

**ВОЛНЫ СТОУНЛИ В ТЕОРИИ БИО–ДЖОНСОНА И КONTИНУАЛЬНОЙ
ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ**

В.Н. Доровский¹, Ю.В. Перепечко^{1,2}, А.И. Федоров¹

*Компания «Бэйкер Хьюз», Российский научный центр,
630090, Новосибирск, ул. Кутателадзе, 4а, Россия*

*Институт геологии и минералогии им. В.С. Соболева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия*

Статья касается исследования математических моделей двухскоростных сред с использованием данных, полученных в экспериментах Винклера, Лью и Джонсона по распространению волн Стоунли на границе жидкости и насыщенной пористой среды. Проводится сравнение результатов, получаемых в рамках теории типа Био и континуальной теории фильтрации, обсуждается обоснованность введения извилистости пор и частотной зависимости проницаемости и извилистости при описании механики насыщенных деформируемых пористых сред.

Насыщенная пористая среда, теория пороупругости, континуальная теория фильтрации, волны Стоунли.

STONELEY WAVES IN THE BIOT–JOHNSON AND CONTINUUM FILTRATION THEORIES

V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, and A.I. Fedorov

The paper concerns with mathematical modeling of two-velocity media with reference to data on Stoneley wave propagation at the fluid-porous solid interface from experiments by K.W. Winkler, H.L. Liu, and D.J. Johnson. Models obtained within the limits of two theories, that of Biot (Biot–Johnson) and continuum filtration, are investigated in comparison. On this basis, it is discussed whether it is reasonable to include pore tortuosity and frequency-dependent permeability and tortuosity when modeling the mechanics of deforming fluid-saturated porous solids.

Fluid-saturated porous solid, theory of pore elasticity, continuum filtration theory, Stoneley waves

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании нестационарных процессов в насыщенных пористых средах с привлечением структуры пористой среды часто используются теории типа Био [Biot, 1956, 1962]. Однако корректно проведенных сравнений теоретических расчетов, основанных на теории Био, с экспериментальными результатами на природных образцах относительно мало. К наиболее значительным экспериментальным результатам, направленным на верификацию теории Био, относится работа [Winkler et al., 1989] по исследованию частотной зависимости скорости волны Стоунли и ее длины поглощения на границе цилиндрического отверстия в пористой, насыщенной маслом среде.

Диссипативные характеристики волны Стоунли чрезвычайно чувствительны к проницаемости пористой среды. Это обусловлено зависимостью волны Стоунли от второй продольной скорости в пористой среде, которая, в свою очередь, обладает повышенной чувствительностью к проницаемости среды. Волна Стоунли относительно легко экспериментально выделяется и исследуется, в то время как экспериментальное выделение и исследование второй продольной скорости представляет известные проблемы.

Указанные обстоятельства заставляют с особой тщательностью рассмотреть экспериментальную работу [Winkler et al., 1989] с целью верификации основных положений теории Био и существующих ей альтернатив. В настоящей статье проводится параллельное сравнение теории Био [Biot, 1956; Winkler et al., 1989] и континуальной теории фильтрации [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992; Блохин, Доровский, 1994]. Теория Био построена в рамках вариационного подхода, континуальная теория фильтрации — на основе метода законов сохранения, исходя из первых физических принципов. Метод зако-

нов сохранения позволяет легко интегрировать в континуальную теорию уравнения электродинамики [Dorovsky, Imomnazarov, 1994; Доровский, Доровский, 2009], что дает возможность рассматривать процессы, обусловленные акустоэлектрическими и магнитоакустическими взаимодействиями.

Поэтому проблема верификации линейного (акустического) приближения континуальной теории приобретает особую важность, и сравнение с широко используемой теорией Био становится актуальным. Цель предлагаемой статьи состоит в установлении соответствия двух теорий экспериментальным результатам [Winkler et al., 1989], в ответе на вопрос о целесообразности введения в теорию Био такого понятия, как извилистость, а также в целесообразности введения частотной коррекции проницаемости по Джонсону [Johnson, 1987] для насыщенных пористых сред исследуемого типа.

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ БИО–ДЖОНСОНА И КОНТИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Сравнение теорий будет проводиться на основе исследования физических свойств волн Стоунли в системе, представляющей собой насыщенную пористую среду с цилиндрическим отверстием, заполненным маслом. Система неограничена как в радиальном направлении, так и в направлении оси отверстия.

Модель Био–Джонсона рассматривается в формулировке работы [Winkler et al., 1989], в которой объединены уравнения Био [Biot, 1956] и граничные условия, предложенные в работе [Deresiewicz, Skalak, 1963]. Уравнения альтернативной модели получены линеаризацией уравнений континуальной теории фильтрации [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992]. Граничные условия открытого типа обсуждаются в Приложении 2. Гидродинамические уравнения движения в пористой среде вне цилиндрического отверстия как для теории Био–Джонсона (сформулированные в терминах смещений пористой матрицы и насыщающей ее жидкости), так и для континуальной теории (сформулированные в терминах скоростей пористой матрицы и жидкости после исключения термодинамических степеней свободы и введения соответствующих коэффициентов), в линейном приближении можно представить в универсальном виде (см. Приложение 1):

$$\rho_{11}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\ddot{\mathbf{v}} - (P - N)\nabla\text{div}\mathbf{u} - Q\nabla\text{div}\mathbf{v} - N\Delta\mathbf{u} + b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_{12}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\ddot{\mathbf{v}} - Q\nabla\text{div}\mathbf{u} - R\nabla\text{div}\mathbf{v} - b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{u} , \mathbf{v} — имеют смысл скоростей движения матрицы и насыщающей жидкости в континуальной теории фильтрации либо смещений матрицы и насыщающей жидкости в теории Био–Джонсона; ρ_{11} , ρ_{22} — парциальные плотности матрицы и насыщающей жидкости с учетом эффектов присоединенной массы, вводимых плотностью ρ_{12} ; P , Q , R , N — параметры модели; b — коэффициент межфазного трения. Здесь и далее точка над буквой означает производную по времени. Важно отметить, что исходные динамические уравнения линейной теории Био и нелинейной континуальной теории фильтрации в присутствии термодинамических степеней свободы существенно различаются.

В приведенных уравнениях (1), (2) и ниже в граничных условиях (4)–(7) параметры P , Q , R , N выражаются через упругие модули (табл. 1): в теории Био–Джонсона — через упругие модули K_s , K_b , K_f , N (модули всестороннего сжатия: составляющего пористую матрицу материала, незаполненного пористого скелета, насыщающей жидкости, соответственно; и модуль сдвига насыщенной пористой среды); в континуальной теории фильтрации — через модули K , γ , μ (модуль всестороннего сжатия, второй упругий модуль и модуль сдвига насыщенной пористой среды).

В табл. 1 использованы обозначения: $\Delta = (1 - \phi) - K_b/K_s + \phi K_s/K_f$, ρ_s , ρ_l — парциальные плотности пористой матрицы и насыщающей жидкости, связанные с физическими плотностями пористой матрицы ρ_s^{ph} и насыщающей жидкости ρ_l^{ph} соотношениями: $\rho_s = (1 - \phi)\rho_s^{ph}$, $\rho_l = \phi\rho_l^{ph}$; ρ — плотность двухскоростного континуума: $\rho = \rho_s + \rho_l = (1 - \phi)\rho_s^{ph} + \phi\rho_l^{ph}$; ρ_{12} — параметр, связываемый с присоединенной массой и определяемый извилистостью пористого пространства, α — параметр извилистости. Величина ϕ определяет пористость, k — проницаемость пористой среды, η — вязкость насыщающей жидкости.

Следует отметить, что в статье [Winkler et al., 1989] задавались только упругие модули K_s , K_f , а модули K_b и N определялись по значениям первой продольной скорости звука c_{p1} и поперечной скорости звука c_t .

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ СТОУНЛИ

Характерные параметры поверхностной волны Стоунли определяются видом дисперсионного соотношения, как условия существования нетривиального решения, удовлетворяющего условиям на поверхности раздела двух сред [Викторов, 1981], в данном случае — на границе жидкости и насыщенной

Таблица 1. Выражения коэффициентов уравнений и граничных условий через упругие модули в рассматриваемых теориях, а также компонентный состав скоростей и векторов деформаций в цилиндрической системе координат, продольная ось которой совпадает с центром заполненного жидкостью цилиндрического отверстия в пористой среде

Параметр	Теория Био–Джонсона	Континуальная теория фильтрации
Переменные		
$\mathbf{u} = \{u_r, 0, u_z\}$	Вектор смещений пористой матрицы	Вектор скорости матрицы
$\mathbf{v} = \{v_r, 0, v_z\}$	Вектор смещений насыщающей жидкости	Вектор скорости жидкости
Коэффициенты уравнений		
P	$\frac{1}{\Delta} \left\{ (1-\phi) \left((1-\phi)K_s - K_b \right) + \phi K_s K_b / K_f \right\} + \frac{4}{3}N$	$\frac{\rho_s^2}{\rho^2} \gamma + \frac{\rho_l^2}{\rho^2} K + \frac{4}{3} \mu$
Q	$\frac{1}{\Delta} \phi \left((1-\phi)K_s - K_b \right)$	$\frac{\rho_s \rho_l}{\rho^2} \gamma - \frac{\rho_l^2}{\rho^2} K$
R	$\frac{1}{\Delta} \phi^2 K_s$	$\frac{\rho_l^2}{\rho^2} \gamma + \frac{\rho_l^2}{\rho^2} K$
N	N	μ
Плотности		
ρ_{11}	$\rho_s - \rho_{12}$	ρ_s
ρ_{22}	$\rho_l - \rho_{12}$	ρ_l
ρ_{12}	$-(\alpha-1)\rho_l$	0
Диссипативный коэффициент		
b	$\phi^2 \frac{\eta}{k}$	$\frac{\rho_l}{\rho} \cdot \frac{\eta}{k_0}$

этой жидкостью пористой среды. Уравнения в пористой среде представлены выше (1), (2). Уравнения в жидкости внутри цилиндрического отверстия в линейном приближении сводятся к уравнению, определяющему скорость жидкости \mathbf{v}^* :

$$\rho_f^{ph} \ddot{\mathbf{v}}^* - M \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0, \quad (3)$$

где ρ_f^{ph} — физическая плотность жидкости, M — упругий модуль жидкости.

Условия на границе раздела насыщенной пористой среды и жидкости, заполняющей скважину, выраженные через скорости в континуальной теории фильтрации и через смещения в теории Био–Джонсона, также имеют универсальный для обеих теорий вид (в цилиндрических координатах) (см. Приложение 2):

$$u_r (1-\phi) + v_r \phi = v_r^*, \quad (4)$$

$$(P+Q-2N) \operatorname{div} \mathbf{u} + (Q+R) \operatorname{div} \mathbf{v} + 2N \partial_r u_r = M \operatorname{div} \mathbf{v}^*, \quad (5)$$

$$N (\partial_r u_z + \partial_z u_r) = 0, \quad (6)$$

$$Q \operatorname{div} \mathbf{u} + R \operatorname{div} \mathbf{v} + b_b (\dot{\phi}_u - \dot{\phi}_v) = \phi M \operatorname{div} \mathbf{v}^*. \quad (7)$$

Подстановка решений уравнений (1) — (3) и требование равенства нулю определителя матрицы коэффициентов получаемой системы (4) — (7) дают необходимое для дальнейшего анализа дисперсионное соотношение. Скорость волны Стоунли v_{St} и коэффициент затухания $1/Q$ определяются действительной и мнимой компонентами волнового вектора \mathbf{k} гармонического решения: $v_{St} = \omega / \operatorname{Re}(k_z)$, $1/Q = 2 \operatorname{Im}(k_z) / \operatorname{Re}(k_z)$.

Таблица 2. Параметры образцов, используемые в работе [Winkler et al., 1989], а также параметры K_b и c_{p2} , рассчитанные по формулам, приведенным в приложении цитируемой работы

Параметр	A	B	C	Berea S.S.
Пористость ϕ	0.265	0.229	0.223	0.21
Проницаемость $k, D = 10^{-12} \text{ м}^2$	3.6	2.3	1.3	0.22
Плотность вещества матрицы $\rho_s^{ph}, \text{ кг/м}^3$	2300	2270	2290	2650
Плотность насыщающей жидкости $\rho_s^{ph}, \text{ кг/м}^3$	960	934	818	934
Кинематическая вязкость $\nu, C_S = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	100	10	1	10
Скорость звука в жидкости $c_f, \text{ м/с}$	1014	999	926	999
Характерная частота, $\omega_a = \eta\phi / \alpha_\infty k_0 \rho_l^{ph}, \text{ кГц}$	488	66	11	482
Упругие модули, ГПа				
K_s	50	50	50	37
K_f	0.987	0.932	0.706	0.932
N	5.19	4.86	5.22	8.95
K_b	5.77	7.28	6.09	8.93
Скорости звука в насыщенной пористой среде, м/с				
c_{p1}	2850	2930	2822	3208
c_{p2}	589.8	581.5	547.9	520.2
c_t	1680	1610	1665	2005

Результаты расчета частотной зависимости скоростей и коэффициента поглощения волны Стоунли приведены для четырех образцов (трех искусственных А, В, С и одного природного Berea SandStone) лучшего песчаника для лабораторных исследований, для которых имеются экспериментальные и теоретические кривые в работе [Winkler et al., 1989]. Значения параметров этих образцов приведены в табл. 2.

ВОЛНЫ СТОУЛИ И ТЕОРИИ БИО И БИО–ДЖОНСОНА

Диссипация в модель Био входит посредством сил межфазного трения. Коэффициент трения b связан с проницаемостью k соотношением $b = \phi^2 \eta / k$. Частотная зависимость проницаемости k и извилистости α (параметр, ассоциированный с ρ_{12}) определяется в работе Джонсона [Johnson, 1987]:

$$k = k_0 / F(\omega), \quad \alpha = i \alpha_\infty \omega_a F(\omega) / \omega,$$

где $F(\omega) = \sqrt{1 - i\omega/2\omega_a} - i\omega/\omega_a$, $\omega_a = \eta\phi / \alpha_\infty k_0 \rho_l^{ph}$.

Ниже (рис. 1) приводятся результаты расчета частотной зависимости скоростей и длины поглощения волны Стоунли для четырех образцов А, В, С, Berea S.S. [Winkler et al., 1989]. Для всех образцов сплошная черная кривая соответствует теоретической кривой в работе, в расчетных данных которой не учитывается частотная зависимость проницаемости; экспериментальные данные на графиках отмечены точками. Кривые в цвете в нижеприведенных графиках соответствуют расчетам, проведенным для настоящей статьи и значению варьируемых параметров, указанных непосредственно на графике.

Для кривой частотной зависимости фазовой скорости волны Стоунли Berea S.S. (природный образец) характерная частота ω_a принимает значение, равное ~ 482 кГц (см. рис. 1). Для аналогичной кривой частотной зависимости для образца А характерная частота ω_a принимает значение ~ 488 кГц (рис. 2).

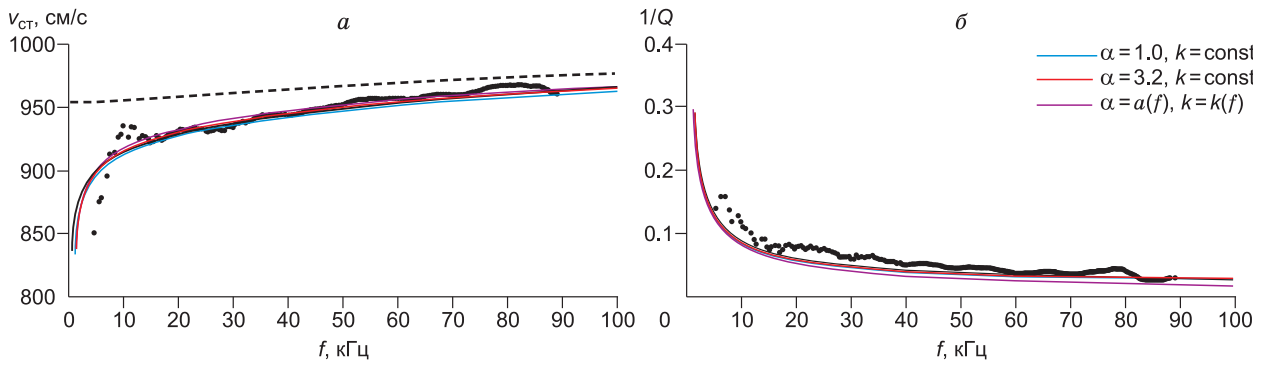


Рис. 1. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли для различных параметров.

Теория Био–Джонсона, природный образец Berea S.S ($\omega_a = 482$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

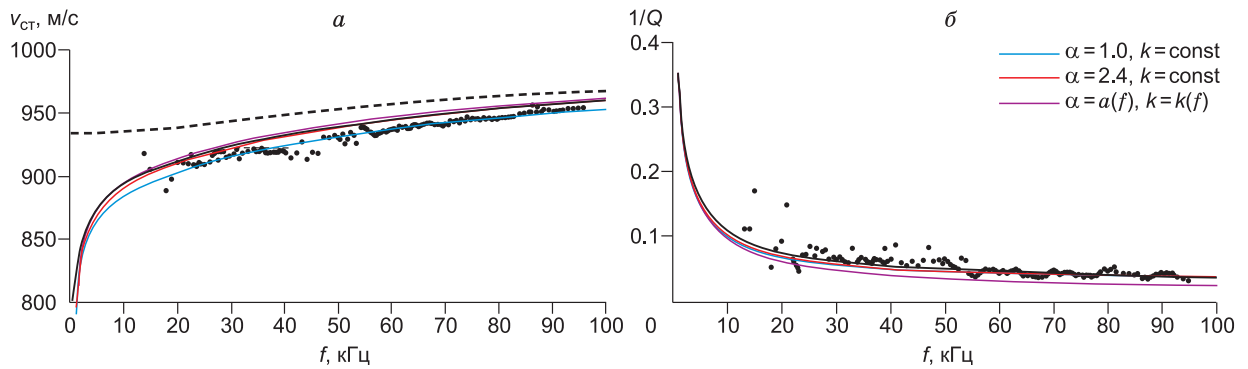


Рис. 2. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли для различных параметров.

Теория Био–Джонсона, искусственный образец А ($\omega_a = 488$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

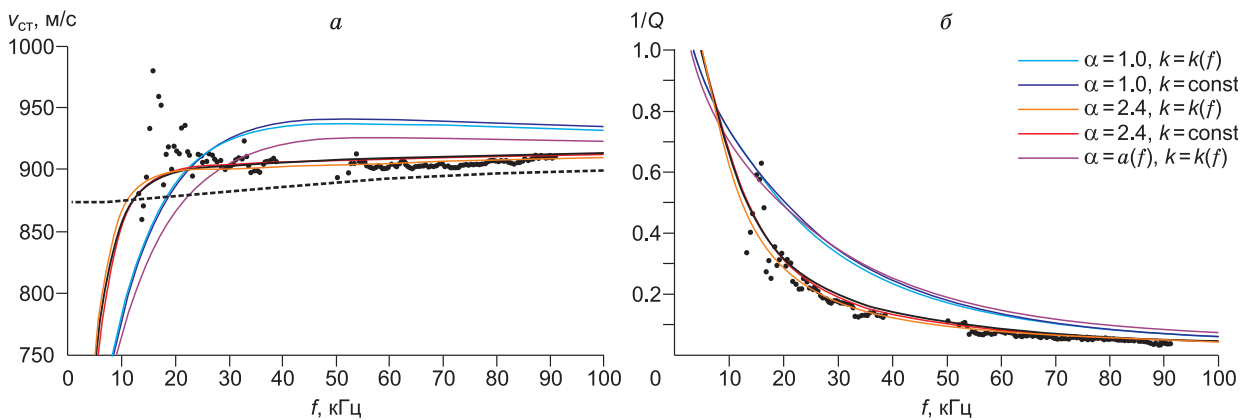


Рис. 3. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли для различных параметров.

Теория Био–Джонсона, искусственный образец С ($\omega_a = 11$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

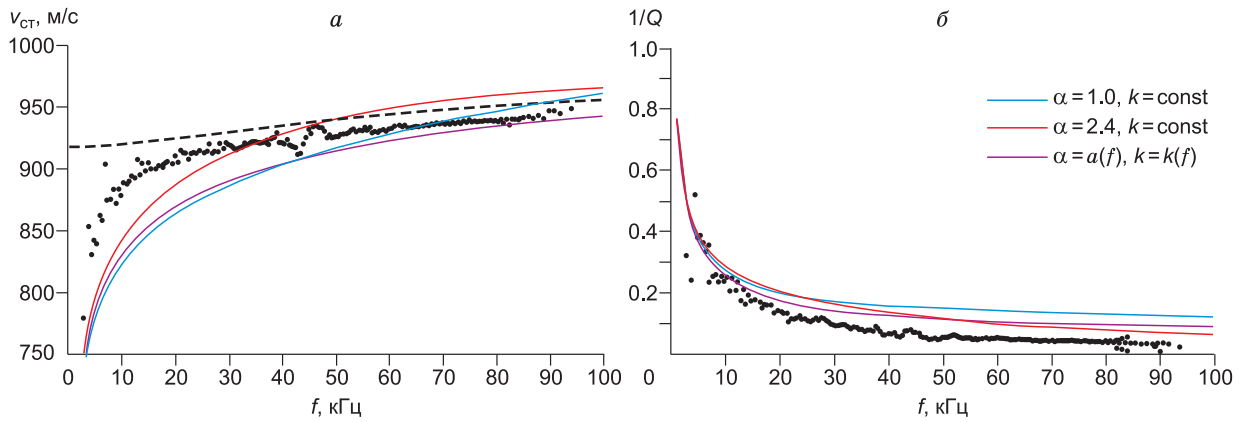


Рис. 4. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли для различных параметров.

Теория Био–Джонсона, искусственный образец В ($\omega_a = 66$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

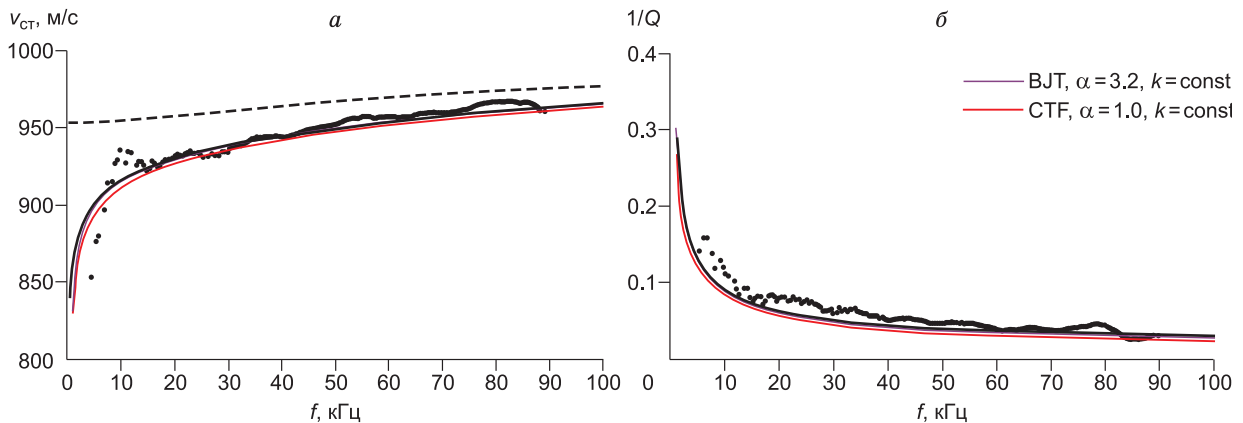


Рис. 5. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли в теории Био–Джонсона (ВJT) и континуальной теории фильтрации (СТФ).

Природный образец Berea S.S. ($\omega_a = 482$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

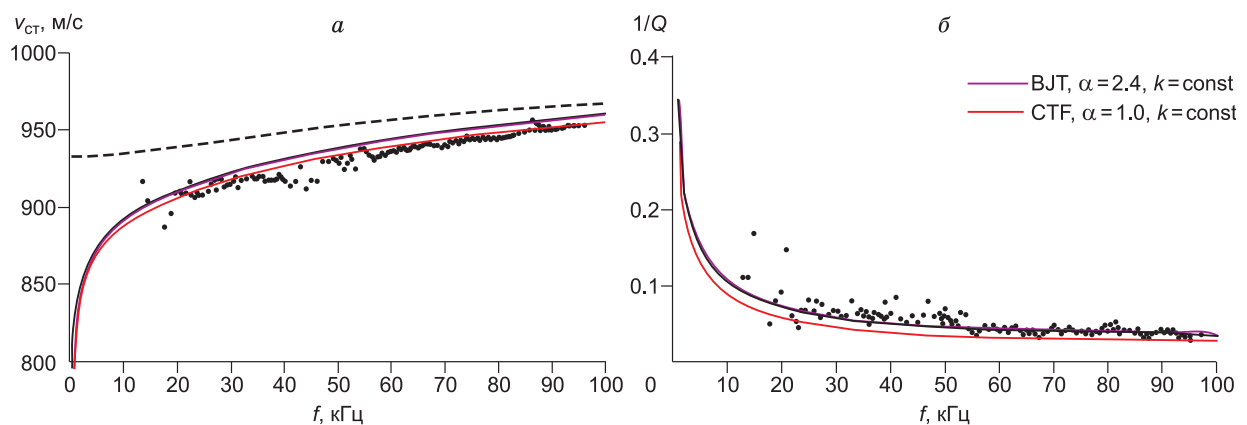


Рис. 6. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли в теории Био–Джонсона (ВJT) и континуальной теории фильтрации (СТФ).

Искусственный образец А ($\omega_a = 488$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

Как легко заметить, нулевое значение параметра ρ_{12} (отсутствие извилистости: $\alpha = 1$) дает хорошее согласие с экспериментальными результатами. Присутствие извилистости в уравнениях ухудшает согласие с результатами эксперимента для искусственного образца. Частотная коррекция извилистости и проницаемости при этом не дает дополнительного вклада. То есть экспериментальные результаты лучше согласуются с теорией Био в отсутствие частотной коррекции проницаемости и извилистости.

Для образца С ($\omega_a = 11$ кГц, рис. 3) вводим извилистость и выбираем ее значение так, чтобы расчеты соответствовали экспериментальным результатам (кривая, выделенная красным цветом). Действие будет иметь смысл, если для другого образца В ($\omega_a = 66$ кГц, рис. 4) экспериментальный результат также ляжет на расчетную кривую. Легко заметить, что при характерной частоте $\omega_a = 66$ кГц (см. рис. 4) экспериментальный результат не согласуется с выбранной стратегией коррекции теории Био (кривая, выделенная красным цветом, см. рис. 4), т.е. введение извилистости позволяет согласовать экспериментальные результаты для образца С с $\omega_a = 11$ кГц без частотной коррекции проницаемости. Но такой выбор извилистости приводит к полному несоответствию теории и эксперимента для образца с характерной частотой $\omega_a = 66$ кГц. Частотная коррекция Джонсона и здесь не позволяет улучшить согласие с экспериментальными данными (см. кривую с $\alpha(f)$ и $k(f)$ на рис. 4).

Приведенные расчеты и экспериментальные результаты по четырем образцам позволяют сделать заключение, что введение частотных зависимостей проницаемости и извилистости не решает проблемы уже для образцов с характерной частотой $\omega_a = 66$ кГц и ухудшают согласие с экспериментальными результатами для образцов с $\omega_a = 482, 488$ кГц. Корректировка теории на всех образцах одновременно введением извилистости невозможна, т.е. оснований для введения в теорию такого понятия, как извилистость, нет.

ВОЛНЫ СТОУНЛИ И КONTИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Диссипация в континуальной модели определяется коэффициентом межфазного трения b , которому можно искусственно сопоставить проницаемость (в отличие от модели Био–Джонсона — постоянную) $k = \rho_1 \eta / \rho b$. Параметр ρ_{12} модели Био в континуальной теории отсутствует: $\rho_{12} = 0$, что соответствует в модели Био значению извилистости $\alpha = 1$. Континуальная теория фильтрации не содержит частотной коррекции проницаемости.

Ниже приведены расчеты характеристик волн Стоунли для тех же самых четырех образцов (см. табл. 2), расчеты для которых проводились по теории Био–Джонсона, представленных выше (на графиках — черная сплошная линия). На рис. 5–8 приведены расчеты по теории Био–Джонсона (ВТ) (для случая постоянных проницаемости k и извилистости α) и по континуальной теории фильтрации (СТФ).

Непосредственно из результатов расчета видно, что для образцов с характерной частотой $\omega_a = 488, 482$ кГц (обр. Berea S.S., см. рис. 5, и А, см. рис. 6) континуальная теория, так же как и теория Био–Джонсона, дает хорошее совпадение без всякой частотной коррекции. Континуальная теория фильтрации также дает неплохое совпадение для образца В со значением характерной частоты $\omega_a = 66$ кГц (см. рис. 7). Проблема возникает в случае образца С с аномально высокой текучестью (см. рис. 8). Это экзотические образцы, но проблема частотной зависимости, как это видно из графика, сохраняется. Любопытно отметить, что формальное введение параметра извилистости в континуальную теорию практически решает все проблемы для образца С (розовая кривая, см. рис. 8) и при этом несколько улучшает результаты для остальных образцов. Однако физический механизм, стоящий за этой коррекцией в континуальной теории, неясен.

ОБСУЖДЕНИЕ

Приведенные расчеты говорят о дополнительной дисперсии скорости волн Стоунли от диссипативного параметра, отличного от проницаемости. Действительно, гидродинамика насыщенных пористых сред отличается от обычной гидродинамической теории прежде всего тем, что в двухскоростной теории отсутствует локальное термодинамическое равновесие в силу наличия относительной скорости — локальной термодинамической переменной гидродинамического характера. Общее представление о локальном гидродинамическом равновесии, принимаемом в односкоростной гидродинамической теории здесь не применимо. В двухскоростной теории мы имеем дело с локальным неравновесным термодинамическим параметром, который должен обуславливать локальную релаксацию и тем самым определять дисперсию акустических характеристик системы, если следовать логике работы [Мандельштам, Леонтович, 1937], описывающей релаксационные процессы в конденсированных средах. Само введение проницаемости как диссипативного параметра системы (на самом деле следует говорить о силе трения, пропорциональной вязкости жидкости и обратно пропорциональной проницаемости) обус-

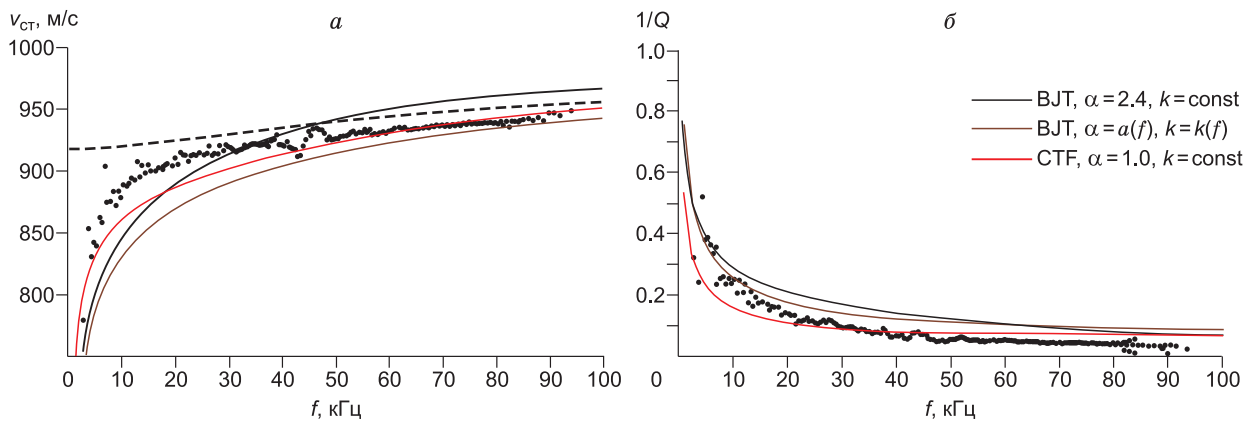


Рис. 7. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли в теории Био—Джонсона (ВЈТ) и континуальной теории фильтрации (СТФ).

Искусственный образец В ($\omega_a = 66$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

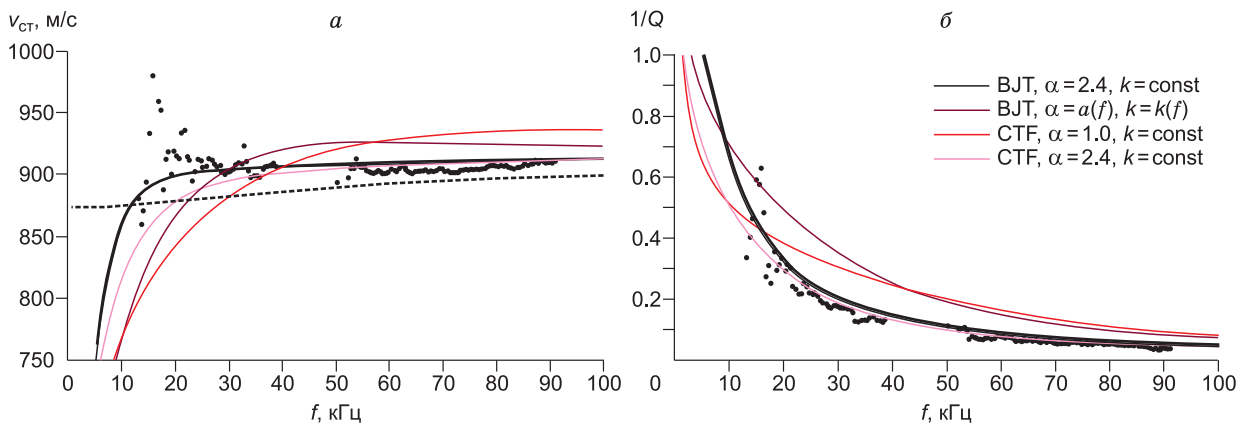


Рис. 8. Частотная зависимость скорости (а) и коэффициента затухания (б) волны Стоунли в теории Био—Джонсона (ВЈТ) и континуальной теории фильтрации (СТФ).

Искусственный образец С ($\omega_a = 11$ кГц). Точки — экспериментальные данные из [Winkler et al., 1989].

ловливает локальную экспоненциальную релаксацию, совмещенную с релаксацией гидродинамических переменных на гидродинамическом масштабе. Действительно, рассмотрим корректную, внутренне не противоречивую двухскоростную модель среды с одним давлением [Доровский, Перепечко, 1989]. Для фильтрационной системы [Блохин, Доровский, 1994] это означает, что мы для простоты рассмотрения пренебрегаем упругим взаимодействием между элементами пористой матрицы. Релаксация в такой системе описывается линеаризованными (в акустическом приближении) уравнениями:

$$\partial_t v_i = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \frac{1}{\rho_{0,l}} f_i, \quad \partial_t u_i = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i p - \frac{1}{\rho_{0,s}} f_i,$$

где сила трения имеет вид $\mathbf{f} = b(\mathbf{u} - \mathbf{v})$. Очевидно, разность скоростей определяется простым кинетическим уравнением:

$$\partial_t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = -\frac{\rho_0}{\rho_{0,s}} \bar{\omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

с решением $\exp(-\rho_0 \bar{\omega} t / \rho_{0,s})$. В последнем выражении введена характерная частота $\bar{\omega} = b / \rho_{0,l}$. Система может допускать разделение коэффициента трения $b = (\rho_{0,l} / \rho_0) \cdot \eta \cdot k^{-1}$ на диссипативный η («внепоровая» вязкость жидкости) и геометрический факторы k (проницаемость). В правильных динамических уравнениях введение в теорию коэффициента трения равносильно введению локальной релаксации —

причины дисперсии акустических характеристик системы при частотах $\omega \geq \bar{\omega} \rho_{0,l} / \rho_0$. Введение всякой другой частотной зависимости, например проницаемости, требует более четкого физического обоснования, чем это предложено в теории Био–Джонсона.

Таким образом, анализ расчетных данных по теории Био как в отсутствие частотной коррекции, так и с учетом частотной коррекции, согласно работе Д. Джонсона [Johnson et al., 1987], а также с учетом экспериментальных данных по частотной зависимости скоростей волн Стоунли, позволяет сделать следующие утверждения: 1) необходимости введения такого параметра, как извилистость, нет; 2) частотная коррекция проницаемости не решает проблемы частотной зависимости волн Стоунли, например, для практически важного случая со значением характерной частоты $\omega_a = 66$ кГц; 3) экспериментальные данные указывают на то, что частотная зависимость волн Стоунли обусловлена не только межфазным трением, но и релаксационными процессами другой природы; 4) континуальная теория фильтрации при меньшем количестве параметров, входящих в теорию, дает более адекватный результат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как теория Био–Джонсона, так и континуальная теория фильтрации хорошо описывают акустику насыщенных пористых сред с характерными частотами $\omega_a = 488, 482$ кГц. Но континуальная теория, в отличие от теории Био–Джонсона, позволяет получить хорошее согласие с экспериментальными данными по волнам Стоунли на границе насыщенных пористых сред для образцов с характерными частотами $\omega_a = 66, 488, 482$ кГц без введения частотной коррекции, т.е. с меньшим количеством вводимых в теорию дополнительных параметров. Проблемы частотной зависимости возникают в континуальной теории фильтрации только при описании образцов с характерной частотой $\omega_a = 11$ кГц. Формальное введение в этом случае в континуальную теорию фильтрации параметра, аналогичного параметру извилистости теории Био, без частотной коррекции позволяет добиться хорошего согласия с параметрами волн Стоунли по всем экспериментально исследованным образцам, однако понимание природы такого расширения теории требует дополнительных исследований. Подчеркнем, в отличие от теории Био, континуальная теория фильтрации вводит в рассмотрение только три упругих модуля, взаимно-однозначно связанных с тремя скоростями звука насыщенной пористой среды, что дает континуальной теории преимущество при исследовании вопросов, связанных с технологическими задачами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Уравнения континуальной теории фильтрации формулируются в терминах скоростей матрицы и жидкости \mathbf{u}, \mathbf{v} [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992; Блохин, Доровский, 1994]. В линейном приближении динамические уравнения в насыщенной пористой среде можно записать в виде

$$\rho_s \partial_t u_i - \partial_k \sigma_{ik} - \frac{\rho_s}{\rho_l} \partial_t s + b(u_i - v_i) = 0,$$

$$\rho_l \partial_t v_i - \partial_k s - b(u_i - v_i) = 0.$$

Полный тензор напряжений и давление определяются соотношениями $\Sigma_{ik} = \sigma_{ik} + \frac{\rho}{\rho_l} s \delta_{ik}$, $s = -\frac{\rho_l}{\rho} p$, так что $\Sigma_{ik} = \sigma_{ik} - p \delta_{ik}$.

Уравнения теории Био формулируются в терминах смещений матрицы и жидкости \mathbf{u}, \mathbf{v} [Biot, 1956]. Линейные уравнения движения насыщенной пористой среды можно записать в виде

$$\rho_s \partial_t^2 u_i - \rho_{12} \partial_t^2 (u_i - v_i) - \partial_k \sigma_{ik} + b(\partial_t u_i - \partial_t v_i) = 0,$$

$$\rho_l \partial_t^2 v_i + \rho_{12} \partial_t^2 (u_i - v_i) - \partial_t s - b(\partial_t u_i - \partial_t v_i) = 0.$$

Полный тензор напряжений определяется соотношением $\Sigma_{ik} = \sigma_{ik} + s \delta_{ik}$; давление, в отличие от континуальной теории фильтрации, вводится соотношением $s = -\phi p$, так что $\Sigma_{ik} = \sigma_{ik} - \phi p \delta_{ik}$.

Таким образом, уравнения теорий в линейном приближении отличаются определением давления, в результате чего в континуальной теории фильтрации градиент гидродинамического давления входит и в уравнение на скорость деформируемой пористой матрицы и непосредственно определяет ее эволюцию.

Тензоры напряжений в изучаемых теориях через параметры P, Q, R, N выражаются соотношениями, представленными в табл. 3 (в случае континуальной теории фильтрации — временные производные давления и тензора напряжения).

Таблица 3. Выражения тензоров напряжений в теории Био и их временных производных в КТФ через параметры P, Q, R, N

Тензор напряжений в насыщающей жидкости	
ВJT: $s = -\phi p$	$Q \operatorname{div} \mathbf{u} + R \operatorname{div} \mathbf{v}$
СТФ: $\dot{s} = -\frac{\rho_l}{\rho} \dot{p}$	
Тензор напряжений в пористой матрице	
ВJT: σ_{ik}	$(P - 2N)\delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} + Q\delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} + N(\partial_i u_k + \partial_k u_i)$
СТФ: $\dot{\sigma}_{ik} + \frac{\rho_s}{\rho_l} \dot{s} \delta_{ik}$	
Полный тензор напряжений в насыщенной пористой среде	
ВJT: Σ_{ik}	$(P + Q - 2N)\delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} + (Q + R)\delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} + N(\partial_i u_k + \partial_k u_i)$
СТФ: $\dot{\Sigma}_{ik}$	

В результате подстановки выражений для тензоров напряжений в динамические уравнения, получаем универсальную систему уравнений (1), (2).

Определение скоростей звука по упругим модулям в насыщенной пористой среде в теории Био дается соотношениями (A-19)—(A-27) из статьи [Winkler et al., 1989]:

$$c_{p1,p2}^2 = \frac{1}{2\rho_\Delta^2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4\rho_\Delta^2 (PR - Q^2)} \right),$$

$$\Delta = \rho_{22}P + \rho_{11}R - 2\rho_{12}Q, \quad \rho_\Delta^2 = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 = \rho_s\rho_l - \rho\rho_{12},$$

$$c_t^2 = \frac{1}{\rho_s - \rho_{12}/\alpha} N,$$

в которых коэффициенты P, Q, R, N как функции упругих модулей определены в табл. 2.

В континуальной теории фильтрации определение скоростей звука по упругим модулям в насыщенной пористой среде дается соотношениями [Блохин, Доровский, 1994]

$$c_{p1,p2}^2 = \frac{1}{2\rho\rho_s} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4\rho_s\rho_l \left(K\gamma + \frac{4}{3}(K + \gamma)\mu \right)} \right),$$

$$\Delta = \rho_l K + \rho_s \gamma + \frac{4}{3}\rho\mu,$$

$$c_t^2 = \frac{1}{\rho_s} \mu,$$

но, в отличие от теории Био, все три упругих модуля K, γ, μ однозначно определяются по значениям первой и второй продольных скоростей звука c_{p1}, c_{p2} и поперечной скорости звука c_t

$$K = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho_l} \left(\rho c_{p1}^2 + \rho c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \rho_l c_t^2 - \sqrt{(\rho c_{p1}^2 - \rho c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \rho_s \rho_l c_t^4} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\rho c_{p1}^2 + \rho c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \rho_s c_t^2 + \sqrt{(\rho c_{p1}^2 - \rho c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \rho_s \rho_l c_t^4} \right),$$

$$\mu = \rho_s c_t^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Определим граничные условия на примере континуальной теории фильтрации. Условия на границе пористая среда—жидкость для случая открытых пор принимаются в следующем виде (звездочка означает параметр, относящийся к жидкости в скважине, индекс n отвечает нормальной компоненте тензора, индекс τ — касательной):

закон сохранения массы приводит к соотношению

$$u_n (1 - \phi) + v_n \phi = v_n^* ;$$

закон сохранения импульса требует непрерывности нормальных и касательных напряжений

$$\Sigma_{mn} = \Sigma_{mn}^* ,$$

$$\Sigma_{n\tau} = 0 ;$$

уравнение баланса импульса жидкой фазы, в силу линейности модели, позволяет получить условие, аналогичное использованному в [Deresiewicz, Skalak, 1963; Rosenbaum, 1974]:

$$\sigma_{mn}^l = \phi \sigma_{mn}^* ,$$

где под тензором напряжений жидкой компоненты σ_{mn}^l ($\Sigma_{ik} = \sigma_{mn}^s + \sigma_{mn}^l$) в общем случае понимается тензор напряжений, включающий в себя и диссипативную часть со слагаемым $b(\dot{u}_n - \dot{v}_n)$.

Последнее условие в линейном приближении может быть записано в форме

$$-\frac{\rho_l}{\rho} p + b_b (\varphi_u - \varphi_v) = -\phi p^* ,$$

где $\varphi_{\{u,v\}}$ — скалярный потенциал, вводимый в разложении полей $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \nabla \varphi_{\{u,v\}} + \text{rot } \boldsymbol{\Psi}_{\{u,v\}}$ на потенциальную и соленоидальную части.

Коэффициент межфазного трения на границе b_b может быть представлен в виде κb , где κ — задаваемый параметр, но в общем случае b_b может задаваться и отличным образом. В данной статье приводятся результаты, полученные в предположении об открытости границы, т.е. коэффициент κ полагается нулю, как и в работе [Winkler et al., 1989].

ЛИТЕРАТУРА

- Блохин А.М., Доровский В.Н.** Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск, ОИГГМ СО РАН, 1994, 187 с.
- Викторов И.А.** Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М., Наука, 1981, 288 с.
- Доровский В.Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика, 1989 (7), с. 39—45.
- Доровский В.Н., Перепечко Ю.В.** Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989 (9), с. 56—65.
- Доровский В.Н., Перепечко Ю.В.** Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ, 1992, т. 33, № 3, с. 403—409.
- Доровский В.Н., Доровский С.В.** Электромагнитоакустический метод измерения электропроводности и ξ -потенциала // Геология и геофизика, 2009, т. 50 (6), с. 735—744.
- Мандельштам Л.И., Леонтович М.А.** К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 6, с. 438—444.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. II. // J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, № 2, p. 168—191.
- Biot M.A.** Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, № 5, part I, p. 1254—1264.
- Deresiewicz H., Skalak R.** On uniqueness in dynamic poroelasticity // Bull. Seismol. Soc. Amer., 1963, v. 53, № 4, p. 783—788.
- Dorovsky V.N., Imomnazarov Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium // Mathem. Comp. Modell., 1994, v. 20, № 7, p. 91—97.
- Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Romensky E.I.** Godunov's scheme for the analysis of the nonlinear wave process in the two-velocity media with elastic interaction // ASME. FED, 1994, v. 196, № 9, p. 355—366.

Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // J. Fluid Mech., 1987, v. 176, p. 379—402.

Rosenbaum J.H. Synthetic microseismograms: logging in porous formations // Geophys., 1974, v. 39, № 1, p. 14—32.

Winkler K.W., Liu H.L., Johnson D.L. Permeability and borehole Stoneley waves: comparison between experiment and theory // Geophys., 1989, v. 54, p. 66—75.

*Рекомендована к печати 21 октября 2011 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 13 октября 2010 г.,
после доработки — 1 июля 2011 г.*