерационного метода, то p — порядок сходимости.

Определение 3 (Вычислительная эффективность). Пусть d — число новых порций информации, необходимых для метода. В соответствии со статьей Островского [5] эффективность метода измеряется при помощи понятия показателя эффективности следующим образом:

$$E = p^{\frac{1}{d}},$$

где p — порядок метода.

Определение 4. Для данных положительных действительных чисел a и b определяются хорошо известные средние:

арифметическое $$A = \frac{a+b}{2}, \tag{2.1}$$

контрагармоническое $$C = \frac{a^2+b^2}{a+b}, \tag{2.2}$$

центроидальное $$T = \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \tag{2.3}$$

3. Развитие двухточечных методов

В данном пункте мы получим несколько новых оптимальных семейств методов типа Чебышева–Хэлли на основе арифметического, контрагармонического и центроидального средних соответственно.

3.1. Семейство на основе арифметического среднего

Пусть $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ — итерация Ньютона. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора $f(y_n)$ в точке $x = x_n$: $f(y_n) \approx f(x_n) + f'(x_n)(y_n - x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(y_n - x_n)^2$, а это означает, что

$$f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2}. \tag{3.1}$$

Аналогичным образом, разложив функцию $f'(y_n) = f'\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ в ряд Тейлора в точке $x = x_n$, мы получим $f'(y_n) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(y_n - x_n)$, а затем

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\big(f'(x_n) - f'(y_n)\big). \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1) и (3.2), мы имеем

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} + \frac{f'(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{f(x_n)}\right). \tag{3.3}$$

Это новая аппроксимация производной второго порядка $f''(x_n)$, которая может считаться арифметическим средним двух функций, а именно $\frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2}$ и $\frac{f'(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{f(x_n)}$. Однако эта новая аппроксимация для $f''(x_n)$ использует четыре функциональных вычисления: $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ и $f'(y_n)$. Поэтому для сокращения числа функциональных вычислений нам следует использовать аппроксимацию Кинга. Следовательно, полагая $f'(y_n) = f'(x_n)\frac{f(x_n) + \gamma f(y_n)}{f(x_n) + \beta f(y_n)}$ и $\gamma = \beta - 2$ в правой части (3.3), мы получим следующую модифицированную аппроксимацию для $f''(x_n)$:

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} + \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2 + \beta f(x_n) f(y_n)}\right). \tag{3.4}$$

Используя приближенное значение $f''(x_n)$ из уравнения (3.4) в формуле (1.4), мы получим новое семейство методов без производной второго порядка:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{2f(x_n)^2 + \beta(1-2\alpha)f(y_n)^2 + 2(1+\beta-2\alpha)f(y_n)f(x_n)}{2\big(f(x_n)^2 + (\beta - 2\alpha)f(x_n)f(y_n) - \alpha\beta f(y_n)^2\big)}\right], \tag{3.5}$$

где α и β — свободные рабочие параметры.

Семейство (3.5) является кубически сходящимся и удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(4 + \beta - 4\alpha\Big)c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{3.6}$$

где $e_n = x_n - r$ и $c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(r)}{f'(r)}$. Поэтому метод, определяемый (3.5), не является оптимальным, поскольку он имеет сходимость третьего порядка и требует трех вычислений функции, а именно $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f'(x_n)$ для одной полной итерации. Теорема, приведенная ниже, показывает при каких рабочих параметрах в (3.5) порядок сходимости станет оптимальным (четвертого порядка) без использования дополнительных функциональных вычислений.

Теорема. *Пусть достаточно гладкая функция $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет простой нуль r в открытом интервале I. Предположим, что начальное приближение $x = x_0$ достаточно близко к $r \in I$. Тогда итерационная схема, определяемая (3.5), имеет сходимость четвертого порядка при $\beta = 4\alpha - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и удовлетворяет следующему уравнению ошибки:*

$$e_{n+1} = -c_2 \left(\left(3 - 8\alpha + 4\alpha^2\right) c_2^2 + c_3 \right) e_n^4 + O\left(e_n^5\right). \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть r — это простой нуль $f(x)$. Разлагая $f(x_n)$ и $f'(x_n)$ вблизи $x = r$ в ряд Тейлора, получим

$$f(x_n) = f'(r)\big(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4\big) + O\big(e_n^5\big) \tag{3.8}$$

и

$$f'(x_n) = f'(r)\big(1 + 2e_nc_2 + 3e_n^2c_3 + 4e_n^3c_4\big) + O\big(e_n^4\big) \tag{3.9}$$

соответственно. Из последних двух уравнений имеем

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + \big(2c_2^2 - 2c_3\big)e_n^3 + \big(- 4c_2^3 + 7c_2c_3 - 3c_4\big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big), \tag{3.10}$$

а вместе с разложением в ряд Тейлора $f(y_n) = f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ вблизи $x = r$ мы получим

$$f(y_n) = f'(r)\Big(c_2e_n^2 + \left(-2c_2^2 + 2c_3\right) e_n^3 + \left(5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4\right) e_n^4\Big) + O\big(e_n^5\big).$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_n)\big(2f(x_n)^2 + \beta(1-2\alpha)f(y_n)^2 + 2(1+\beta-2\alpha)f(x_n)f(y_n)\big)}{2f'(x_n)\big(f(x_n)^2 + (\beta-2\alpha)f(x_n)f(y_n) - \beta\alpha f(y_n)^2\big)} \\
&\quad = e_n - \frac{1}{2}(4+\beta-4\alpha)c_2^2e_n^3 + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(c_2\left(\left(18+\beta^2+\beta(7-4\alpha)-28\alpha+8\alpha^2\right)c_2^2 - 2(7+2\beta-8\alpha)c_3\right)\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3.5) и (3.11) имеем

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = {} & \frac{1}{2}\big(4+\beta-4\alpha\big)c_2^2e_n^3 - \\
& \frac{1}{2}\Big(c_2\big(\left(18+\beta^2+\beta(7-4\alpha)-28\alpha+8\alpha^2\right)c_2^2 - 2(7+2\beta-8\alpha)c_3\big)\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Для получения оптимального общего класса методов четвертого порядка коэффициент e_n^3 в уравнении ошибки (3.12) должен быть нулевым. Это означает, что $\beta = 4\alpha - 4$. Подставив это значение β в уравнение (3.12), мы получим уравнение ошибки (3.7). Это показывает, что модифицированное семейство методов типа Чебышева–Хэлли (3.5) достигает оптимального (четвертого) порядка сходимости с использованием всего трех вычислений функции на каждую полную итерацию для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Это завершает доказательство. $\square$

Общее оптимальное семейство методов. Мы получили следующее оптимальное семейство методов типа Чебышева–Хэлли на основе арифметического среднего без производных второго порядка при условиях теоремы из п. 3.1:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{f(x_n)^2 + (2\alpha - 3) f(x_n) f(y_n) - 2(1 - 3\alpha + 2\alpha^2) f(y_n)^2}{f(x_n)^2 + 2(\alpha - 2) f(x_n) f(y_n) - 4\alpha(\alpha - 1) f(y_n)^2} \right], \tag{3.13}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — свободный рабочий параметр. Для конкретных значений α имеются следующие интересные особые случаи этого семейства.

(i) При $\alpha = 1$ в (3.13) получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right]. \tag{3.14}$$

Это известный метод Островского четвертого порядка [5].

(ii) При $\alpha = \frac{3}{5}$ в (3.13) имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{25 f(x_n)^2 - 45 f(x_n) f(y_n) + 4 f(y_n)^2}{25 f(x_n)^2 - 70 f(x_n) f(y_n) + 24 f(y_n)^2} \right]. \tag{3.15}$$

Это новый оптимальный многоточечный метод четвертого порядка. Он удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{9}{25} c_2^3 - c_2 c_3 \right) e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

(iii) При $\alpha = \frac{13}{10}$ в (3.13) получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{25 f(x_n)^2 - 10 f(x_n) f(y_n) - 24 f(y_n)^2}{25 f(x_n)^2 - 35 f(x_n) f(y_n) - 39 f(y_n)^2} \right]. \tag{3.16}$$

Это еще один новый оптимальный двухточечный метод четвертого порядка. Он удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{16}{25} c_2^3 - c_2 c_3 \right) e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

Кроме того, много новых оптимальных методов можно легко получить путем выбора различных значений параметра α.

3.2. Семейство на основе контрагармонического среднего

Теперь вместо арифметического среднего возьмем контрагармоническое среднее (2.2), используя $a = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2}$ и $b = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2 + \beta f(x_n) f(y_n)}$. Тогда мы получим следующую новую аппроксимацию для $f''(x_n)$:

$$f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n) \Big(2f(x_n)^2 + 2\beta f(x_n) f(y_n) + \beta^2 f(y_n)^2 \Big)}{f(x_n)^2 \Big(2f(x_n)^2 + 3\beta f(x_n) f(y_n) + \beta^2 f(y_n)^2 \Big)}. \tag{3.17}$$

Используя это приближенное значение $f''(x_n)$ в формуле (1.4), получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times$$
$$\left[\frac{2f(x_n)^3+\beta(2+\beta-4\alpha)f(x_n)f(y_n)^2+(2+3\beta-4\alpha)f(x_n)^2f(y_n)+\beta^2(1-2\alpha)f(y_n)^3}{2f(x_n)^3+\beta(\beta-4\alpha)f(x_n)f(y_n)^2+(3\beta-4\alpha)f(x_n)^2f(y_n)-2\beta^2\alpha f(y_n)^3}\right]. \quad (3.18)$$

Семейство (3.18) сходится кубически и удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\big(4+\beta-4\alpha\big)c_2^2e_n^3 + O\big(e_n^4\big). \quad (3.19)$$

Чтобы семейство (3.18) имело сходимость четвертого порядка, мы должны иметь

$$\beta = 4\alpha - 4. \quad (3.20)$$

Используя (3.20) в (3.18), мы получим следующее уравнение ошибки:

$$e_{n+1} = -c_2\Big(\big(7-16\alpha+8\alpha^2\big)c_2^2 + c_3\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big). \quad (3.21)$$

Общее оптимальное семейство методов. Аналогичным образом получим следующее оптимальное семейство методов типа Чебышева–Хэлли на основе контрагармонического среднего без производных второго порядка при условии (3.20):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times$$
$$\left[\frac{f(x_n)^3-4f(x_n)f(y_n)^2(-1+\alpha)-8f(y_n)^3(-1+\alpha)^2(-1+2\alpha)+f(x_n)^2f(y_n)(-5+4\alpha)}{f(x_n)^3-8f(x_n)f(y_n)^2(-1+\alpha)-16f(y_n)^3(-1+\alpha)^2\alpha+2f(x_n)^2f(y_n)(-3+2\alpha)}\right]. \quad (3.22)$$

Для конкретных значений α приведем некоторые особые случаи этого семейства.

(i) Для $\alpha = 1$ семейство (3.22) сводится к известному методу Островского четвертого порядка.

(ii) Для $\alpha = \frac{3}{5}$ семейство (3.22) имеет следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{125f(x_n)^3-325f(x_n)^2f(y_n)+200f(x_n)f(y_n)^2-32f(y_n)^3}{125f(x_n)^3-450f(x_n)^2f(y_n)+400f(x_n)f(y_n)^2-192f(y_n)^3}\right]. \quad (3.23)$$

Это новый оптимальный многоточечный метод четвертого порядка. Он удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(-\frac{7}{25}c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

(iii) Подставляя $\alpha = \frac{13}{10}$ в (3.22), мы получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{125f(x_n)^3+25f(x_n)^2f(y_n)-150f(x_n)f(y_n)^2-144f(y_n)^3}{125f(x_n)^3-100f(x_n)^2f(y_n)-300f(x_n)f(y_n)^2-234f(y_n)^3}\right]. \quad (3.24)$$

Это опять новый оптимальный многоточечный метод четвертого порядка. Он удовлетворяет следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{7}{25}c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.3. Семейство на основе центроидального среднего

Возьмем центроидальное среднее (2.3), используя

$$a = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2 + \beta f(x_n) f(y_n)}.$$

Тогда мы получим другую новую аппроксимацию для $f''(x_n)$:

$$f''(x_n) \approx \frac{4f'(x_n)^2 f(y_n)\big(3f(x_n)^2 + 3\beta f(x_n)f(y_n) + \beta^2 f(y_n)^2\big)}{3f(x_n)^2\big(2f(x_n)^2 + 3\beta f(x_n)f(y_n) + \beta^2 f(y_n)^2\big)}. \tag{3.25}$$

Подставив (3.25) в (1.4), имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left[\frac{6f(x_n)^3 + 3\beta f(x_n)f(y_n)^2(2+\beta-4\alpha) + 3f(x_n)^2 f(y_n)(2+3\beta-4\alpha) + 2\beta^2 f(y_n)^3(1-2\alpha)}{6f(x_n)^3 + 3\beta(\beta-4\alpha)f(x_n)f(y_n)^2 + 3(3\beta-4\alpha)f(x_n)^2 f(y_n) - 4\beta^2\alpha f(y_n)^3}\right]. \tag{3.26}$$

Уравнение ошибки для (3.26) задается следующим образом:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}(4+\beta-4\alpha)c_2^2 e_n^3 + \left(\left(-9 - \frac{7}{12}\beta^2 + 14\alpha - 4\alpha^2 + \beta\left(-\frac{7}{2} + 2\alpha\right)\right)c_2^3 + (7+2\beta-8\alpha)c_2c_3\right)e_n^4 + O\big(e_n^5\big). \tag{3.27}$$

При условии (3.20) мы получим сходящееся семейство четвертого порядка, удовлетворяющее следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \frac{1}{3}\Big(\big(-13 + 32\alpha - 16\alpha^2\big)c_2^3 - 3c_2c_3\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

Общее оптимальное семейство методов. Рассмотрим следующее оптимальное семейство методов типа Чебышева–Хэлли на основе центроидального среднего без производных второго порядка при условии (3.20):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left[\frac{3f(x_n)^3 - 12f(x_n)f(y_n)^2(-1+\alpha) - 16f(y_n)^3(-1+\alpha)^2(-1+2\alpha) + 3f(x_n)^2 f(y_n)(-5+4\alpha)}{3f(x_n)^3 - 24f(x_n)f(y_n)^2(-1+\alpha) - 32f(y_n)^3(-1+\alpha)^2\alpha + 6f(x_n)^2 f(y_n)(-3+2\alpha)}\right]. \tag{3.28}$$

Для конкретных значений α рассмотрим некоторые особые случаи этого семейства.

(i) Для $\alpha = 1$ семейство (3.28) сводится к известному методу Островского четвертого порядка.

(ii) При $\alpha = \frac{3}{5}$ семейство (3.28) имеет следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{375f(x_n)^3 - 975f(x_n)^2 f(y_n) + 600f(x_n)f(y_n)^2 - 64f(y_n)^3}{3\big(125f(x_n)^3 - 450f(x_n)^2 f(y_n) + 400f(x_n)f(y_n)^2 - 128f(y_n)^3\big)}\right]. \tag{3.29}$$

Это новый оптимальный многоточечный метод четвертого порядка, имеющий следующее уравнение ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{11}{75}c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

(iii) Подставляя $\alpha = \dfrac{13}{10}$ в семейство (3.28), получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{125f(x_n)^3 + 25f(x_n)^2 f(y_n) - 150f(x_n)f(y_n)^2 - 96f(y_n)^3}{125f(x_n)^3 - 100f(x_n)^2 f(y_n) - 300f(x_n)f(y_n)^2 - 156f(y_n)^3} \right]. \tag{3.30}$$

Это еще один новый оптимальный многоточечный метод четвертого порядка, удовлетворяющий следующему уравнению ошибки:

$$e_{n+1} = \left(\frac{13}{25} c_2^3 - c_2 c_3 \right) e_n^4 + O\big(e_n^5\big).$$

Замечание. Показатели эффективности всех предложенных семейств $E = \sqrt[3]{4} \approx 1.587$. Это значение лучше, чем для большинства методов третьего порядка ($E \approx 1.442$) и метода Ньютона ($E \approx 1.414$).

4. Численные эксперименты

В данном пункте мы используем новые методы (3.15), (3.16), (3.23), (3.24), (3.29) и (3.30), обозначенные ACHM_4^1, ACHM_4^2, CCHM_4^1, CCHM_4^2, CTCHM_4^1 и CTCHM_4^2 соответственно, для решения некоторых нелинейных уравнений, приведенных в таблицах 1–4, чтобы проверить правильность и эффективность теоретических результатов. Сравним их с методами Ньютона (NM_2), Островского (OM_4), Кинга (KM_4) для $\beta = 1/2$, Чуна и Хама [10] (CHM_4), а также Коу [11] (KUM_4). Все вычисления были выполнены с использованием пакета программ *Mathematica* 9 в арифметике многократной точности. Используем $\epsilon = 10^{-34}$ в качестве допустимой ошибки. Для компьютерных программ используются следующие критерии остановки: $|f(x_n)| < \epsilon$.

Таблица 1. Тестовые функции

$f(x)$	r	$[a, b]$
$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$	1.3652300134140968457608068289816661	[1, 2]
$f_2(x) = \cos x - x$	0.7390851332151606416553120876738734	[0, 1]
$f_3(x) = (x-1)^3 - 1$	2.0000000000000000000000000000000000	[1.5, 2.5]
$f_4(x) = x^3 - \sin^2 x + 3\cos x + 5$	−1.5826870457520699011297569854554993	[−2, −1]
$f_5(x) = e^{-x} + \cos x$	1.7461395304080124176507030889537802	[1, 2]
$f_6(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$	0.2575302854398607604553673049372418	[0, 1]
$f_7(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	3.0000000000000000000000000000000000	[2.8, 3.5]
$f_8(x) = \sin x$	0.0000000000000000000000000000000000	[−0.6, 0.5]

Таблица 2. Сравнение различных итерационных методов четвертого порядка и метода Ньютона в зависимости от числа итераций

$f(x)$	Нач. прибл.	NM_2	OM_4 $\beta=0$	KM_4 $\beta=\frac{1}{2}$	KUM_4	CHM_4	$ACHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$ACHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CTCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CTCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$
$f_1(x)$	1	7	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4
	2	7	4	5	4	5	4	4	4	4	4	4
$f_2(x)$	0	7	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
	1	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$f_3(x)$	1.5	9	5	6	15	10	5	5	5	5	5	5
	2.5	8	5	5	5	5	4	5	4	4	4	4
$f_4(x)$	-2	7	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	-1	7	4	5	5	5	4	4	4	4	4	4
$f_5(x)$	1	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	2	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$f_6(x)$	0	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	1	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$f_7(x)$	2.8	19	7	D	D	D	5	7	6	7	5	7
	3.5	14	7	8	8	8	6	7	6	6	6	7
$f_8(x)$	-0.6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	0.5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

(D — расходящийся)

Таблица 3. Порядок сходимости при вычислении различных итерационных методов четвертого порядка и метода Ньютона

$f(x)$	Нач. прибл.	NM_2	OM_4 $\beta=0$	KM_4 $\beta=\frac{1}{2}$	KUM_4	CHM_4	$ACHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$ACHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CTCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CTCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$
$f_1(x)$	1	2.0000	3.9998	3.9990	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0003	3.9979	4.0002	4.0000
	2	2.0000	3.9995	4.0000	3.9845	4.0000	4.0001	3.9999	4.0003	4.0030	3.9999	4.0001
$f_2(x)$	0	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.9996	3.9996	3.9999	4.0001	3.9999	3.9998
	1	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
$f_3(x)$	1.5	2.0000	4.0000	3.9994	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.9995	4.0000	4.0002
	2.5	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0044	4.0000	4.0011	3.9866	3.9994	4.0019
$f_4(x)$	-2	2.0000	4.0000	3.9999	3.9997	3.9998	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
	-1	2.0000	3.9993	3.9971	4.0000	3.9943	4.0001	4.0000	4.0002	4.0005	4.0000	4.0001
$f_5(x)$	1	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
	2	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
$f_6(x)$	0	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
	1	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
$f_7(x)$	2.8	2.0000	4.0000	nd	nd	nd	4.0003	3.9999	4.0000	4.0000	4.0004	4.0000
	3.5	2.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.9999	4.0000	4.0000	4.0001	4.0003	4.0000	4.0000
$f_8(x)$	-0.6	3.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
	0.5	3.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000

(nd — расходящийся)

Таблица 4. Сравнение различных итерационных методов четвертого порядка и метода Ньютона при одинаковом общем числе функциональных вычислений (TNFE $=12$)

$f(x)$	Нач. прибл.	NM_2	OM_4 $\beta=0$	KM_4 $\beta=\frac{1}{2}$	KUM_4	CHM_4	$ACHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$ACHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$	$CTCHM_4^1$ $\alpha=\frac{3}{5}$	$CTCHM_4^2$ $\alpha=\frac{13}{10}$
$f_1(x)$	1	3.98e−43	2.45e−186	3.22e−147	1.58e−123	6.21e−129	1.48e−342	2.18e−247	1.65e−189	2.58e−227	2.76e−234	2.19e−250
	2	1.24e−37	3.67e−162	1.46e−138	1.50e−164	9.75e−126	1.69e−210	1.29e−177	2.14e−194	6.68e−216	1.27e−242	4.58e−185
$f_2(x)$	0	1.51e−41	5.49e−141	5.96e−114	2.92e−77	1.36e−100	1.11e−169	2.56e−171	3.71e−194	2.25e−191	3.68e−190	3.06e−193
	1	3.00e−83	7.05e−296	1.83e−286	5.40e−305	3.90e−279	6.59e−304	5.35e−300	1.87e−314	1.09e−304	4.60e−307	1.73e−301
$f_3(x)$	1.5	1.81e−11	9.72e−60	3.69e−10	5.66e+4	4.98e+1	2.67e−132	6.37e−46	3.28e−58	8.93e−61	2.60e−81	1.36e−51
	2.5	3.88e−28	1.25e−122	1.41e−100	3.02e−128	4.78e−89	3.87e−180	1.06e−137	2.01e−154	1.64e−167	1.08e−190	1.71e−145
$f_4(x)$	−2	2.46e−54	4.89e−245	4.82e−208	4.31e−244	6.98e−191	1.12e−302	2.04e−281	1.25e−229	2.88e−296	5.35e−260	4.22e−312
	−1	7.02e−38	3.33e−165	8.89e−125	3.24e−82	5.14e−107	4.78e−279	1.59e−255	6.60e−168	1.94e−188	2.20e−210	3.79e−219
$f_5(x)$	1	3.22e−100	2.41e−265	5.97e−264	5.49e−267	9.77e−263	2.32e−266	6.66e−266	1.68e−267	1.70e−266	1.00e−266	4.27e−266
	2	9.24e−85	1.05e−279	2.52e−270	3.80e−306	8.59e−263	7.41e−287	7.37e−284	6.93e−296	1.30e−288	1.31e−289	2.31e−285
$f_6(x)$	0	5.99e−100	1.09e−352	1.69e−366	3.40e−345	8.13e−390	7.26e−346	8.14e−349	3.74e−340	2.50e−345	7.40e−344	1.29e−347
	1	2.61e−94	6.63e−258	7.02e−260	2.92e−256	2.62e−262	8.36e−257	2.84e−257	8.39e−256	1.12e−256	1.85e−256	4.52e−257
$f_7(x)$	2.8	1.46e+3	3.09e−6	D	D	D	7.18e−65	4.14e−61	2.88e−40	1.00e−58	3.25e−53	4.27e−83
	3.5	1.56e+1	3.82e−4	9.20e−2	1.62e−1	3.85e−1	1.56e−19	4.42e−8	3.44e−11	5.04e−12	8.19e−16	5.25e−8
$f_8(x)$	−0.6	1.38e−319	1.97e−320	2.71e−308	1.66e−398	4.46e−298	2.16e−328	8.64e−326	1.08e−337	1.06e−331	2.53e−331	1.08e−327
	0.5	1.10e−382	1.80e−374	7.22e−366	5.48e−401	3.13e−358	4.30e−380	5.16e−378	2.34e−386	8.51e−382	4.21e−382	3.02e−379

(D — расходящийся)

5. Области притяжения в комплексной плоскости

Сравним полученные определители простых корней в комплексной плоскости с использованием областей притяжения. Как известно, соответствующий фрактал итерационного метода отыскания корней — это граничное множество в комплексной плоскости, характеризуемое итерационным методом, применяемым к фиксированному многочлену $p(z)$ (см., например, [12, 13]). Наша цель — использовать область притяжения как еще один способ сравнения итерационных методов.

Используем динамическую точку зрения. Возьмем прямоугольник $D = [-2, 2] \times [-2, 2] \in \mathbb{C}$ и установим цвет для каждой точки $z_0 \in D$, соответствующей простому корню, в которой сходится соответствующий итерационный метод, начиная с z_0. Если метод не сходится, цвет точки — черный. Рассмотрим критерий остановки, когда сходимость меньше 10^{-4}. Считается, что максимальное число полных циклов для каждого метода — 150. Таким образом, мы различаем области притяжения различных методов по цветам.

Мы использовали семейства методов Ньютона, Островского и Кинга при $\beta = 1$: (3.15), (3.16), (3.23), (3.24), (3.29) и (3.30) для двух многочленов с простыми нулями. Тесты и их корни следующие: $p_1(z) = z^3 + 2z - 1$, корни: $-1.46771 + 0.226699\mathrm{I}$, $-0.453398\mathrm{I}$, $1.46771 + 0.226699\mathrm{I}$ (тест 1); $p_2(z) = z^6 - 1$, а решения: $\{-1, -0.5 - 0.866025\mathrm{I}$, $-0.5 + 0.866025\mathrm{I}$, $0.5 - 0.866025\mathrm{I}$, $0.5 + 0.866025\mathrm{I}$, $1\}$ (тест 2).

На основании рисунков 1–6 мы можем заключить, что новые методы имеют большие области притяжения, хотя метод Ньютона является медленным и имеет темные области, тогда как методы типа (3.24) слишком чувствительны к выбору начального значения.

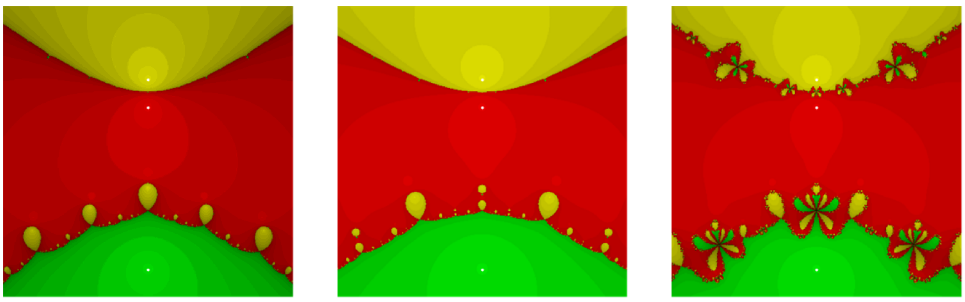

Рис. 1. Области притяжения семейств методов в тесте 1: Ньютона (слева), Островского (в центре), Кинга при $\beta = 1$ (справа)

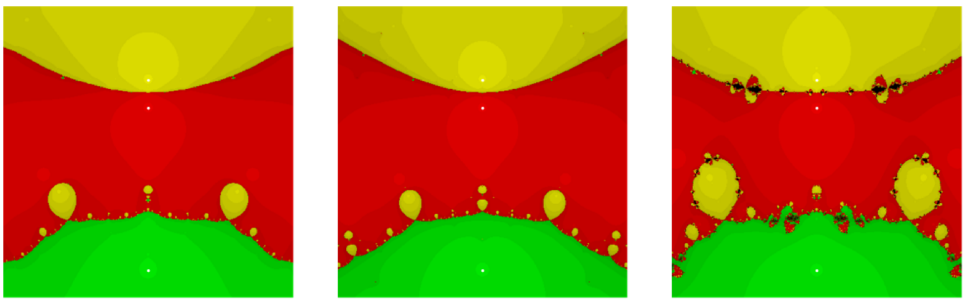

Рис. 2. Области притяжения для (3.15) (слева), (3.16) (в центре) и (3.23) (справа) в тесте 1

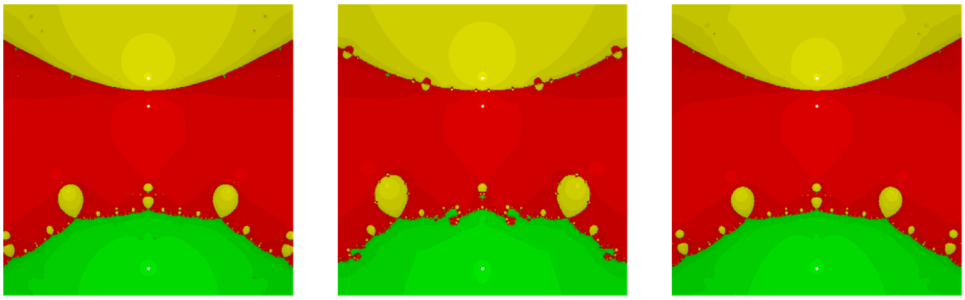

Рис. 3. Области притяжения для (3.24) (слева), (3.29) (в центре) и (3.30) (справа) в тесте 1

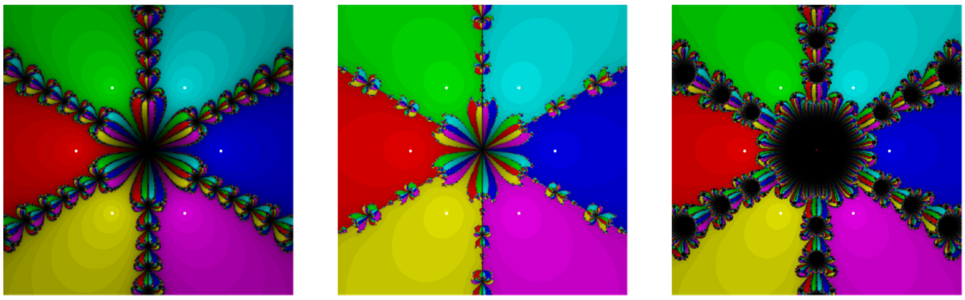

Рис. 4. Области притяжения семейств методов в тесте 2: Ньютона (слева), Островского (в центре), Кинга при $\beta = 1$ (справа)

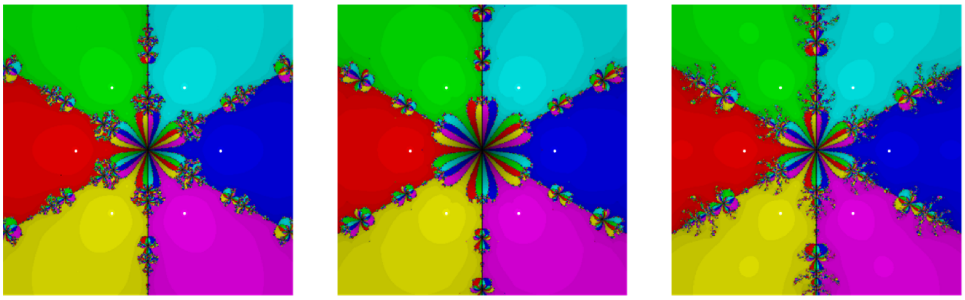

Рис. 5. Области притяжения для (3.15) (слева), (3.16) (в центре) и (3.23) (справа) в тесте 2

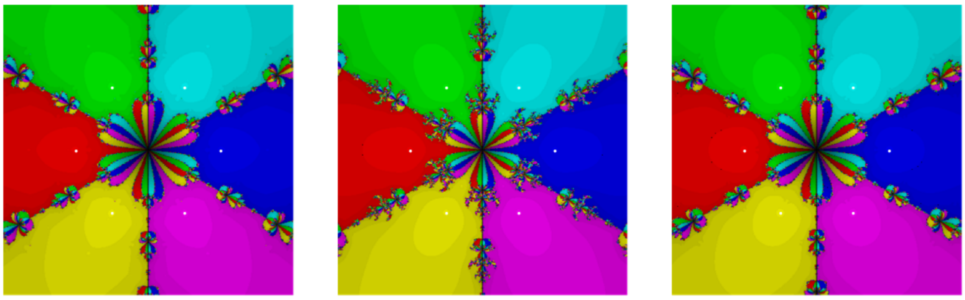

Рис. 6. Области притяжения для (3.24) (слева), (3.29) (в центре) и (3.30) (справа) в тесте 2

Известно, что область притяжения используется для визуального определения поведения алгоритма как функции различных начальных точек. Представленные области притяжения также продемонстрировали точность метода в зависимости от выбора начального приближения. Из рис. 1–6 видно, что наши методы, а именно (3.15), (3.16), (3.23), (3.24), (3.29) и (3.30), имеют меньше расходящихся точек, чем другие методы и, следовательно, большие области притяжения. Примечательно, что во второй тестовой задаче семейство Кинга имеет больше расходящихся точек (черная область), но наши методы ведут себя по-другому.

6. Выводы

В данной статье мы внесли дополнительный вклад в разработку теории итерационных процессов и предложили несколько семейств методов типа Чебышева–Хэлли без второй производной на основе различных средних значений. В соответствии с предположением Кунга–Трауба все эти семейства методов имеют максимальный показатель эффективности, поскольку необходимо иметь только три функциональных вычисления на каждый шаг. Можно сказать, что для рассматриваемых тестовых функций наши методы работают хорошо, по сравнению с другими методами, с точки зрения скорости сходимости, а также имеют довольно небольшие невязки. И наконец, на основании полученных результатов можно заключить, что предложенные методы являются эффективными в высокопрецизионной вычислительной среде. Кроме того, были проведены исследования на комплексной плоскости для таких методов, чтобы определить их области притяжения для решения нелинейных уравнений с соответствующими фракталами.

Благодарности. Мы хотели бы выразить благодарность анонимному рецензенту за ценные комментарии и предложения по улучшению качества статьи.

Литература

1. **Petković M.S., Neta B., Petković L.D., and Dzunić J.** Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations. — Elsevier, 2012.
2. **Chun C., Neta B.** Some modification of Newton's method by the method of undetermined coefficients // Comput. Math. Appl. — 2008. — Vol. 56. — P. 2528–2538.
3. **Kung H.T., Traub J.F.** Optimal order of one-point and multipoint iteration // J. of the Association for Computing Machinery. — 1974. — Vol. 21. — P. 643–651.
4. **Soleymani F., Sharifi M., and Mousavi B.S.** An improvement of Ostrowski's and King's techniques with optimal convergence order eight // J. Optim. Theory Appl. — 2012. — Vol. 153. — P. 225–236.
5. **Ostrowski A. M.** Solution of Equations and Systems of Equations. — New York: Academic Press, 1960.
6. **Chun C., Lee M.Y., Neta B., and Dzunic J.** On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics // Appl. Math. Comput. — 2012. — Vol. 218. — P. 6427–6438.
7. **King R.F.** A family of fourth order methods for nonlinear equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — Vol. 10. — P. 876–879.
8. **Gutiérrez J.M., Hernández M.A.** A family of Chebyshev–Halley type methods in Banach spaces // Bull. Austral. Math. Soc. — 1997. — Vol. 55. — P. 113–130.
9. **Hernández M.A.** Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — Vol. 104. — P. 501–515.

10. **Chun C., Ham Y.M.** Some fourth-order modifications of Newton's method // Appl. Math. Comput. — 2008. — Vol. 197. — P. 654–658.
11. **Kou J.** Second-derivative-free variants of Cauchy's method // Appl. Math. Comput. — 2007. — Vol. 190. — P. 339–344.
12. **Scott M., Neta B., and Chun C.** Basin attractors for various methods // Appl. Math. Comput. — 2011. — Vol. 218. — P. 2584–2599.
13. **Neta B., Scott M., and Chun C.** Basins of attraction for several methods to find simple roots of nonlinear equations // Appl. Math. Comput. — 2012. — Vol. 218. — P. 10548–10556.

Поступила в редакцию 28 июля 2015 г.,
в окончательном варианте 10 сентября 2015 г.