

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

СибНИА им. С. А. Чаплыгина, 630051 Новосибирск

Разработана конечно-элементная модель для исследования пространственного деформирования упругих стержней при больших перемещениях. Сформулирован численный алгоритм построения многозначных нелинейных решений при наличии многих бифуркационных и предельных точек. Приведены результаты исследования устойчивости и закритических форм равновесия гибких стержней, которые подтверждены экспериментально.

Начиная с работ Кирхгофа [1] и Клебша [2] развитию теории пространственного изгиба тонких стержней посвящены многочисленные публикации, например [3–7], где обсуждались различные варианты нелинейных соотношений применительно к изгибу в области больших перемещений при малых упругих деформациях. Однако практическое решение задач нелинейного деформирования криволинейных стержней и в настоящее время вызывает определенные трудности, связанные со сложностью описания конечных поворотов в трехмерном пространстве. Точные аналитические решения могут быть получены лишь для узкого класса задач [8], поэтому основное значение приобретают численные методы анализа. В [9, 10] рассмотрены подходы к построению решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих конечные перемещения криволинейных стержней. В [11, 12] разработан метод самоуравновешенных невязок применительно к вычислению устойчивых форм равновесия консольных стержней.

Ряд работ [13–17] посвящен разработке конечно-элементных моделей. Следует отметить, что приложение предлагаемых численных подходов к решению задач нелинейной статики стержней иллюстрируется в основном построением однозначных ветвей решений без анализа устойчивости найденных состояний равновесия. В то же время известно, что решение задач нелинейного деформирования гибких тонких тел тесно связано с вопросами устойчивости и анализом возможных особых точек на кривых равновесных состояний (кривых деформирования). Затруднительно привести работы, где исследовались бы нелинейные решения со многими бифуркационными точками и проводился бы анализ устойчивости форм равновесия. Очевидно, что в общем случае получение таких решений возможно с использованием численных алгоритмов, относящихся как к механике дискретных деформируемых систем, так и к методам анализа решений соответствующих нелинейных систем уравнений. Методы построения таких решений в настоящее время разработаны недостаточно.

В данной работе предложен конечный элемент пространственно деформируемого стержня на основе теории кинематических групп [18]. Получены точные формулы для вычисления коэффициентов первой и второй вариаций потенциальной энергии элемента, в терминах которых формулируются условия равновесия и устойчивости. Рассмотрены вопросы построения решений в окрестности особых точек. Дано решение двух классических

задач об изгибе балки-стенки и кругового кольца при действии консервативных нагрузок. Показано, что даже в этих известных задачах существует множество не исследованных ранее особых точек и ответвляющихся решений, которые могут быть воспроизведены в эксперименте.

1. Для формулировки конечно-элементной модели пространственного стержня воспользуемся положениями теории кинематических групп [18], предназначенной для построения дискретных аналогов нелинейно деформируемых тел, на перемещения и повороты которых не накладывается ограничений. Будем придерживаться обозначений, принятых в [18]. Используем правило суммирования по дважды повторяющимся индексам, если не оговорено противное.

Выберем на осевой линии стержня (линии центров тяжести поперечных сечений) две узловые точки (0 и 1) и поместим в каждую из них два единичных ортогональных вектора (\mathbf{d}_{0j} и \mathbf{d}_{1j} ($j = 1, 2$)), лежащих в плоскости поперечных сечений. Образованная таким способом кинематическая группа характеризуется следующими тремя метрическими тензорами, первый из которых является скаляром:

$$a_{11} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1, \quad b_{1mp} = \mathbf{r}_1 \mathbf{d}_{mp}, \quad c_{mpnq} = \mathbf{d}_{mp} \mathbf{d}_{nq} \quad (m, n = 0, 1; \quad p, q = 1, 2).$$

Здесь $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$; \mathbf{R}_m — узловые значения радиуса-вектора осевой линии стержня.

Приведем необходимые для дальнейших построений соотношения для кинематической группы. Тензоры деформации группы имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1^{\vee} \mathbf{r}_1^{\vee} - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1), \quad \vartheta_{1mp} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1^{\vee} \mathbf{d}_{mp}^{\vee} - \mathbf{r}_1 \mathbf{d}_{mp}), \quad \nu_{mpnq} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{mp}^{\vee} \mathbf{d}_{nq}^{\vee} - \mathbf{d}_{mp} \mathbf{d}_{nq})$$

$$(m, n = 0, 1; \quad p, q = 1, 2),$$

где индексом \vee отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию.

Для первого тензора деформации определены две вариации, а для второго и третьего тензоров существуют вариации произвольного порядка:

$$\delta \varepsilon_{11} = \mathbf{r}_1^{\vee} (\delta \mathbf{R}_1^{\vee} - \delta \mathbf{R}_0^{\vee}), \quad \delta^2 \varepsilon_{11} = (\delta \mathbf{R}_1^{\vee} - \delta \mathbf{R}_0^{\vee})^2, \quad \delta^k \vartheta_{1mp} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1^{\vee} \delta^k \mathbf{d}_{mp}^{\vee} + k \delta \mathbf{r}_1^{\vee} \delta^{k-1} \mathbf{d}_{mp}^{\vee}),$$

$$\delta^k \nu_{mpnq} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^k C_k^s \delta^s \mathbf{d}_{mp}^{\vee} \delta^{k-s} \mathbf{d}_{nq}^{\vee} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

(C_k^s — биномиальные коэффициенты). Для последующих выкладок достаточно ограничиться случаем $k = 1, 2$, т. е. рассмотреть вычисление только первых двух вариаций тензоров деформаций группы.

Положим, что в процессе деформирования группы присоединенные векторы в узлах остаются единичными и ортогональными, т. е. выполняется условие $\nu_{mpmq} = 0$ (по m не суммировать). В этом случае вариации присоединенных векторов в (1.1) даются формулами (по m не суммировать)

$$\delta \mathbf{d}_{mp}^{\vee} = \delta \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{d}_{mp}^{\vee}, \quad \delta^2 \mathbf{d}_{mp}^{\vee} = \delta \boldsymbol{\omega}_m \times (\delta \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{d}_{mp}^{\vee}) \quad (m = 0, 1; \quad p = 1, 2). \quad (1.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_m$ — узловые значения вектора поворота. Будем использовать разложение векторов по базису \mathbf{e}_i декартовой системы координат x_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{e}_i x_{mi}, \quad \mathbf{d}_{mp} = \mathbf{e}_i \lambda_{mpi}, \quad \boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{e}_i \omega_{mi} \quad (m = 0, 1; \quad p = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.1)–(1.3) следует, что каждому узлу соответствуют три вариации декартовых координат и три вариации компонент вектора поворота. Таким образом, возможные состояния рассматриваемой кинематической группы характеризуются 12-компонентным вектором вариаций обобщенных координат:

$$\delta \mathbf{q}^T = [\delta x_0^T, \delta x_1^T], \quad \delta \boldsymbol{\omega}_m^T = [\delta x_{m1}^{\vee}, \delta x_{m2}^{\vee}, \delta x_{m3}^{\vee}, \delta \omega_{m1}, \delta \omega_{m2}, \delta \omega_{m3}].$$

Деформированное состояние группы определяется шестью независимыми компонентами, образующими вектор обобщенных упругих перемещений: $u^T = [\varepsilon_{11}, \vartheta_{101}, \vartheta_{102}, \vartheta_{111}, \vartheta_{112}, \theta]$ ($\theta = \nu_{1102} - \nu_{1201}$ — параметр, характеризующий взаимный поворот плоскостей поперечных сечений в узлах группы).

2. Рассмотрим деформационные соотношения для конечного элемента стержня, ассоциированного с данной кинематической группой. Если узлы на осевой линии стержня выбраны достаточно близко, то элемент будет пологим относительно секущей, проходящей через его узлы. При этом деформации элемента могут быть выражены через деформации группы:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}/l^2, \quad \alpha_p = N_m'' \vartheta_{1mp}, \quad \chi = \theta/l \quad (p = 1, 2; m = 0, 1),$$

$$N_0 = 2s(s-l)^2/l^3, \quad N_1 = 2s^2(s-l)/l^3, \quad 0 \leq s \leq l \quad (2.1)$$

(l — длина элемента, штрихом обозначена производная по координате s).

Запишем потенциальную энергию деформации конечного элемента в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (EF\varepsilon^2 + EI_{pq}\alpha_p\alpha_q + GJ\chi^2) ds, \quad (2.2)$$

где EF , EI_{pq} и GJ — жесткости стержня на растяжение, изгиб и кручение. Подставляя (2.1) в (2.2) и проводя интегрирование, получим выражение для потенциальной энергии как квадратичной формы относительно компонент вектора обобщенных упругих перемещений:

$$\Pi = (1/2)u^T K u.$$

Здесь K — симметричная матрица жесткости, ненулевые компоненты которой имеют вид

$$K_{11} = EF/l^3, \quad K_{22} = 16EI_{11}/l^3, \quad K_{23} = 16EI_{12}/l^3, \quad K_{24} = (1/2)K_{22},$$

$$K_{25} = (1/2)K_{23}, \quad K_{33} = 16EI_{22}/l^3, \quad K_{34} = (1/2)K_{23}, \quad K_{35} = (1/2)K_{33},$$

$$K_{44} = K_{22}, \quad K_{45} = K_{23}, \quad K_{55} = K_{33}, \quad K_{66} = GJ/l.$$

Первая и вторая вариации потенциальной энергии являются соответственно линейной и квадратичной формами вида $\delta\Pi = \delta q^T g$, $\delta^2\Pi = \delta q^T H \delta q$, где g , H — градиент и матрица Гесса элемента, вычисляемые по формулам

$$g = u' P, \quad P = K u, \quad H = u' K (u')^T + P_i u_i'' \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Здесь u' , u_i'' — матрицы, устанавливающие зависимость первых и вторых вариаций компонент вектора обобщенных упругих перемещений от вариаций обобщенных координат кинематической группы. Приводимые ниже производные, определяющие матрицы u' и u_i'' , находятся как коэффициенты при вариациях обобщенных координат после раскрытия вариаций компонент вектора u с помощью соотношений (1.1)–(1.3).

Отличные от нуля компоненты матрицы u' вычисляются по формулам (по m не суммировать)

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_{mi}} = b_m b_n x_{ni}, \quad \frac{\partial \vartheta_{1mp}}{\partial x_{ni}} = \frac{1}{2} b_n \lambda_{mpi}, \quad \frac{\partial \vartheta_{1mp}}{\partial \omega_{mi}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} b_n x_{nk} \lambda_{mpj},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_{0i}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} D_{kj}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{1i}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} D_{j\bar{k}},$$

$$D_{jk} = \lambda_{11j} \lambda_{02k} - \lambda_{12j} \lambda_{01k}, \quad b_0 = -b_1 = -1 \quad (i, j, k = 1, 2, 3; m, n = 0, 1; p = 1, 2),$$

где $e_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k$ — символы Леви-Чивита. Здесь и далее индекс ν опущен для сокращения записи.

Ненулевые компоненты матриц u_i'' определяются формулами (по i, m не суммировать)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_{mi} \partial x_{ni}} = \nu_m \nu_n, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_{1mp}}{\partial x_{nk} \partial \omega_{mi}} = \frac{1}{2} e_{ijk} \nu_n \lambda_{mpj},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{1mp}}{\partial \omega_{mi} \partial \omega_{mj}} = \frac{1}{4} b_n x_{nk} \lambda_{mpl} (\delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ki} \delta_{jl} - 2\delta_{kl} \delta_{ij}), \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_{mi} \partial \omega_{mj}} = \frac{1}{4} (D_{ij} + D_{ji} - 2\delta_{ij} D_{kk}),$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_{0i} \partial \omega_{1j}} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} D_{kk} - D_{ij}) \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3; m, n = 0, 1; p = 1, 2)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Полученные соотношения дают полную информацию для вычисления градиента и матрицы Гесса конечного элемента стержня.

3. Рассмотрим итерационный метод нахождения спектра решений нелинейных задач равновесия дискретной системы при действии консервативных нагрузок. Положим, что вариации потенциальной энергии деформации Π дискретной системы (ансамбля конечных элементов) зависят от N вариаций обобщенных координат: $\delta q_1, \dots, \delta q_N$, а вариация потенциала внешних сил W — от $(N+1)$ вариаций: $\delta q_1, \dots, \delta q_N, \delta q_{N+1}$. Под δq_{N+1} будем понимать вариацию параметра нагрузки.

На k -й итерации некоторого шага продолжения решения вариационное уравнение равновесия имеет вид (уравнение метода Ньютона — Рафсона с варьируемым параметром нагрузки)

$$h_{ij}^{k-1} \delta q_j^k + g_i^{k-1} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $h_{ij}^k = (h_{ij}^\Pi + h_{ij}^W)^k$; $g_i^k = (g_i^\Pi + g_i^W)^k$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N+1$); g_i^k, h_{ij}^k — компоненты градиента и матрицы Гесса полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов; индексы Π, W относятся соответственно к потенциальной энергии деформации и к потенциалу внешних сил; значения g_i^W, h_{ij}^W в общем случае определяются формулами $g_i^W = \partial W / \partial q_i, h_{ij}^W = \partial^2 W / \partial q_i \partial q_j$.

Система (3.1) состоит из N уравнений для $N+1$ неизвестных. Построим общее решение данной системы, считая, что квадратная матрица $\|h_{ij}^k\|$ порядка N не вырождена. Решение уравнений (3.1), принадлежащее евклидову пространству R_{N+1} с нормой $\delta s^k = (\delta q_i^k \delta q_i^k)^{1/2}$ ($i = 1, \dots, N+1$), разыскивается в виде (по k не суммировать)

$$\delta q_j^k = \delta q_{N+1}^k x_j^k + y_j^k \quad (j = 1, \dots, N), \quad (3.2)$$

где x_j^k, y_j^k удовлетворяют системам уравнений ($i, j = 1, \dots, N$)

$$h_{ij}^{k-1} x_j^k + h_{i, N+1}^{k-1} = 0; \quad (3.3)$$

$$h_{ij}^{k-1} y_j^k + g_i^{k-1} = 0. \quad (3.4)$$

В точках стационарности полной потенциальной энергии (равновесные состояния) имеем $g_i^0 = 0$ и, согласно (3.4), $y_j^1 = 0$. Переход из одной стационарной точки в другую осуществляется по норме $\delta s^1 = (\delta q_i^1 \delta q_i^1)^{1/2}$ ($k = 1; i = 1, \dots, N+1$) с последующим уточнением решения в плоскости, ортогональной вектору $\delta \mathbf{q}^1$, т. е. $\delta q_i^1 \delta q_i^k = 0$ ($k > 1; i = 1, \dots, N+1$) [19, 20]. С учетом (3.2) получим формулы для нахождения δq_{N+1}^k :

$$\delta q_{N+1}^k = \pm \delta s^1 / (1 + x_i^1 x_i^1)^{1/2} \quad \text{при } k = 1; \quad (3.5)$$

$$\delta q_{N+1}^k = -x_i^1 y_i^1 / (1 + x_i^1 x_i^k) \quad \text{при } k > 1. \quad (3.6)$$

Знак в (3.5) определяет направление продолжения решения. При движении по кривой равновесных состояний в заданном направлении знак в (3.5) на каждом шаге продолжения выбирается из условия, чтобы угол между векторами $\delta \mathbf{q}^1 = [\delta q_1^1, \dots, \delta q_{N+1}^1]^T$, вычисленными на двух соседних шагах, не превышал $\pi/2$.

Новые положения метрических векторов кинематической группы могут быть найдены по вычисленным вариациям обобщенных координат с помощью формул [18] (по k, m не суммировать)

$$x_{mi}^k = x_{mi}^{k-1} + \delta x_{mi}^k, \quad \lambda_{mps}^k = \lambda_{mps}^{k-1} + A_m^k e_{ijs} \lambda_{mpj}^{k-1} \delta \omega_{mi}^k + B_m^k (\lambda_{mpi}^{k-1} \delta \omega_{mi}^k \delta \omega_{ms}^k - \lambda_{mps}^{k-1} \delta \omega_{mi}^k \delta \omega_{mi}^k) \\ (i, j, s = 1, 2, 3; m = 0, 1; p = 1, 2), \quad A_m^k = \sin \delta \omega_m^k / (\delta \omega_m^k), \quad B_m^k = (1 - \cos \delta \omega_m^k) / (\delta \omega_m^k)^2.$$

В случае особых точек на кривой деформирования квадратная матрица $\|h_{ij}^0\|$ вырождена, при этом следует различать особые точки двух типов в зависимости от того, совместна или несовместна система (3.3). Если система несовместна, общее решение (3.1) при $k = 1$ имеет вид

$$\delta q_j^1 = \mu_i f_{ji}, \quad \delta q_{N+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, l < N; j = 1, \dots, N),$$

где μ_i — произвольные множители; f_{ji} — линейно независимые нетривиальные решения однородной системы уравнений $h_{ij}^0 f_{jr} = 0$ ($i, j = 1, \dots, N; r = 1, \dots, l$). Для удобства будем считать, что f_{jr} выбраны так, что справедливо условие $f_{jr} f_{jp} = \delta_{pr}$. Таким образом, вектор-столбцы матрицы $\|f_{jr}\|$ определяют возможные пути продолжения решения в окрестности особой точки. При этом переход на ответвляющиеся решения осуществляется по норме

$$\delta s^1 = (\mu_r \mu_r)^{1/2} \quad (k = 1; r = 1, \dots, l) \quad (3.7)$$

с последующим уточнением по формулам (3.6), (3.2).

Если $\det \|h_{ij}^0\| = 0$ и система уравнений (3.3) совместна, что определяется условием $f_{jr} h_{j,N+1}^0 = 0$ [20], то общее решение записывается в виде

$$\delta q_j^1 = \delta q_{N+1}^1 x_j^1 + \mu_r f_{jr} \quad (j = 1, \dots, N; r = 1, \dots, l < N).$$

В этом случае получение решений в окрестности особой точки может быть осуществлено как по формулам (3.5), (3.6), так и по формулам (3.7), (3.6). Заметим, что при $l = 1$ точки рассмотренных типов известны как предельная и бифуркационная [21].

Вопрос об устойчивости найденных состояний равновесия решается на основе критерия Сильвестра о положительной определенности матрицы $\|h_{ij}^0\|$. Такая информация легко может быть получена на прямом ходе метода Гаусса при решении систем (3.3), (3.4).

4. Рассмотрим приложение разработанного алгоритма к анализу устойчивости и закритических форм равновесия консольной балки-стенки, нагруженной в плоскости наибольшей жесткости сосредоточенной силой P на свободном конце. Для балки приняты следующие характеристики: $L/b = 10$, $b/h = 40$, $\nu = 0,3$ (L — длина балки, b, h — ширина и толщина поперечного сечения, ν — коэффициент Пуассона).

В таблице представлены зависимости параметра критической нагрузки $\lambda_* = P_* L^2 / \sqrt{GJ \cdot EI}$ (EI — наименьшая изгибная жесткость балки) от числа конечных элементов n для первых трех критических точек. Для сравнения приведено аналитическое решение [22], полученное в предположении о недеформируемости балки в докритическом состоянии.

Исследование закритического поведения проведено при использовании равномерной сетки из 10 конечных элементов. На рис. 1 приведены нелинейные характеристики деформирования, где кривые 1–3 соответствуют перемещениям u_i ($i = 1, 2, 3$) свободного

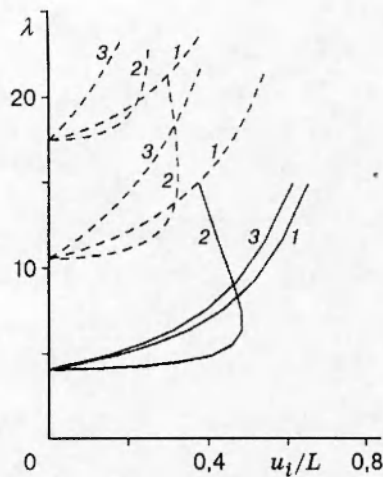


Рис. 1

конца балки в направлении осей x_i , сплошными линиями показаны устойчивые состояния, а штриховыми — неустойчивые. Из расчетов следует, что после потери устойчивости перемещение u_2 , отвечающее выходу балки из плоскости изгиба, возрастает до некоторого предела, а затем уменьшается. Так, при ответвлении решения от первой критической точки максимальное перемещение $u_2^{\max} = 0,485L$.

На рис. 2, 3 в реальном масштабе представлены формы деформирования балки в за- критической области, соответствующие решениям, ответвляющимся от первых двух точек бифуркации.

Рассмотрим спектр нелинейных решений в задаче об эластике кругового кольца узкого прямоугольного сечения, сжатого двумя радиальными силами P . Кольцо характеризуется следующими параметрами: $R/b = 10$, $b/h = 40$, $\nu = 0,3$ (R — радиус кольца). Исследовались формы деформирования, симметричные относительно плоскости Ox_1x_3 . Поэтому дискретизация проводилась для половины кольца с использованием равномерной сетки из 28 конечных элементов. Как показали дополнительные численные исследования, приня- тая степень дискретизации является достаточной для получения нелинейных решений с высокой точностью в широком диапазоне формоизменений кольца. На возможность само- пересечения кольца ограничения не накладываются.

n	Номер критической точки		
	1	2	3
	λ_*		
2	4,904	—	—
4	4,198	12,032	26,589
6	4,096	11,002	19,233
8	4,062	10,671	18,065
10	4,047	10,523	17,529
12	4,038	10,444	17,224
Решение [22]	4,01	10,24	—

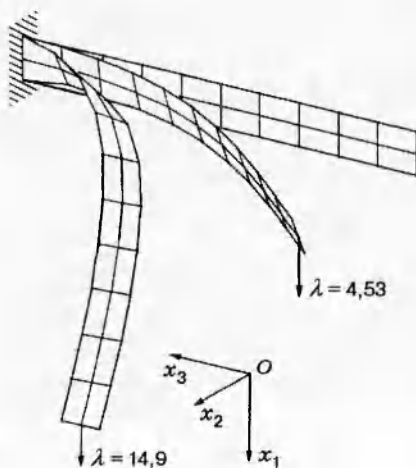


Рис. 2

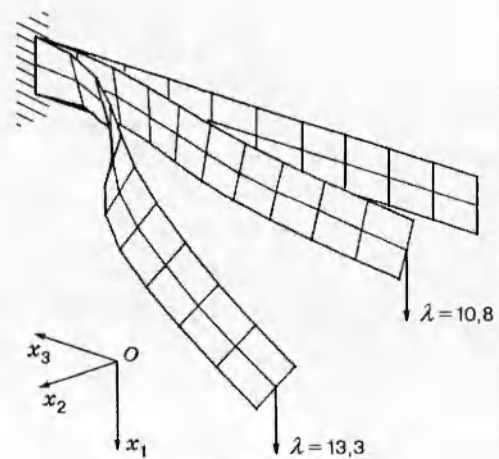


Рис. 3

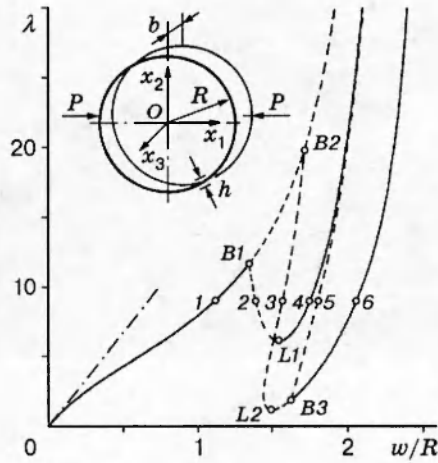


Рис. 4

На рис. 4 приведена нелинейная характеристика деформирования, где w — прогиб в точке приложения силы, EI — наименьшая изгибная жесткость, $\lambda = PR^2/EI$ — параметр нагрузки, штрихпунктирная линия — линейное решение задачи, сплошные и штриховые — устойчивые и неустойчивые состояния равновесия. Заметим, что нелинейное решение при $0 \leq w/R \leq 1$ получено, например, в [23] в предположении о нерастяжимости осевой линии кольца. Исследование задачи в пространственной постановке с использованием разработанного алгоритма позволило обнаружить неизвестные ранее особые точки и изучить ответвляющиеся решения. Основная ветвь равновесных состояний, соответствующая монотонно возрастающей нагрузке, характеризуется плоскими симметричными изгибными формами равновесия кольца (рис. 5, а). При увеличении параметра нагрузки до

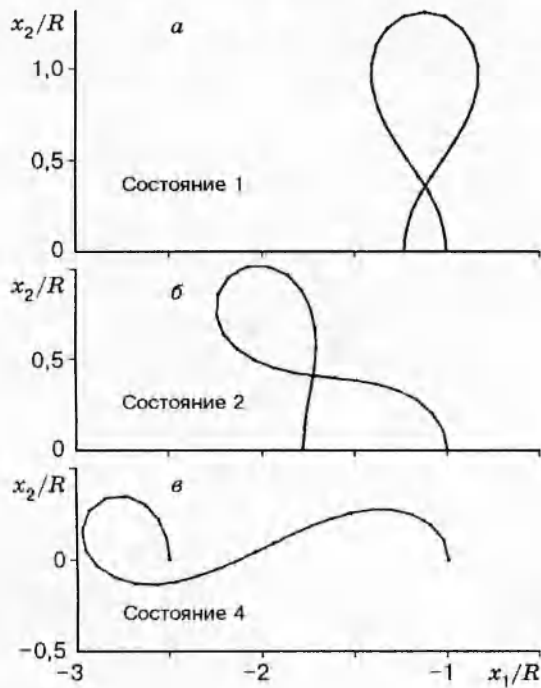


Рис. 5

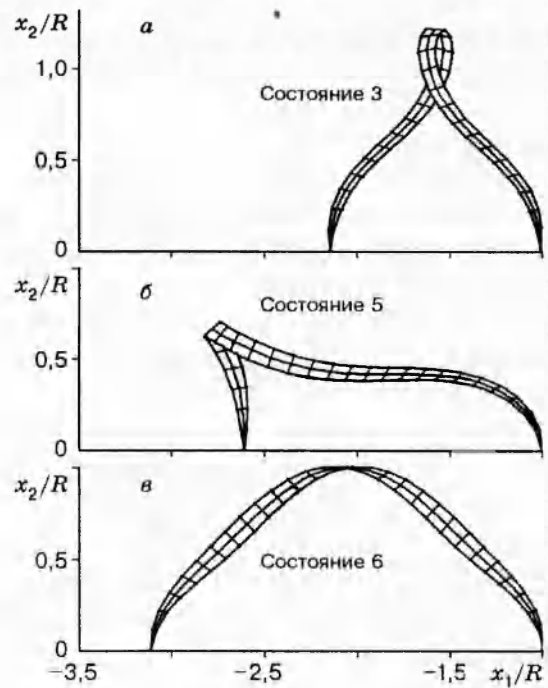


Рис. 6

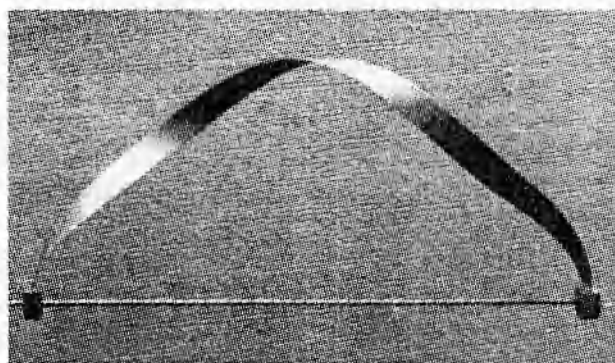


Рис. 7

$\lambda_* = 11,75$ появляется возможность ветвления форм равновесия (бифуркационная точка $B1$). Существование точки $B1$ для нерастяжимого кольца установлено в [24] аналитическим путем, при этом найдено $\lambda_* = 11,9$, что незначительно отличается от результата, полученного с помощью разработанного алгоритма. Нелинейное решение, ответвляющееся от основной ветви в точке $B1$ и содержащее предельную точку $L1$, исследовано в [25]. Формы равновесия кольца, отвечающие ветви $B1 - L1$, являются плоскими изгибными, но не обладающими симметрией деформирования (рис. 5, б, в).

Расчетами установлено, что на основной ветви при $\lambda_* = 19,8$ имеется еще одна точка бифуркации $B2$, в которой возможен переход к неустойчивым пространственным конфигурациям кольца, связанный с его закручиванием вокруг оси Ox_2 (рис. 6, а). Анализ нелинейного решения, ответвляющегося в точке $B2$, позволил обнаружить предельную точку $L2$ ($\lambda_* = 1,27$) и бифуркационную точку $B3$ ($\lambda_* = 1,97$), после прохождения которой пространственные формы равновесия становятся устойчивыми (рис. 6, в). Формы деформирования кольца, соответствующие ветви $B2 - L2 - B3$, являются изгибно-крутильными, при этом проекция осевой линии кольца на плоскость Ox_1x_2 представляет собой симметричную кривую.

Ветвление решения в точке $B3$ означает переход к пространственным неустойчивым изгибно-крутильным формам, не обладающим какой-либо симметрией деформирования (рис. 6, б).

Рассмотренные формы равновесия кольца воспроизводились в эксперименте на тонкой целлулоидной модели. На рис. 7 приведена фотография деформированного состояния кольца, соответствующего рис. 6, б (состояние б).

В заключение отметим, что построенная конечно-элементная модель стержня и разработанный численный алгоритм позволяют эффективно решать сложные задачи пространственного деформирования криволинейных стержней при наличии многих особых точек, исследовать многократное ветвление решений и анализировать устойчивость найденных состояний равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. Clebsch A. Theorie der Elasticität Fester Körper. Leipzig, 1862.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1935.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
5. Елисеев В. В. Теория упругости стержней, основанная на модели оснащенной кривой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 163–166.

6. Parker D. F. An asymptotic analysis of large deflections and rotations of elastic rods // *Int. J. Solids Structures*. 1979. V. 15, N 5. P. 361–377.
7. Danielson D. A., Hodges D. H. A beam theory for large global rotation, moderate local rotation, and small strain // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1988. V. 55, N 1. P. 179–184.
8. Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наук. думка, 1979.
9. Гайдайчук В. В. Метод построения решения нелинейных уравнений теории гибких стержней // *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1990. № 57. С. 19–23.
10. Светлицкий В. А. Нелинейные задачи статической устойчивости стержней // *Расчеты на прочность*. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 27. С. 155–170.
11. Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление пространственных равновесных форм тонких упругих стержней методом самоуравновешенных невязок // *ПМТФ*. 1994. Т. 35, № 4. С. 130–136.
12. Иванов Г. В., Иванова О. Н. Численное решение нелинейных задач о пространственных формах равновесия тонких упругих стержней // *ПМТФ*. 1995. Т. 36, № 5. С. 105–112.
13. Bathe K. J., Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1979. V. 14, N 7. P. 961–986.
14. Dvorkin E. N., Oñate E., Oliver J. On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1988. V. 26, N 7. P. 1597–1613.
15. Cardona A., Geradin M. A beam finite element non-linear theory with large rotations // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1988. V. 26, N 11. P. 2403–2438.
16. Surana K. S., Sorensen R. M. Geometrically non-linear formulation for three-dimensional curved beam elements with large rotations // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1989. V. 28, N 1. P. 43–73.
17. Hsiao K. M. Corotational total Lagrangian formulation for three-dimensional beam element // *AIAA J.* 1992. V. 30, N 3. P. 797–804.
18. Кузнецов В. В., Левяков С. В. Кинематические группы и конечные элементы в механике деформируемого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 1994. № 3. С. 67–82.
19. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // *Int. J. Solids Structures*. 1979. V. 15, N 7. P. 529–551.
20. Stoll F. An implementation of solution strategies for the analysis of complex non-linear equilibrium behavior // *Int. J. Non-linear Mechanics*. 1994. V. 29, N 2. P. 109–122.
21. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: ОНТИ, 1936.
22. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
23. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
24. Seide P., Albano E. D. Bifurcation of circular rings under normal concentrated loads // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1973. V. 40, N 1. P. 233–238.
25. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. О численном решении задач нелинейного изгиба плоских стержней // *Прикл. механика*. 1986. Т. 22, № 10. С. 91–98.

Поступила в редакцию 11/VII 1996 г.