

УДК 539.532

РАСТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ, СОПРОВОЖДАЮЩЕЕСЯ ВПИТЫВАНИЕМ В ГРУНТ

В. Ш. Шагапов, С. А. Гильманов*

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450025 Уфа

* Филиал Уфимского государственного авиационного технического университета

в г. Стерлитамаке, 453104 Стерлитамак

E-mail: salawatt@mail.ru

В квазиоднмерном приближении построена полуэмпирическая теория растекания жидкости под действием силы тяжести, сопровождающегося впитыванием в грунт. Рассмотрены некоторые особенности растекания с учетом характера растительности. В предположении, что зависимость силы сопротивления от скорости растекания является линейной или квадратичной, система уравнений движения жидкости при наличии густой и редкой растительности сведена к одному нелинейному уравнению. Получены приближенные аналитические решения для источников, имеющих постоянную мощность. Проанализирована ситуация, когда растительность отсутствует и, следовательно, гидравлическое сопротивление поверхности определяется особенностями грунта.

Ключевые слова: растекание, впитывание, закон Маннинга, безынерционное приближение, растительность.

Введение. Явление растекания жидкостей вдоль поверхности, сопровождающееся впитыванием, широко распространено в природе и используется в различных технологических процессах. Интерес к исследованию этого явления обусловлен необходимостью проведения анализа масштабов загрязнения при аварийных выбросах высокотоксичных или легковоспламеняющихся углеводородных жидкостей.

Представляется, что при постоянной интенсивности выбросов растекание происходит в основном в безынерционном режиме, когда градиент напора, определяемый толщиной слоя жидкости, уравнивается силой гидравлического трения о грунт с учетом наличия растительности. Фильтрация жидкости в грунт учитывается в безнапорном приближении. В соответствии с этим допущением полагается, что жидкость в грунте течет только в вертикальном направлении с постоянной скоростью, причем сила тяжести и сила сопротивления грунта уравновешены. Далее часть жидкости, находящейся на поверхности грунта, будем называть лужей.

1. Основные уравнения. Уравнение неразрывности в случае радиального растекания жидкости по горизонтальной поверхности запишем в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rhv) = -u. \quad (1.1)$$

Здесь h — толщина слоя жидкости (глубина лужи); v — средняя по высоте скорость растекания лужи; u — скорость фильтрации в грунт. В приближении теории мелкой воды уравнение импульсов имеет вид [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -g \frac{\partial h}{\partial r} - f - \frac{\tau}{h}, \quad (1.2)$$

где f, τ — соответственно силы сопротивления со стороны растительности и поверхности грунта, отнесенные на единицу толщины слоя жидкости; g — ускорение свободного падения. В соответствии с принятым выше допущением для скорости фильтрации в грунт и глубины H , на которую влага впитывается в грунт, можно записать соотношения

$$u = k\rho g/\mu, \quad H(r, t) = u(t - t'(r))/m, \quad (1.3)$$

где ρ, μ — плотность и динамическая вязкость жидкости; m, k — пористость и коэффициент проницаемости грунта; $t'(r)$ — момент времени, в который радиус переднего фронта лужи, движущегося по поверхности грунта, достигает значения r .

Для замыкания системы (1.1), (1.2) необходимо задать зависимость сил сопротивления f, τ от скорости растекания v . Задавая f , рассмотрим два предельных случая густой и редкой растительности. В случае густой растительности, когда имеют место достаточно малые скорости растекания, по аналогии с теорией подземной гидравлики примем линейный закон сопротивления

$$f = v/t_v, \quad (1.4)$$

где t_v — эмпирический параметр (имеющий размерность времени), зависящий от свойств растительности (густоты, линейных размеров элементов растительности) и вязкости жидкости. В предельном случае редкой растительности примем квадратичный закон в виде

$$f = v^2/r_v. \quad (1.5)$$

Здесь r_v — эмпирический параметр, имеющий размерность длины. В частности, если принять, что стебли растений представляют собой тела цилиндрической формы, то, используя формулы для скорости поперечного обтекания цилиндров при больших числах Рейнольдса, получаем

$$r_v \sim \chi/(nd),$$

где d — характерный диаметр стебля; n — количество стеблей на единицу площади; $\chi \approx 1$ — безразмерный параметр.

Сила сопротивления со стороны поверхности грунта задается в виде

$$\tau = \lambda v^2. \quad (1.6)$$

При задании коэффициента сопротивления λ обычно используются две схемы. Согласно первой схеме [2] коэффициент λ является постоянным ($\lambda = \text{const}$). В частности, для ровного поля $\lambda = (1,4 \div 2,5) \cdot 10^{-3}$. При использовании второй схемы примем закон Маннинга [3, 4]. Тогда для коэффициента сопротивления имеет место соотношение

$$\lambda = \sqrt[3]{h_0/h}, \quad (1.7)$$

где h_0 — эмпирический параметр, имеющий размерность длины, который характеризует шероховатость поверхности грунта.

Выполним оценки для слагаемых в уравнении импульсов (1.2). Пусть h_*, r_*, t_* — характерные линейные масштабы (толщина, радиус растекания) лужи и время процесса. Характерные скорости растекания для рассматриваемой системы ограничены величиной скорости “звука” $C_* = \sqrt{h_*g}$. Поэтому при оценке слагаемых, содержащих скорость v , в качестве характерного перепада скорости используется величина C_* . Тогда для слагаемых, входящих в (1.2), с учетом (1.4)–(1.6) можно записать оценки

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{\sqrt{h_*g}}{t_*} \sim \frac{h_*g}{r_v}, \quad v \frac{\partial v}{\partial r} \sim \frac{h_*g}{2r_*} \sim \frac{h_*g}{r_v}; \quad (1.8)$$

$$\frac{\tau}{h} \sim \lambda g, \quad f \sim \frac{\sqrt{h_*g}}{t_v} \quad \text{или} \quad f \sim \frac{h_*g}{r_v}. \quad (1.9)$$

Отсюда получаем оценки $t_* \sim r_v/\sqrt{gh_*}$, $r_* \sim r_v/2$ для закона сопротивления (1.5), оценки $t_* \sim h_*/(\lambda\sqrt{gh_*})$, $r_* \sim h_*/(2\lambda)$ для закона сопротивления (1.6) и $t_* \sim h_*^{4/3}/(h_0^{1/3}\sqrt{gh_*})$, $r_* \sim h_*^{4/3}/(2h_0^{1/3})$ для закона сопротивления (1.7).

Если в рассматриваемой задаче возникают течения, при которых представляющие практический интерес времена и расстояния значительно превышают характерные масштабы t_* и r_* ($t \gg t_*$, $r \gg r_*$), то инерционные эффекты не будут оказывать значительного влияния на процесс растекания жидкости (исключение составляют некоторые узкие зоны вблизи источника и малые времена, например на начальном этапе). В частности, в случае когда интенсивность выбросов постоянна, процесс растекания выходит на стационарный режим с постоянным радиусом лужи. Для времени выхода на такой режим и предельного радиуса лужи также должны выполняться полученные оценки.

Далее рассматриваются только такие течения, для которых силы инерции несущественны, т. е. слагаемые (1.8) в уравнении импульсов значительно меньше слагаемых (1.9). Эти допущения означают, что в основной зоне течения и в интервалах времен, представляющих интерес в рассматриваемой задаче, неучтенные слагаемые по порядку величин должны быть значительно меньше слагаемых, удерживаемых в теоретической модели.

Так же как и любое упрощение и идеализация, пренебрежение силами инерции (как и в теории фильтрации) вносит в теоретическую модель определенные дефекты, но они должны появляться лишь в более узких зонах и на меньших временах по сравнению с представляющими интерес характерными расстояниями и временами.

Пусть в исходном состоянии грунт является "чистым" ($h = H = 0$) и в момент времени $t = 0$ начинает функционировать точечный источник с постоянной мощностью Q . Тогда с учетом принятых выше допущений можно записать следующие начальное и граничное условия:

$$\begin{aligned} h &= 0 & (t = 0, \quad r > 0), \\ (2\pi rhv + \pi r^2 u)|_{r=r_C} &= Q & (t > 0, \quad r_C \rightarrow 0), \\ h &= 0 & (t > 0, \quad r \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Допущение $r_C \rightarrow 0$ означает, что линейными размерами источника выбросов пренебрегается (т. е. представляют интерес расстояния, значительно превышающие эти размеры). Поскольку согласно принятым допущениям и формуле (1.3) величина u является конечной, из условия (1.10) следует

$$(2\pi rhv)|_{r=r_C} = Q \quad (t > 0, \quad r_C \rightarrow 0).$$

2. Приближенные решения. Рассмотрим случай, когда на процесс растекания наибольшее влияние оказывает растительность. Пренебрегая силой сопротивления о поверхность грунта, на основе уравнений (1.1), (1.2) с учетом (1.4), (1.5) получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gt_v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u \quad (2.1)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \sqrt{-gr_v} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u. \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к решению нелинейных уравнений теплопроводности (2.1), (2.2) при начальном и граничном условиях (1.8)–(1.10).

Как известно, решение уравнений (2.1), (2.2) для h при начальном условии (1.10) выходит на нулевое значение при конечной координате r ($h = 0$ при $r = l(t)$, $l(t) < \infty$) [5, 6], что обусловлено нелинейностью уравнения теплопроводности вида (2.1). Тем не менее граничное условие принято задавать в виде третьего соотношения из (1.10), предполагая непрерывность h и гидродинамических потоков. Однако при этом производные h по скорости могут иметь разрывы.

В инженерных расчетах для решения уравнений теплопроводности весьма эффективным является приближенный метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС) [7, 8]. Как показано в [1], в тех случаях, когда в задаче имеет место автомодельность, точное автомодельное решение и решение, полученное методом ПССС, различаются не более чем на 20 %. Поскольку в данном случае в уравнении (2.2) появляется дополнительное слагаемое u , вклад слагаемого $\partial h/\partial t$ вследствие нестационарности еще более уменьшается. Очевидно, поэтому учет процесса впитывания в грунт не должен привести к дополнительному уменьшению точности метода ПССС.

Суть метода ПССС заключается в следующем. Полагается, что в любой момент времени распределение толщины слоя жидкости аналогично ее распределению в стационарном случае. Иными словами, с помощью стационарных решений строятся сплайны (аналитические формулы) для представления приближенных решений исходной задачи. Формулы для этих сплайнов можно получить из уравнений (2.1), (2.2), полагая, что их левые части равны нулю ($\partial h/\partial t = 0$). Решения этих уравнений, удовлетворяющие помимо условий (1.10) условию $h = 0$ при $r = l(t)$, имеют вид

$$h = \frac{1}{\sqrt{gt_v}} \sqrt{\frac{Q}{\pi} \ln\left(\frac{l(t)}{r}\right) - \frac{u(l(t)^2 - r^2)}{2}} \quad (0 < r \leq l(t)),$$

$$h = 0 \quad (l(t) < r < \infty)$$
(2.3)

или

$$h = \frac{1}{\sqrt[3]{gr_v}} \sqrt[3]{\left(\frac{3Q^2}{4\pi^2 l(t)r} - \frac{3Qu}{2\pi}\right)(l(t) - r) + \frac{u^2(l(t)^3 - r^3)}{4}} \quad (0 < r \leq l(t)),$$

$$h = 0 \quad (l(t) < r < \infty).$$
(2.4)

При этом неизвестный закон распространения переднего фронта лужи $l(t)$ определяется на основе уравнения общего баланса объема жидкости, имеющего вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} 2\pi r h dr + \pi l(t)^2 u = Q.$$
(2.5)

Подставляя в (2.5) выражения для h из (2.3) или (2.4), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения $l(t)$:

$$A \frac{dl(t)}{dt} = B.$$
(2.6)

Для коэффициентов A и B имеют место выражения

$$A = l(t) \int_0^1 \frac{(8Q \ln(1/R) - 6\pi ul(t)^2(1 - R^2))R}{\sqrt{4Q \ln(1/R) - 2\pi ul(t)^2(1 - R^2)}} dR,$$

$$B = \sqrt{gt_v/\pi} (Q - \pi ul(t)^2), \quad R = r/l(t)$$

или

$$A = l(t)^{2/3} \int_0^1 \frac{(10Q^2 - 28\pi Qul(t)^2 R)(1 - R)R^{2/3} + 6\pi u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R^{5/3}}{((3Q^2 - 6\pi Qul(t)^2)(1 - R)R + \pi u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R)^{2/3}} dR,$$

$$B = (Q - \pi ul(t)^2) / \sqrt[3]{4\pi^5 gr_v}.$$

В случае отсутствия растительности ($f = 0$) в рамках первой и второй схем учета сил сопротивления со стороны грунта дифференциальные уравнения, аналогичные (2.1), (2.2), записываются в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \sqrt{-\frac{gh}{\lambda}} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u \quad (2.7)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \sqrt{-\frac{gh^{4/3}}{\sqrt[3]{h_0}}} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u. \quad (2.8)$$

На основе этих уравнений для глубины лужи находим выражения

$$h = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{g} \left(\frac{3Q^2}{\pi^2} \frac{l(t) - r}{l(t)r} - \frac{2Qu(l(t) - r)}{\pi} + \frac{u^2(l(t)^3 - r^3)}{3} \right)} \quad (0 < r \leq l(t)), \quad (2.9)$$

$$h = 0 \quad (l(t) < r < \infty)$$

или

$$h = \left(\frac{13h_0^{1/3}}{36g} \right)^{3/13} \left(\frac{3Q^2}{\pi^2} \frac{l(t) - r}{l(t)r} - \frac{6Qu(l(t) - r)}{\pi} + u^2(l(t)^3 - r^3) \right)^{3/13} \quad (0 < r \leq l(t)), \quad (2.10)$$

$$h = 0 \quad (l(t) < r < \infty).$$

Подставляя в (2.5) выражения (2.9), (2.10), получаем дифференциальное уравнение, аналогичное (2.6). Для коэффициентов A и B имеют место следующие выражения:

$$A = l(t)^{3/4} \int_0^1 \frac{(7Q^2 - 18\pi Qul(t)^2 R)(1 - R)R^3 + 11\pi^2 u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R^{4/3}}{2((Q^2 - 2\pi Qul(t)^2 R)(1 - R)R^3 + \pi^2 u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R^{4/3})^{3/4}} dR,$$

$$B = (Q - \pi ul(t)^2) \sqrt[4]{g/(\lambda\pi^2)}$$

или

$$A = l(t)^{10/13} \int_0^1 \frac{(299Q^2/(6\pi) - 377Qul(t)^2 R/3)b + 455\pi u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R^{13/3}/18}{((13Q^2/(12\pi^2) - 13Qul(t)^2 R/(6\pi))b + 13u^2 l(t)^4 (1 - R^3)R^{13/3}/36)^{10/3}} dR,$$

$$B = (Q - \pi ul(t)^2) \sqrt[13]{g^3/(h_0\pi^7)}, \quad b = (1 - R)R^{10/3}.$$

Поскольку построенные решения уравнения h не удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), они имеют некоторый дефект: для этих решений не выполняется условие непрерывности потока массы на границе $r = l(t)$. Для точного решения отмеченных дифференциальных уравнений из закона сохранения массы на этой границе следует условие

$2\pi(rhv) = 0$ при $r = l(t)$. Так как указанный дефект оказывает влияние на решение в окрестности $r = l(t)$, то для определения $l(t)$ и функции h в основной зоне течения он, по-видимому, несуществен.

3. Результаты расчетов. На рис. 1 показано влияние растительности на растекание воды от источника, мощность которого равна $Q = 0,1 \text{ м}^3/\text{с}$. Сплошные линии соответствуют случаю редкой растительности с характерным параметром $r_v = 0,6 \text{ м}$ ($n = 900 \text{ м}^{-2}$, $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$), штриховые — случаю отсутствия растительности. При этом $t_* \approx 1 \text{ с}$, $r_* \approx 0,3 \text{ м}$. Для безразмерного параметра, характеризующего сопротивление грунта, принято значение $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-3}$. При этом $t_* \approx 6 \text{ с}$, $r_* \approx 1 \text{ м}$.

Из анализа результатов расчетов следует, что с увеличением времени форма лужи становится стационарной с некоторым максимальным значением радиуса $l^{(m)}$, определяемым по формуле $\pi l^{(m)2} u = Q$. В рассматриваемом случае максимальный радиус составляет $l^{(m)} \approx 10 \text{ м}$, а характерные времена достижения этого радиуса — $t^{(m)} = 7,5 \text{ мин}$ в случае наличия растительности и $t^{(m)} = 1 \text{ мин}$ в случае ее отсутствия. В расчетах для параметров, определяющих свойства грунта и воды, использовались следующие значения: $m = 0,1$, $k = 3 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, $\mu = 10^{-3} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$, $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Из рис. 1 следует, что для h справедлива гипотеза о несущественном влиянии сил инерции во всей рассматриваемой области, за исключением небольшой зоны вблизи источника.

На рис. 2 приведена зависимость положения границы лужи от времени в случае наличия редкой растительности и в случае ее отсутствия. Значения параметров, определяющих свойства грунта и воды, те же, что и на рис. 1.

На рис. 3 показано влияние коэффициента проницаемости грунта на закон движения границы лужи при $Q = 0,1 \text{ м}^3/\text{с}$. Видно, что с увеличением проницаемости радиус лу-

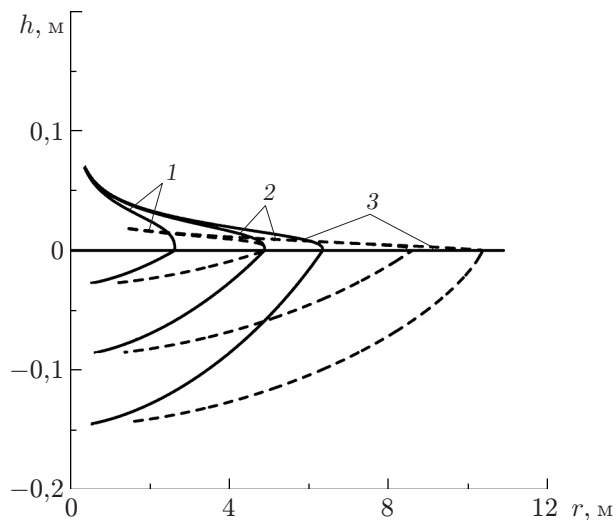


Рис. 1

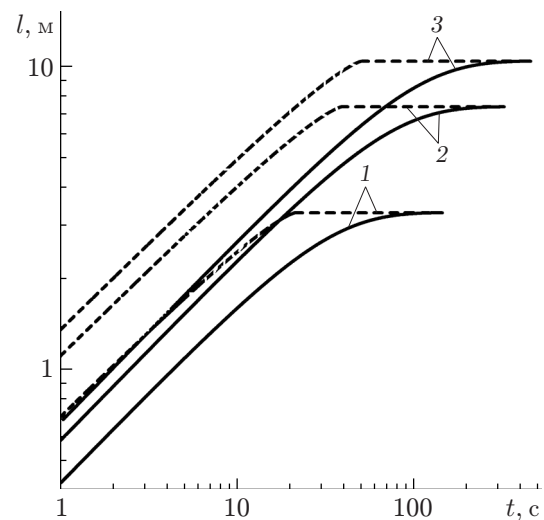


Рис. 2

Рис. 1. Влияние растительности на растекание жидкости:

сплошные линии — наличие редкой растительности, штриховые — отсутствие растительности; 1 — $t = 10 \text{ с}$, 2 — $t = 30 \text{ с}$, 3 — $t = 50 \text{ с}$

Рис. 2. Зависимость положения границы лужи от времени при различных значениях мощности источника:

сплошные линии — наличие редкой растительности, штриховые — отсутствие растительности; 1 — $Q = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$, 2 — $Q = 0,05 \text{ м}^3/\text{с}$, 3 — $Q = 0,10 \text{ м}^3/\text{с}$

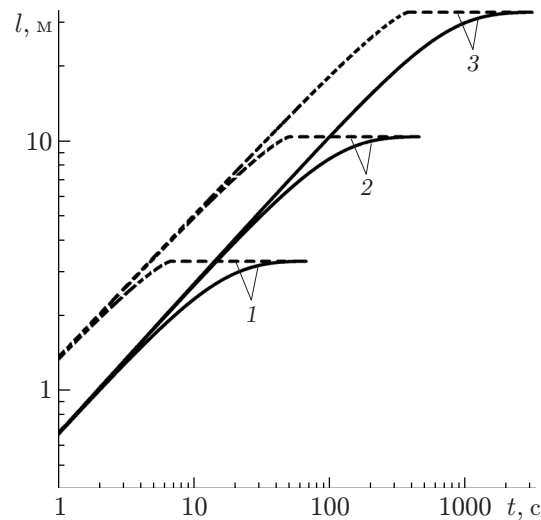


Рис. 3. Влияние коэффициента проницаемости на закон движения границы лужи: сплошные линии — наличие редкой растительности, штриховые — отсутствие растительности; 1 — $k = 3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, 2 — $k = 3 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$, 3 — $k = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$

жи уменьшается, причем предельный радиус лужи изменяется обратно пропорционально корню квадратному из величины коэффициента проницаемости.

Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Наличие на грунте растительности приводит к значительному уменьшению скорости распространения лужи от объемного источника. В частности, за счет наличия растительности время выхода радиуса лужи на его предельное значение может увеличиваться в десятки раз. Увеличение проницаемости грунта также приводит к уменьшению области растекания лужи. Например, при повышении коэффициента проницаемости на порядок предельный радиус лужи уменьшается в три раза. Следовательно, отсутствие растительности и уменьшение проницаемости грунта при конечном объеме выбросов приводит к увеличению площади лужи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шагапов В. Ш., Галиаскарова Г. Р. О динамике накопления атмосферных выбросов отрицательной плавучести в безветренную погоду // Инж.-физ. журн. 2002. Т. 75, № 2. С. 22–27.
2. Репина И. А., Смирнов А. С. Обмен теплом и импульсом между атмосферой и льдом по данным наблюдений в районе Земли Франца-Иосифа // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36, № 5. С. 672–680.
3. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1975.
4. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
6. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
7. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
8. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005.

Поступила в редакцию 10/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 10/VIII 2009 г.