УДК 532.546

ИЗМЕНЕНИЯ ПОРОВОЙ СТРУКТУРЫ В ПОТОКЕ МОНОДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ

Ю. И. Капранов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается движение в пористых средах жидкостей, содержащих взвешенные частицы. Представлена математическая модель взаимодействия монодисперсной взвеси с поровой структурой. Исследованы изменения параметров среды и потока в условиях равновесных режимов.

Необходимость изучения движения в пористых средах жидкостей, содержащих диспергированные фазы, возникает при решении многих практических задач. К числу последних относятся вопросы очистки жидкостей от содержащихся в них примесей путем фильтрования, проблемы снижения проводимости прискважинной зоны пласта при бурении скважин за счет проникновения в него фильтрата промывочной жидкости, оценка эффектов бронирования эмульгированной фазы механическими примесями при работе эксплуатационных скважин и др. [1–3].

При анализе подобных явлений наибольшее распространение получили полуэмпирические модели. Так, фильтрация малоконцентрированных суспензий рассматривалась в работе [2]. В ней использованы приближенные уравнения, интенсивность захвата средой частиц из потока полагалась пропорциональной отклонению концентрации от некоторого ее равновесного значения. Вместе с тем, как показывает сравнение с экспериментом [4, 5], во многих случаях на кинетику кольматации существенное влияние оказывает скорость фильтрации. Использованная в работах [6, 7] схематизация порового пространства вводит дополнительные эмпирические постоянные, и полученная на ее основе система балансовых соотношений для осредненных величин также оказывается приближенной [5]. Корректная форма этой системы (без уравнения неразрывности для жидкой фазы) описана в [8].

В методе сетевого моделирования [1] пористая среда заменяется фиксированным набором пор-узлов и соединяющих их каналов со случайно распределенными радиусами. Принципиальные трудности здесь связаны с существенной ограниченностью размеров самой сети, привлечением значительного числа дополнительных параметров и применением ряда перколяционных гипотез, носящих существенно квазистационарный характер.

Настоящая работа обобщает предложенный в [9] подход на случай движения монодисперсной взвеси (соответствующая приближенная модель представлена в [10]). Это не только позволяет достаточно простым способом сформировать точную систему уравнений для интегральных характеристик, но и дает возможность описывать изменения структурных параметров среды в процессе кольматации. Выделяемый при этом класс равновесных режимов служит основой построения определяющих соотношений для интегральных моделей.

1. Формулировка модели. Рассмотрим движение сквозь пористую среду жидкости, несущей взвешенные частицы одного и того же радиуса $\bar{\rho}$. Течение считаем одномерным и направленным вдоль оси x. Пусть t — время, $v(x,t)$ — скорость фильтрации, $m(x,t)$ — пористость, $N(x,t)$, $c(x,t)$ — числовая и объемная концентрации частиц в потоке. Твердую и жидкую фазы взвеси и матрицу пористой среды предполагаем несжимаемыми.

Элементарный объем пористой среды в произвольно выбранной точке x представим состоящим из примыкающих друг к другу и расположенных перпендикулярно потоку слоев-сит, толщина которых $l(x,t)$ меняется во времени и пространстве. Поры на слое считаем имеющими форму прямого кругового цилиндра с направленной вдоль потока осью длиной l и случайно распределенным радиусом поперечного сечения r. Пусть $M_s(x,t)$ — число таких каналов на единице площади слоя, $\varphi_s(r,x,t)$ — плотность распределения их на слое по радиусам и $M(x,t)$ — число пор в единице объема пространства. Указанные слои считаем вероятностно-независимыми в том смысле, что если частица взвеси прошла через какой-нибудь канал слоя, то она попадет на вход канала радиуса r следующего слоя с вероятностью, определяемой только функцией $\varphi_s(r,x,t)$.

Функция φ_s неотрицательна и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\infty \varphi_s\,dr = 1. \tag{1}$$

Пористость m связана с M, φ_s и l соотношением

$$m = \pi l M \int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr. \tag{2}$$

На единицу длины потока приходится $1/l$ слоев, поэтому $M_s = lM$. Следовательно, просветность (поверхностная пористость) и пористость (объемная) совпадают и принятая схематизация порового пространства является статистически изотропной [11].

Рассмотрим отдельный слой площади S поперечного потоку сечения. За время dt через его каналы радиуса r пройдет число частиц, равное $vS\,dt\,Nr^2\varphi_s\,dr \Big/ \int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr$. Частица задерживается таким каналом, если его радиус меньше радиуса частицы. Поэтому за указанный период времени на слое задержится $vS\,dt\,N \int\limits_0^{\bar\rho} r^2\varphi_s\,dr \Big/ \int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr$ частиц. Поскольку объем Sdx содержит dx/l слоев, то

$$\frac{\partial(mN)}{\partial t} + \frac{\partial(vN)}{\partial x} = -vN\int\limits_0^{\bar\rho} r^2\varphi_s\,dr \Big/ \Big(l\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr\Big).$$

Объемная c и числовая N концентрации связаны между собой соотношением $c = 4\pi\bar\rho^3 N/3$, поэтому полученное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial(mc)}{\partial t} + \frac{\partial(vc)}{\partial x} = -vc\frac{q}{l}, \qquad q = \int\limits_0^{\bar\rho} r^2\varphi_s\,dr \Big/ \int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr. \tag{3}$$

Входящая в (3) величина q есть вероятность частицы, попавшей на вход слоя, быть им задержанной. Она зависит от x и t, на нее оказывают существенное влияние размер частиц и начальное состояние поровой структуры. Если, например, при $t = 0$ в интервале радиусов $0 < r < \bar\rho$ поровые каналы отсутствовали, то источниковый член в (3) обратится в нуль во все моменты времени и будет происходить простой перенос взвеси.

Площадь сечения каналов радиуса r на слое равна $SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$. За время dt сквозь нее пройдет объем взвеси $(v/m)\,dt\,SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$, несущий $N(v/m)\,dt\,SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$ частиц.

Каналы с радиусами $r > \bar\rho$ останутся проточными и сохранят свой радиус, часть каналов радиусов $r < \bar\rho$ окажутся забитыми. Количество последних в объеме Sdx равно $(dx/l)N(v/m)\,dt\,SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$. Поэтому числовая плотность $M\varphi_s$ пор-цилиндров радиуса r должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(M\varphi_s)}{\partial t} = -\frac{3r^2\varphi_s vc}{4\pi\bar\rho^3 l}\,H(\bar\rho - r)\Big/\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr. \tag{4}$$

(Здесь и далее $H(x)$ обозначает функцию Хевисайда: $H(x) = 1$ при $x > 0$, $H(x) = 0$ при $x < 0$.)

Из (4), условия нормировки (1) и определения q в (3) для интенсивности изменения числа пор в единице объема среды получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -vc\,\frac{3}{4\pi\bar\rho^3}\,\frac{q}{l}. \tag{5}$$

Согласно (3) и (5) число забиваемых в единицу времени пор совпадает с числом задерживаемых средой в единицу времени частиц. Как следует из (4), числовая плотность пор с радиусами цилиндров $r > \bar\rho$ не меняется с течением времени. Сохраняется и общее число таких пор. Вместе с тем в силу (4) и (5)

$$M\,\frac{\partial\varphi_s}{\partial t} = \frac{3\varphi_s vc}{4\pi\bar\rho^3 l}\Bigg(\int\limits_0^{\bar\rho} r^2\varphi_s\,dr - r^2 H(\bar\rho - r)\Bigg)\Big/\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr.$$

Поэтому вклад пор с радиусами, превышающими радиус частиц, со временем растет, однако аналогичная тенденция характерна и для пор с радиусами $0 < r < r_*$, где $r_* = r_*(x,t)$ определяется равенством

$$r_*^2 = \int\limits_0^{\bar\rho} r^2\varphi_s\,dr.$$

Причина такого поведения состоит в том, что поры радиуса $r < r_*$ встречаются реже и интенсивность их забивки ниже по сравнению с порами радиусов $r_* < r < \bar\rho$. Можно показать, что величина r_* с течением времени уменьшается.

Далее, согласно (2)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = l\frac{\partial}{\partial t}\Big(M\pi\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr\Big) + M\pi\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr\frac{\partial l}{\partial t},$$

поэтому, как следует из (4),

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{m}{l}\,\frac{\partial l}{\partial t} - vc\,\frac{3}{4\bar\rho^3}\int\limits_0^{\bar\rho} r^4\varphi_s\,dr\Big/\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr.$$

В силу несжимаемости всех участвующих в процессе фаз объем частиц, задерживаемых в единицу времени средой, должен совпадать с объемом забитых ими за этот же период времени пор. Отсюда и из (3) для пористости получаем уравнение

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -vc\,\frac{q}{l}. \tag{6}$$

При этом толщина слоев l меняется таким образом, что выполняется соотношение

$$m\,\frac{\partial l}{\partial t} = vc\Big(\frac{3l}{4\bar\rho^3}\int\limits_0^{\bar\rho} r^4\varphi_s\,dr \Big/ \int\limits_0^{\infty} r^2\varphi_s\,dr - q\Big). \tag{7}$$

В условиях несжимаемости забивка порового пространства твердыми частицами не выводит жидкую фазу из потока, поэтому [5]

$$\frac{\partial(m(1-c))}{\partial t} + \frac{\partial(v(1-c))}{\partial x} = 0.$$

Отсюда, а также из (3), (6) для скорости фильтрации взвеси получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Полагая скорость взвешенных частиц равной скорости потока, для взвеси как целого примем закон Дарси [2]

$$v = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{9}$$

где p — давление во взвеси; μ — ее вязкость; k — проницаемость.

Для того чтобы связать изменения проницаемости с параметрами течения, зафиксируем перепад давления $\partial p/\partial x$ в точке x. В каждом слое из окрестности Sdx точки x за время dt на каналы радиусов $r < \bar\rho$ поступает поток $(v/m)\,dt\,SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$, несущий $3cv/(4\pi\bar\rho^3 m)\,dt\,SM_s\pi r^2\varphi_s\,dr$ взвешенных частиц. За это время такое же количество указанных каналов слоя окажутся забитыми. В приближении Гагена — Пуазейля [12] их пропускная способность в момент t была равна $\dfrac{3vc\pi}{32\bar\rho^3 m\mu}\,dt\,SM_s r^6\varphi_s\,dr\dfrac{\partial p}{\partial x}$. Значит, начальный поток взвеси $vSdt$ за период dt уменьшится на величину $\dfrac{3vc\pi}{32\bar\rho^3 m\mu}\,dt\,SM_s\displaystyle\int\limits_0^{\bar\rho} r^6\varphi_s\,dr\,\frac{\partial p}{\partial x}$.

В то же время в условиях фиксированного перепада давления из закона Дарси (9) вытекает равенство

$$\frac{\partial v}{\partial t}\,dt = -\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial k}{\partial t}\,dt\,\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Отсюда и из сказанного ранее заключаем, что

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -v\,\frac{3\pi c}{32\bar\rho^3 m}\,M_s\int\limits_0^{\bar\rho} r^6\varphi_s\,dr. \tag{10}$$

Из (10), в частности, следует, что снижение проницаемости значительнее в тех точках, где выше скорость потока и где он более насыщен взвешенными частицами. В средах с пониженной пористостью подобные изменения становятся более резкими.

Система уравнений (1)–(10) замкнута и при наличии соответствующих граничных и начальных данных полностью определяет развитие процесса кольматации. «Лишнее» условие (1) позволяет среди возможных решений системы (2)–(10) выделять те, которые имеют физический смысл. Обобщение на многомерный случай достигается подстановкой $v = |\boldsymbol{v}|$ в правые части уравнений (3)–(7), (10), где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости фильтрации, заменой производной по x в (3) и левой части (8) на $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ и использованием соответствующей векторной формы закона Дарси в (9).

2. Равновесные режимы. С физической точки зрения равновесные режимы важны тем, что описывают внутренние свойства самого процесса, когда влиянием временных и пространственных границ можно пренебречь. Система уравнений (3)–(8) имеет класс частных решений, в которых скорость фильтрации v — заданная постоянная, а m, c, M, φ_s и l зависят от x и t только через переменную $\xi = x - \sigma t$, где σ — искомая скорость простой волны. Для этого случая уравнения (3)–(7) приводятся к виду

$$-\sigma m\,\frac{dc}{d\xi} + v\,\frac{dc}{d\xi} = -vc(1-c)\,\frac{q}{l}, \qquad \sigma\,\frac{dm}{d\xi} = vc\,\frac{q}{l},$$

$$\sigma\,\frac{d\,(M\varphi_s)}{d\xi} = vc\,\frac{3}{4\pi\bar\rho^3 l} r^2\varphi_s H(\bar\rho - r)\Big/\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr, \qquad \sigma\,\frac{dM}{d\xi} = vc\,\frac{3}{4\pi\bar\rho^3}\,\frac{q}{l}, \tag{11}$$

$$-\sigma m\,\frac{dl}{d\xi} = vc\biggl(\frac{3l}{4\bar\rho^3}\int\limits_0^{\bar\rho} r^4\varphi_s\,dr\Big/\int\limits_0^\infty r^2\varphi_s\,dr - q\biggr).$$

Из первого и второго уравнений системы (11) следует равенство $m(1-c) + vc/\sigma \equiv a$, где a — некоторая постоянная. Для определения a допустим, что перед волной поровая структура находится в некотором невозмущенном состоянии:

$$c = 0, \quad m = m_+, \quad M = M_+, \quad \varphi_s = \varphi_+(r), \quad l = l_+ \quad \text{при} \quad \xi = +\infty, \tag{12}$$

где $0 < m_+ < 1$, $M_+ > 0$ — заданные и $l_+ > 0$ — искомый параметры; $\varphi_+(r)$ — заданная плотность распределения пор по радиусам. При этих условиях $a = m_+$, т. е. $m(1-c) + cv/\sigma = m_+$, откуда следует простая зависимость концентрации от пористости и скорости распространения волны

$$c = \frac{m_+ - m}{v/\sigma - m}. \tag{13}$$

Пусть за волной возникает некоторое стабилизированное состояние

$$c = c_+, \quad m = m_*, \quad M = M_*, \quad \varphi_s = \varphi_*(r) \quad \text{при} \quad \xi = -\infty, \tag{14}$$

где $0 < c_+ < 1$ — заданная и $0 < m_* < 1$, $M_* > 0$ — искомые постоянные; $\varphi_*(r)$ — искомая функция. Как следует из (13), в этих условиях скорость σ распространения волны будет определяться выражением

$$\frac{v}{\sigma} = \frac{m_+ - m_* + m_* c_+}{c_+}, \tag{15}$$

т. е. поток взвешенных частиц vc_+ разбивается на две составляющие. Первая из них $\sigma(m_+ - m_*)$ полностью задерживается пористой средой, вторая составляющая $\sigma m_* c_+$ переносится вместе с жидкостью.

Из второго и четвертого уравнений системы (11) следует равенство $(4/3)\pi\bar\rho^3 M - m \equiv \text{const}$. Отсюда и из (12) заключаем, что

$$M(\xi) = M_+ - \frac{3}{4\pi\bar\rho^3}(m_+ - m(\xi)). \tag{16}$$

Физический смысл этих соотношений заключается в том, что забивка каждой поры сопровождается уменьшением порового пространства на объем захваченной частицы.

Используя (2) и интегрируя третье уравнение системы (11), получим равенство

$$\ln\,(M\varphi_s) = A_1(r) + H(\bar\rho - r)\biggl(-\frac{3v}{4\sigma\bar\rho^3}\,r^2\int\limits_\xi^{\xi_0}\frac{c}{m}\,d\tau + A_2(r)\biggr),$$

где $A_1(r)$ и $A_2(r)$ — произвольные функции; ξ_0 — произвольная постоянная. Требуя от решения сходимости интеграла при $\xi = +\infty$ и учитывая условия (12), находим

$$\varphi_s = \frac{M_+\varphi_+(r)}{M(\xi)}\,(1 + H(\bar\rho - r)(\exp\,(-\text{æ}(\xi)r^2) - 1)). \tag{17}$$

Входящая в это представление функция $\text{æ}(\xi)$ определяется выражением

$$\text{æ}(\xi) = \frac{3v}{4\bar\rho^3\sigma}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\frac{m_+ - m}{v/\sigma - m}\,\frac{d\tau}{m}. \tag{18}$$

Из второго уравнения системы (11), а также из (3), (17) и (18) следует

$$\frac{dm}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\Big(\frac{4}{3}\,\pi\bar\rho^3 M_+\int\limits_0^{\bar\rho}\varphi_+(r)\exp\,(-\text{æ}(\xi)r^2)\,dr\Big).$$

Интегрируя это дифференциальное соотношение и учитывая, что согласно (14) $c/m \to c_+/m_* > 0$ при $\xi \to +\infty$, для пористости получаем представление

$$m(\xi) = m_* + \frac{4}{3}\,\pi\bar\rho^3 M_+\int\limits_0^{\bar\rho}\varphi_+(r)\exp\,(-\text{æ}(\xi)r^2)\,dr. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь входящие в условия (12), (14) и представления (13), (15)–(19) параметры m_*, M_*, l_+ и функцию $\varphi_*(r)$. Величина M_+ и функция $\varphi_+(r)$ задают невозмущенное состояние среды перед волной. Для однозначного определения этого состояния требуется задание еще одной характеристики, например m_+. Тогда параметр l_+ должен быть таким, чтобы при $\xi = +\infty$ выполнялось равенство (2), т. е.

$$m_+ = \pi l_+ M_+\int\limits_0^{\infty} r^2\varphi_+(r)\,dr. \tag{20}$$

Далее, согласно (3) и (11) будем иметь

$$\frac{d}{d\xi}\Big(m - \pi l M\int\limits_0^{\infty} r^2\varphi_s\,dr\Big) = Q(\xi)\Big(m - \pi l M\int\limits_0^{\infty} r^2\varphi_s\,dr\Big)$$

с некоторой функцией $Q(\xi)$. Используя это дифференциальное соотношение, заключаем, что равенство (2) является следствием его частного случая (20). Теперь из (2) и (19) можно определить зависимость $l(\xi)$.

Аналогично для выполнения условия нормировки (1) всюду достаточно потребовать, чтобы оно имело место при одном значении переменной ξ, например $\xi = -\infty$. Тогда из (17), (18) и свойств функции $\text{æ}(\xi)$ следует, что $M\varphi_s$ при $\xi \to -\infty$ имеет предел $M_*\varphi_*$, где

$$\varphi_*(r) = \frac{M_+}{M_*}\,\varphi_+(r)H(r - \bar\rho); \tag{21}$$

$$M_* = M_+\int\limits_{\bar\rho}^{\infty}\varphi_+(r)\,dr. \tag{22}$$

Переходя в (16) к пределу $\xi \to -\infty$, находим искомое представление и для параметра m_*:

$$m_* = m_+ - \frac{4}{3}\,\pi\bar{\rho}^3(M_+ - M_*). \tag{23}$$

Итак, пусть заданы характеристики невозмущенной поровой структуры $\varphi_+(r)$, M_+, m_+, размер частиц $\bar{\rho}$ и поступающая с потоком концентрация c_+. Потребуем выполнения неравенства

$$m_+ > \frac{4}{3}\,\pi\bar{\rho}^3 M_+ \int\limits_0^{\bar{\rho}} \varphi_+(r)\,dr, \tag{24}$$

означающего, что поровое пространство этой структуры может вместить максимально возможный для забивки частицами поровый объем. (В противном случае равновесный режим не реализуется, и появляется задний фронт.) Из (20)–(23) и (15) последовательно находим l_+, M_*, $\varphi_*(r)$, m_* и σ. Тогда из условия (24) следует, что $m_* > 0$. При этом будут положительными M_* и σ. Соотношения (18) и (19) образуют систему двух нелинейных уравнений для определения $m(\xi)$ и $æ(\xi)$. Пусть решение этой системы существует, причем $m(-\infty) = m_*$, $m(+\infty) = m_+$, $m_* < m(\xi) < m_+$, $æ(\xi) > 0$, $æ(-\infty) = +\infty$ и $æ(+\infty) = 0$. Тогда из (15) следует неравенство $v/\sigma - m(\xi) > v/\sigma - m_+ > 0$, и для определяемой из (13) зависимости $c(\xi)$ выполняются естественные для концентрации ограничения $0 < c < c_+$ и условия $c(+\infty) = 0$, $c(-\infty) = c_+$. Из (16), (23), (2) и (20) следуют равенства $M(+\infty) = M_+$, $M(-\infty) = M_*$ и $l(+\infty) = l_+$. Два других предельных условия $\varphi_s(+\infty, r) = \varphi_+(r)$ и $\varphi_s(-\infty, r) = \varphi_*(r)$ получаются из (17) и (21).

Решение системы (18), (19) строится следующим образом. Вводятся параметр $s \in (0, +\infty)$ и функция

$$\Phi(s) = \int\limits_0^{\bar{\rho}} \varphi_+(r)\exp\left(-sr^2\right)dr. \tag{25}$$

Пусть зависимости $m(s)$, $\xi(s)$, $æ(s)$ определяются по правилу

$$m(s) = m_* + \frac{4}{3}\,\pi\bar{\rho}^3 M_+\Phi(s), \quad \xi(s) = \xi_0 + \frac{4\sigma}{3v}\bar{\rho}^3 \int\limits_s^{s_0} m(y)\,\frac{v/\sigma - m(y)}{m_+ - m(y)}\,dy, \quad æ(s) = s, \tag{26}$$

где s_0 и ξ_0 — некоторые фиксированные числа.

Функция $m(s)$ монотонно убывает, $m(+\infty) = m_*$ и в силу (22), (23) $m(+0) = m_+$. При этом $v/\sigma - m(s) > 0$ и подынтегральное выражение в правой части (26) положительно при всех $s > 0$. Поэтому $\xi(s)$ определена при $s > 0$ и монотонно убывает. С учетом (22) и (23)

$$m_+ - m(s) = \frac{4}{3}\,\pi\bar{\rho}^3 M_+\Psi(s), \qquad \Psi(s) = \int\limits_0^{\bar{\rho}} \varphi_+(r)(1 - \exp\left(-sr^2\right))\,dr.$$

Функция $\Psi(s)$, аналитическая по s, обращается в нуль при $s = 0$, причем $\Psi'(0) > 0$. Поэтому в окрестности точки $s = 0$ справедливо представление $m_+ - m(s) = sA[1 + O(s)]$ с положительной постоянной A. Отсюда следует, что $\xi(+0) = +\infty$, а поскольку согласно (15) $(v/\sigma - m_*)/(m_+ - m_*) = (1 - c_+)/c_+$, то $\xi(+\infty) = -\infty$. Это означает, что на оси $-\infty < \xi < +\infty$ определена обратная функция $s(\xi)$, монотонно убывающая от $s(-\infty) = +\infty$ до $s(+\infty) = 0$. При этом $m(s(\xi))$ монотонно растет от $m(s(-\infty)) = m_*$ до $m(s(+\infty)) = m_+$.

Поскольку $\xi(s)$ при $s \to +0$ ведет себя как $-A \ln s$, то интеграл от функции $m_+ - m(s(\xi))$ сходится при $\xi = +\infty$. Далее, по построению $æ(s(\xi))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dæ}{d\xi} = -\frac{3v}{4\bar{\rho}^3\sigma}\,\frac{m_+ - m(s(\xi))}{v/\sigma - m(s(\xi))}\,\frac{1}{m(s(\xi))},$$

поэтому

$$æ(s(\xi)) = æ_0 - \frac{3v}{4\bar{\rho}^3\sigma}\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{m_+ - m(s(y))}{v/\sigma - m(s(y))}\,\frac{dy}{m(s(y))},$$

где $æ_0$ — некоторая постоянная. Устремляя здесь $\xi \to +\infty$, учитывая сходимость интеграла и тот факт, что $æ(s(+\infty)) = 0$, получаем равенство

$$æ_0 = \frac{3v}{4\bar{\rho}^3\sigma}\int\limits_{\xi_0}^{+\infty} \frac{m_+ - m(s(y))}{v/\sigma - m(s(y))}\,\frac{dy}{m(s(y))},$$

т. е. $æ(s(\xi))$ удовлетворяет соотношению (18).

Таким образом, система (18), (19) разрешима, причем ее решение обладает всеми нужными свойствами. Неоднозначность выбора ξ_0 в (26) связана с тем, что в простой волне допустим сдвиг на произвольную постоянную. Представления (25), (26) оказываются удобными и с вычислительной точки зрения, так как позволяют получить для функций $m(s)$ и $\xi(s)$ разложения в степенные ряды. В терминах этой параметризации, как следует из (10), равенства $M_s = lM$, представления (17) для функции φ_s и связи (26) между ξ и s, достаточно простым оказывается и выражение для проницаемости

$$k(s) = k_+ - \frac{\pi}{8}\,M_+\int\limits_0^s l(y)\int\limits_0^{\bar{\rho}} r^6\varphi_+(r)\exp\left(-yr^2\right)dr\,dy, \tag{27}$$

где k_+ — проницаемость среды в ее невозмущенном начальном состоянии; интеграл в правой части (27) сходится при $s \to +\infty$.

Можно показать, что длина среднего свободного пробега частицы взвеси λ вычисляется по формуле $\lambda = l(1-q)/q$, где q определяется согласно (3), и по мере прохождения волны неограниченно увеличивается. Поведение функции $l(s)$ оказывается более сложным, здесь многое зависит от вклада мелких пор. Так, если потенциально забиваемой части порового пространства достаточно, т. е.

$$l_+\int\limits_0^{\bar{\rho}} r^2\varphi_s\,dr > \frac{4}{3}\,\pi\bar{\rho}^3\int\limits_0^{\bar{\rho}}\varphi_s\,dr,$$

то реализуется неравенство $l(-\infty) > l_+$.

Заключение. Отметим несколько важных свойств процессов кольматации. Прежде всего, не существует функции распределения, сохраняющей неизменной во времени свою форму. Для области пор малых радиусов характерно «срезание» более представительной их части и увеличение вклада оставшейся. По-видимому, это является одной из причин, приводящих к образованию в процессе кольматации распределений с несколькими максимумами.

Так как функции $m(s)$ и $k(s)$ монотонны, то представление (27) определяет монотонно растущую функцию $k(m)$. Как показывают полученные выше соотношения, указанная зависимость включает информацию и о начальном состоянии поровой структуры. Этим, в частности, объясняется многообразие существующих эмпирических зависимостей $k(m)$.

Монотонно меняется не только пористость, но, как следует из (14), и концентрация взвешенных частиц. Можно показать, что на графиках функций $m(\xi)$, $c(\xi)$ и $k(\xi)$ имеются точки перегиба. Присутствие последних характерно и для экспериментальных кривых [1, 2]. Появление таких точек является признаком выхода течения на равновесный режим.

Наиболее часто используемые при описании процессов кольматации интегральные модели помимо зависимости $k(m)$ включают ряд дополнительных эмпирических величин [6–8]. Рассмотренные в настоящей работе равновесные режимы важны также тем, что на их основе могут быть получены соотношения, выражающие эти кинетические параметры через осредненные характеристики потока [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sahimi M., Imdakm A. O.** Hydrodynamics of particulate motion in porous media // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 60, N 9. P. 1169–1172.
2. **Шехтман Ю. М.** Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. **Михайлов Н. Н.** Изменение физических свойств горных пород в околоскважинных зонах. М.: Недра, 1987.
4. **Trzaska A.** Experemental research on the phenomenon of colmatage // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Tech. 1965. V. 13, N 9. P. 451–457.
5. **Капранов Ю. И.** О фильтрации взвеси твердых частиц // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 620–628.
6. **Зубарев А. Ю., Хужаеров Б.** К теории релаксационной фильтрации // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55, № 3. С. 442–447.
7. **Хужаеров Б.** Модель фильтрации суспензии с учетом кольматации и суффозии // Инж.-физ. журн. 1992. Т. 63, № 1. С. 72–79.
8. **Litwiniszyn J.** On suspension flow in a porous medium // Intern. J. Engng Sci. 1967. V. 5, N 5. P. 435–454.
9. **Капранов Ю. И.** Структурная модель процесса механической кольматации пористой среды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 90. С. 27–39.
10. **Sharma M. M., Yortsos Y. C.** Transport of particulate suspensions in porous media: Model formulation // AIChE J. 1987. V. 33, N 10. P. 1636–1643.
11. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969.
12. **Sheidegger A. E.** The physics of flow through porous media. N. Y.: Mcmillan, 1957.
13. **Капранов Ю. И.** Модели кольматации пористых сред // Математические проблемы фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 87–97.

Поступила в редакцию 27/II 1998 г.,
в окончательном варианте — 4/I 1999 г.