СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2019. Т. 22, № 4

УДК 519.612

Повышение устойчивости треугольного разложения плохо обусловленных матриц

В.Н. Лутай

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая, 105/42, Ростов-на-Дону, 344006
E-mails: vnlutay@sfedu.ru, vlutay@mail.ru

Лутай В.Н. Повышение устойчивости треугольного разложения плохо обусловленных матриц // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 4. — С. 473–481.

Рассматривается метод повышения устойчивости треугольного разложения плотной положительно определенной матрицы с большим числом обусловленности методами Гаусса и Холецкого. Предлагается в стандартные вычислительные схемы ввести дополнения, заключающиеся в использовании неполного скалярного произведения двух векторов, которое формируется при отсечении младших разрядов суммы произведений двух чисел. Отсечение, выполняемое в процессе факторизации, приводит к увеличению диагональных элементов треугольных матриц на некоторое произвольное число и предотвращает появление очень маленьких чисел при разложении по Гауссу и отрицательного подкоренного выражения в методе Холецкого, уменьшая при этом число обусловленности исходной матрицы. Оценивается количество дополнительных операций, необходимых для получения точного решения. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

DOI: 10.15372/SJNM20190406

Ключевые слова: *плохо обусловленные матрицы, треугольное разложение, повышение устойчивости, отсечение младших разрядов, неполное скалярное произведение.*

Lutay V.N. Increasing the stability of triangular decomposition of ill-conditioned matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 4. — P. 473–481.

An approach to increasing the stability of triangular decomposition of a dense positive definite matrix with a large condition number with the use of the Gauss and the Cholesky methods is considered. It is proposed to introduce additions to standard computational schemes, which consist in the use of an incomplete scalar product of two vectors, which is formed by cutting off the lower digits of the sum of the products of two numbers. Cutting off being performed in the process of factorization leads to an increase in the diagonal elements of triangular matrices to a random number and prevents the appearance of very small numbers during the decomposition according to Gauss and a negative radical expression in the Cholesky method. The number of additional operations required to obtain an accurate solution is estimated. The results of computational experiments are presented.

Keywords: *ill-conditioned matrix, triangular decomposition, improving resilience, cutting off the least significant bits of partial scalar product.*

Введение

Неустойчивость решения СЛАУ с положительно определенной квадратной матрицей порядка n

$$Ax = b, \tag{1}$$

в которой плохая обусловленность матрицы A объясняется близостью ее строк к линейной зависимости, вследствие нарастания ошибок округления может привести к появлению очень маленьких значений диагональных элементов верхней треугольной матрицы вплоть до нулевых в методе Гаусса, а в методе Холецкого — к отрицательной подкоренной величине [1]. Общепринятый способ выбора главных элементов для положительно определенных, и тем более плохо обусловленных матриц, не дает эффекта [2]. Одним из способов повышения устойчивости решения СЛАУ является явный или неявный метод предобусловливания исходной матрицы. В первом случае матрица A умножается на матрицу, обратную к некоторой матрице M [3], во втором в процессе вычислений выполняются операции, отличающиеся от стандартных процедур Гаусса и Холецкого. Результатом такого разложения, которое называется неполным, являются треугольные матрицы, произведение которых дает матрицу M, называемую расщепленной:

$$M = A + N, \tag{2}$$

где N — матрица ошибок разложения. Неполное разложение широко используется для разреженных матриц. Основная цель их применения — не допустить в процессе разложения появления ненулевых значений тех элементов, которые в исходной матрице равны нулю. В библиотеке Intel Math Kernel Library [4] неявное предобусловливание заключается в замене нулевых или близких к нулю диагональных членов матриц, получающихся при вычислениях, на заданное маленькое число.

В работе рассматривается метод повышения устойчивости треугольного разложения, заключающийся в увеличении диагональных элементов треугольных матриц на некоторое число, определяемое в процессе разложения.

Полное треугольное разложение по Гауссу и Холецкому формирует треугольные матрицы L_A, U_A и H_A такие, что

$$A = L_A U_A, \qquad A = H_A H_A^\top.$$

Формулы вычисления их элементов следующие [5] (диагональные члены выделены дополнительным индексом A):

$$u_{Aii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}, \tag{3}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) \Big/ u_{Aii},$$

$$i = 2, \ldots, n, \quad j = i+1, \ldots, n;$$

$$h_{Aii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2}, \quad i = 2, \ldots, n; \tag{4}$$

$$h_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik} h_{jk} \right) \Big/ h_{Aii}, \quad j > i.$$

После получения всех элементов матриц решаются системы с треугольными матрицами:

$$U_A x = L_A^{-1} b, \tag{5}$$

$$H_A y = b, \quad H_A^\top x = y. \tag{6}$$

Количество операций оценивается следующим образом: LU-разложение — $\frac{2}{3}n^3$ для получения треугольной матрицы и $\frac{n^2}{2}$ для (5); разложение Холецкого — $\frac{1}{3}\,n^3$ и n^2 согласно (6) .

1. Отсечение и неполное скалярное произведение

В обоих методах треугольного разложения самой массовой операцией является скалярное произведение двух векторов, общепринятым способом вычисления которого является накопление произведений двух чисел, количество цифр в которых при t-разрядной мантиссе составляет $2t$ разрядов. Такой прием позволяет уменьшить погрешность округления по сравнению с накоплением t-разрядных произведений. При этом операции присваивания, деления и извлечения квадратного корня выполняются со старшими t разрядами полученной суммы.

Для того чтобы получить возможность использовать в вычислительном процессе отбрасываемые разряды накопленной суммы произведений, введем следующую операцию. Разделим $2t$-разрядное число на два и поместим их в две ячейки памяти, каждая из которых содержит t разрядов. Первое число состоит из $(t-\tau)$ старших разрядов исходной суммы и дополняется до t нулями справа (τ — некоторое целое положительное число, меньшее t). Второе формируется из τ отсеченных от первого числа цифр и дополняется справа цифрами суммы, которые начинаются с $(t+1)$-го разряда. Обозначив первое и второе числа $[\cdot]_b$, $[\cdot]_r$ соответственно, получим для скалярного произведения 2-х n-мерных векторов

$$s = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]_b + \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]_r . \tag{7}$$

Если накапливаются не $2t$-, а t-разрядные произведения (режим двойного накопления отсутствует), то первое число содержит $t-\tau$ старших разрядов скалярного произведения, а второе — остаток из τ разрядов.

Будем называть полным скалярное произведение s при любом значении τ в диапазоне $t > \tau \geq 0$. Назовем первое слагаемое в (7) при $\tau > 0$ неполным скалярным произведением, второе — его дополнением, а операцию по их получению — отсечением. Оба числа имеют тот же знак и порядок, что и s; по абсолютной величине s больше неполного произведения, которое в свою очередь больше дополнения. При увеличении τ значение неполного произведения уменьшается, а дополнения увеличивается.

Используем неполное скалярное произведение при вычислении одного диагонального элемента треугольных матриц U и H:

$$u_{Aii} = a_{ii} - \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right]_b - \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}\right]_r , \qquad h_{Aii} = \sqrt{a_{ii} - \left[\sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right]_b - \left[\sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right]_r} .$$

Примем за новое значение диагональных элементов

$$u_{ii} = a_{ii} - \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}\right]_b , \qquad h_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \left[\sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right]_b} .$$

Тогда

$$u_{ii} = u_{Aii} + \left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right]_r , \qquad h_{ii}^2 = h_{Aii}^2 + \left[\sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right]_r .$$

Внедиагональные элементы треугольных матриц вычисляются, согласно (3) и (4), с новыми значениями u_{ii} и h_{ii}.

В положительно определенных матрицах диагональные элементы соответствующих треугольных матриц положительны. Поэтому значения u_{ii} и h_{ii} больше 0 и больше u_{Aii} и h_{Aii} соответственно.

Для определения структуры матрицы N воспользуемся методикой обратного анализа ошибок LU-разложения [2]. Основным ее результатом является следующее выражение:

$$LU = A + N,$$

где N — плотная матрица, элементами которой являются ошибки, возникающие при округлении результатов вычисления элементов треугольных матриц до t разрядов.

Будем рассматривать отсечение как округление числа до $(t-\tau)$ разрядов без общепринятого деления возникающей ошибки на два. Положим, что единственное отсечение выполняется для элемента u_{Aii}. Ошибка в этом случае равна $\left[\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}\right]_r$, тогда как все остальные элементы треугольных матриц вычисляются точно (обычные ошибки округления не рассматриваются).

Обозначим матрицу ошибок для одного отсечения N^1; она имеет единственный ненулевой элемент n_{ii}^1, значение которого равно величине числа, состоящего из отсеченных разрядов. При этом значения элементов треугольных матриц ниже i-й строки изменятся по сравнению с элементами матрицы U_A, в частности, элементы матрицы L в соответствии с (3) уменьшатся, а те диагональные элементы, в вычислении которых участвуют эти элементы, увеличатся.

Положим, что после отсечения для элемента u_{ii} в процессе разложения выполнено отсечение для j-го диагонального элемента $(j > i)$. Это значит, что неполному разложению подвергается матрица $A + N^1$, а матрица ошибок разложения N^2 имеет один ненулевой элемент n_{jj}^2, вычисленный для матрицы $A + N^1$ и равный $\left[\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}u_{kj}\right]_r$.

После k отсечений будем иметь

$$LU = A + N^1 + N^2 + \cdots + N^k.$$

Аналогичное рассуждение можно использовать для метода Холецкого, с той разницей, что ошибка появляется при вычислении квадрата диагонального члена [5, с. 176, 177]. Таким образом, для разложений с применением операции отсечения верно (2), где матрица ошибок разложения N имеет ненулевые члены только на главной диагонали.

Наибольшее количество элементов в N равно $(n-1)$; n_{11} всегда равно 0. Величина n_{ii} является частью соответствующего скалярного произведения и в конечном счете зависит от значений элементов матрицы A.

Если двойное накопление не производится, то при $\tau = 0$ все n_{ii}=0, а M, L, U, H совпадают с матрицами A, L_A, U_A, H_A соответственно. Если операция отсечения реализована программно, то можно изменять значение τ во время вычислений, увеличивая его для маленьких диагональных членов треугольной матрицы.

Полученные в процессе неполного разложения треугольные матрицы L, U, H позволяют вычислить вектор $\tilde{x}$, который можно считать приближенным решением системы (1):

$$M\tilde{x} = b. \tag{8}$$

Для дальнейшего обсуждения эффекта отсечения используем число обусловленности матрицы, вычисленное как произведение ее нормы на норму обратной к ней матрицы и как отношение максимального собственного значения матрицы к минимальному. Снижение числа обусловленности матрицы является одной из основных целей введения предобусловливания.

Принято считать, что при разложении плохо обусловленной матрицы на треугольные сомножители верхняя треугольная матрица плохо обусловлена, а нижняя треугольная — хорошо [1]. Число обусловленности матрицы M при LU-разложении выглядит следующим образом:

$$\mathrm{cond}\,(M) \le \mathrm{cond}(L)\mathrm{cond}\,(U). \tag{9}$$

Так как в верхней треугольной положительно определенной матрице U собственными числами являются диагональные члены, то увеличение всех диагональных членов или, по крайней мере, самых маленьких приводит к снижению числа обусловленности U по сравнению с U_A и M по сравнению с A. Эти рассуждения распространяются и на разложение Холецкого.

2. Получение точного решения

Для получения точного решения с использованием отсеченных чисел используем в (1) левое предобусловливание:

$$M^{-1}(M-N)x = M^{-1}b. \tag{10}$$

Обозначив $Z = (I - M^{-1}N)$ и используя (8), запишем (10) в следующем виде:

$$Zx = \tilde{x}, \tag{11}$$

где I — единичная матрица. Z не вырождена и имеет следующий вид:

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -y_{11} & \cdots - y_{1k} \\ 0 & 1 & -y_{21} & \cdots - y_{2k} \\ 0 & 0 & 1-y_{31} & \cdots - y_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -y_{n1} & \cdots\ 1-y_{nk} \end{vmatrix}.$$

Столбцы y_l образуют плотную прямоугольную матрицу, которую можно получить в результате умножения M^{-1} на N и перестановки столбцов. После решения системы (8), трудоемкость которого совпадает с обычными оценками для треугольных разложений, решение системы (11) является вторым этапом достижения решения (1) и требует для своей реализации дополнительного количества операций. Они расходуются на формирование матрицы Z и определение вектора x.

При нахождении векторов y_k вместо обращения матрицы M, тем более, что в явном виде она не существует, достаточно решить k систем ЛАУ с полученными на первом этапе треугольными матрицами и столбцами с единственным ненулевым элементом в правой части

$$My_l = n_l, \quad l = 1, \ldots, k,$$

для чего понадобится $k\dfrac{n^2}{2}$ операций при LU-разложении и в два раза больше при разложении Холецкого.

Для нахождения значений вектора x воспользуемся стандартным LU-разложением. (При решении (10) итерационным методом невозможно при большом cond (A) гарантировать соблюдение условия $||M^{-1}N|| < 1$, необходимого для сходимости процесса [7].) При приведении матрицы Z к треугольному виду требуется $\dfrac{2}{3}k^3$ операций и еще $\dfrac{k^2}{2}$ понадобится для решения полученной треугольной системы. В целом оценка количества операций для второго этапа выглядит как $\frac{2}{3}k^3+O(n^2)+O(k^2)$ и для $k < n$ меньше оценки для треугольного разложения.

Оценим отношение чисел обусловленности матриц M и Z. Так как из (10) следует

$$A^{-1} = Z^{-1}M^{-1}, \tag{12}$$

то

$$\operatorname{cond}(Z) \geq \frac{\operatorname{cond}(A)}{\operatorname{cond}(M)}. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{cond}(A)$ не зависит от отсечений, то уменьшение $\operatorname{cond}(M)$ приводит к увеличению $\operatorname{cond}(Z)$.

Тактика подключения режима отсечения может быть различной. Это может быть контроль за диагональными элементами треугольных матриц: если их значения последовательно уменьшаются, то для следующего элемента используется отсечение. Для метода Холецкого отсечение может включаться при переходе подкоренного выражения через ноль.

3. Результаты экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились для систем ЛАУ с известными плохо обусловленными матрицами в формате double с $t = 17$. LU-разложение выполнялось по алгоритму Краута–Дулитла [2], так что и это и $HH^\top$-разложение выполнялись по схеме “слева направо, сверху вниз”. Числа обусловленности вычислялись как произведение евклидовых норм соответствующих матриц, а нормы векторов — как ∞-нормы.

Для LU-разложения использовались следующие СЛАУ:

а) система из 2-х уравнений, известная как тестовая задача Уилкинсона [9]:

$$A = \begin{vmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{vmatrix}.$$

Точное решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; обусловленность матрицы 10^6. Причиной большой нормы A^{-1} является почти линейная зависимость строк A. Действительно, отношение a_{11}/a_{21} равно a_{12}/a_{22} с точностью до пятого знака после запятой. Результаты вычислений сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты применения отсечения для задачи Уилкинсона

τ	n_{22}	u_{22}	$\operatorname{cond}(M)$	$\operatorname{cond}(Z)$	$\|r_x\|$
0	0	$1.3 \cdot 10^{-6}$	10^6	2	$1.2 \cdot 10^{-11}$
13	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^4$	77	$4.0 \cdot 10^{-13}$
15	$9.0 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-3}$	241	$7.0 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^{-16}$
16	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$5.9 \cdot 10^{-2}$	50	$6.0 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^{-16}$

Как следует из таблицы, значение диагонального элемента u_{22} треугольной матрицы возрастает с ростом τ. Величина $\operatorname{cond}(M)$ при этом уменьшается, а $\operatorname{cond}(Z)$, в соответствии с (13), увеличивается; невязка решения $r = Ax - b$ при том же количестве верных цифр, что и при $\tau = 0$, уменьшается.

б) СЛАУ с матрицей Гильберта, которая является симметричной положительно определенной и очень плохо обусловленной, причем число обусловленности резко возрастает при увеличении n [2]. Системы с этой матрицей часто используются для проверки эффективности вычислительных алгоритмов. Элементы ее вычисляются по формуле $a_{ij} = 1/(i + j - 1)$. Отношение элементов k-й и l-й строк выражается соотношением $(l-1+j)/((k-l+j))$, которое даже при небольших k, l мало зависит от j. В результате элементы треугольной матрицы U с возрастанием индексов становятся очень маленькими, а элементы обратной матрицы — очень большими. Порядок матрицы был выбран равным 8, количество цифр в представлении коэффициентов A и b — 10. Вектор свободных членов подобран таким образом, что решением системы является единичный вектор. Режим отсечения включался при условии $a_{ii} < a_{i-1,i-1} < a_{i-2,i-2}$. В нашем случае это происходит при $i = 5, 6, 8$. В табл. 2 приведены нормы матрицы N, значения максимального элемента треугольной матрицы L, величина последнего диагонального элемента матрицы U, числа обусловленности матриц M и Z и норма вектора невязки.

Таблица 2. Результаты применения отсечения для LU-разложения ($n = 8$, $k = 3$)

τ	$\|N\|$	$\max L_{ij}$	u_{88}	$\mathrm{cond}\,(M)$	$\mathrm{cond}\,V(Z)$	$\|r_x\|$
0	0	5.65	$5.7 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{10}$	8	$6.5 \cdot 10^{-8}$
13	$8.8 \cdot 10^{-5}$	3.33	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$7.3 \cdot 10^{5}$	$1.1 \cdot 10^{6}$	$9.8 \cdot 10^{-12}$
15	$1.1 \cdot 10^{-3}$	3.71	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{5}$	$7.1 \cdot 10^{6}$	$2.0 \cdot 10^{-12}$
16	$1.1 \cdot 10^{-2}$	3.71	$6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{5}$	$1.6 \cdot 10^{8}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$

Как следует из таблицы, с возрастанием τ существенно уменьшаются элементы матрицы L и возрастают диагональные элементы матрицы U, начиная с 5-го (последний диагональный элемент является самым маленьким). Число обусловленности матрицы M падает, матрицы Z возрастает; приемлемое соотношение $\mathrm{cond}\,(M)$ и $\mathrm{cond}\,(Z)$ так же, как и в предыдущем эксперименте, достигается при $\tau = 15$. Норма невязки решения с возрастанием τ уменьшается.

в) для разложения Холецкого использовалась та же система с матрицей Гильберта с единичным вектором в качестве решения при $n = 8$. Количество цифр в представлении коэффициентов матрицы и вектора исходной системы выбрано равным 8. Такой выбор представления чисел объясняется тем, что при количестве цифр, большем 8, вычислительный процесс завершается нормально. Аварийный останов при количестве цифр, равном 16 (практически полная разрядная сетка), происходит только при $n = 13$. Это подтверждает положение, высказанное в [10], что ошибки округления для плохо обусловленных матриц играют меньшую роль, чем ошибки представления элементов матрицы. При решении стандартным методом срыв вычислений происходит на h_{88}. Та же тактика подключения отсечения, что и для LU-разложения, дала аналогичные результаты: увеличение диагональных членов треугольной матрицы H, уменьшение $\mathrm{cond}\,(M)$ и увеличение $\mathrm{cond}(H)$ при нормальном завершении вычислений. Количество отсечений 3.

В табл. 3 приведены результаты решения двух СЛАУ с матрицей Гильберта при $n = 8$ и $n = 10$ (для $n = 10$ $\mathrm{cond}(A) = 10^{13}$) методом Холецкого. Отсечение скалярного произведения выполнялось для того диагонального элемента, для которого подкоренное выражение отрицательно. При $n = 8$ отсечение выполнялось 1 раз, при $n = 10$ выполнялось 3 раза. Числа обусловленности матриц M и Z меньше $\mathrm{cond}\,(A)$.

Обсудим возможность упрощения предлагаемого алгоритма, используя вместо отсечения замену маленьких диагональных членов треугольной матрицы на заранее заданное число. В библиотеке [4] это число ε равно 10^{-13} для несимметричных матриц и 10^{-8} для симметричных. При этом считается, что для больших разреженных матриц, для которых предназначена эта библиотека, получившаяся ошибка решения незначима, иначе предлагается использовать итеративное уточнение.

Таблица 3. Результаты применения отсечения для разложения Холецкого ($\tau = 15$)

n	Срыв вычислений	k	Отсечение на	n_{ii}	cond (M)	cond (Z)
8	h_{88}	1	h_{88}	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{8}$	$6.7 \cdot 10^{5}$
10	h_{88}	3	h_{88}; h_{99}; $h_{10\,10}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$; $8.2 \cdot 10^{-4}$; $6.3 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{8}$	$3.5 \cdot 10^{8}$

В нашем случае ε должен быть достаточно большим для уменьшения числа обусловленности матрицы. Однако выбрать его величину априорно затруднительно. Например, для матрицы Уилкинсона, как следует из табл. 2, можно взять, ориентируясь на u_{22}, $\varepsilon = 10^{-2}$. Но такая же величина для матрицы Гильберта приведет к слишком большому значению cond (Z). Это объясняется тем, что значения диагональных элементов треугольной матрицы U в системе Уилкинсона больше, чем у Гильберта, вследствие чего величины отсеченных разрядов при одном и том же τ различны. Кроме того, если истинное значение диагонального элемента треугольной матрицы вычислить нельзя, как это происходит при отрицательном подкоренном выражении в разложении Холецкого, то невозможно получить и соответствующее значение матрицы N, необходимое для вычисления точного значения.

Заключение

В работе получены следующие результаты. Показано, что отсечение младших разрядов скалярного произведения в процессе LU-разложения и разложения Холецкого приводит к увеличению диагональных элементов треугольных матриц. Это повышает устойчивость процесса разложения, в частности, предотвращает срыв вычислительного процесса в разложении Холецкого. Решение исходного уравнения с плохо обусловленной матрицей коэффициентов сводится к последовательному решению двух систем уравнений, матрицы которых обусловлены лучше исходной, причем размерность второй может быть существенно меньше исходной. Количество требуемых дополнительных операций не достигает количества операций стандартного треугольного разложения.

Литература

1. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления: Пер. с англ.—М.: Мир, 1999. Перевод: Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computation. Third Edithion.— Johns Hopkins University Press, 1996.
2. **Форсайт Дж., Моллер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.—М.: Мир, 1969. Перевод: Forsythe G.E., Moler C.B. Computer Solution of Linear Algebraic Systems.—N.J.: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1967.
3. **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем.—М.: Физматлит, 1995.
4. mkl-pardiso-pivot.— URL:https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-fortran-mkl-pardiso-pivot.
5. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления.—М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
6. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems.—N.Y.: PWS Publ., 1996.
7. **Stone H.L.** Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations // SIAM J. Sci. Numer. Anal.—1968.—№ 3.—P. 530–558.

8. **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ. 3-е изд-е. — М.: “Диалектика”, 2007. Перевод: Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis, 3 Edition. — John Wiley and Sons, Inc., 1998.
9. **Маничев В.Б., Глазкова В.В., Кожевников Д.Ю., Кирьянов Д. А., Сахаров М.К.** Решение систем линейных алгебраических уравнений с удвоенной точностью вычислений на языке Си // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. — 2011. — № 4. — С. 25–35.
10. **Уилкинсон Дж.** Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Изд-во “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. Перевод: Wilkinson J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem. — Oxford: Clarendon Press, 1965.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.,
После доработки 23 сентября 2018 г.
Принята к публикации 25 июля 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Golub Dzh., Van Loun Ch.** Matrichnye vychisleniya: Per. s angl. — M.: Mir, 1999. Perevod: Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computation. Third Edithion. — Johns Hopkins University Press, 1996.
2. **Forsayt Dzh., Moller K.** Chislennoe reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy. — M.: Mir, 1969. Perevod: Forsythe G.E., Moler C.B. Computer Solution of Linear Algebraic Systems. — N.J.: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1967.
3. **Il’in V.P.** Metody nepolnoy faktorizacii dlya resheniya algebraicheskikh sistem. — M.: Fizmatlit, 1995.
4. mkl-pardiso-pivot. — URL:https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-fortran-mkl-pardiso-pivot.
5. **Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A.** Matricy i vychisleniya. — M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1984.
6. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — N.Y.: PWS Publ., 1996.
7. **Stone H.L.** Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations // SIAM J. Sci. Numer. Anal. — 1968. — № 3. — P. 530–558.
8. **Dreyper N., Smit G.** Prikladnoy regressionnyy analiz. 3-e izd-e. — M.: “Dialektika”, 2007. Perevod: Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis, 3 Edition. — John Wiley and Sons, Inc., 1998.
9. **Manichev V.B., Glazkova V.V., Kozhevnikov D.Yu., Kir’yanov D. A., Sakharov M.K.** Reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy s udvoennoy tochnost’yu vychisleniy na yazyke Si // Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. “Priborostroenie”. — 2011. — № 4. — S. 25–35.
10. **Uilkinson Dzh.** Algebraicheskaya problema sobstvennykh znacheniy. — M.: Izd-vo “Nauka”. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1970. Perevod: Wilkinson J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem. — Oxford: Clarendon Press, 1965.