

звука в материале кольца  $c = (E / \rho)^{1/2}$

$$\begin{aligned} q(\beta, t) &= q_0 (-vt / R \leq \beta \leq vt / R) \\ q(\beta, t) &= 0 (-\pi \leq \beta < -vt / R, vt / R < \beta \leq \pi) \end{aligned}$$

Предположим, что кольцо под действием нагрузки  $q$  обжимается безынерционно (см. фигуру). Тогда уравнение, описывающее движение кольца с начальной неправильностью, имеет вид

$$EI R^{-4} w_{,\beta\beta\beta\beta} + NR^{-2} w_{,\beta\beta} + \rho F w_{,tt} = f(\beta) \quad (N = qR) \quad (3.1)$$

Так как изучается действие нагрузок большой интенсивности, то  $N_0 = q_0 R \gg P_e$ . Уравнение (3.1) рассматриваем на переменном интервале, см. п. 1. Система с бесконечным числом степеней свободы подменяется системой с «одной» степенью свободы, но на переменном интервале.

В фиксированный момент времени  $t_1 (0 \leq t_1 \leq t_0, t_0 = \pi R / v)$  асимптотическое представление формы выпущенного кольца как системы с «одной» степенью свободы

$$\begin{aligned} w(\beta, t_1) &= \frac{a^*}{n^2} \left[ \operatorname{ch} \left( nt_1 - \frac{n l_0 \beta}{\pi v} \right) - 1 \right] \cos \frac{\beta l_0}{l^*} \quad \left( 0 \leq \beta < \frac{vt}{R} \right) \\ w(\beta, t_1) &= 0 \quad (\beta \geq vt_1 / R) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эта формула, если учесть, что  $\pi x = l_0 \beta$ , отличается от (1.10) только наличием  $\cos(\beta l_0 / l^*)$  вместо  $\sin(\pi x / l^*)$ , что обусловлено симметрией нагружения. Предельный переход при  $v \rightarrow \infty$  для (3.2) остается в силе.

Поступила 27 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

- Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
- Вольмир А. С., Кильдябеков И. Г. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 4.
- Малышев Б. М. Устойчивость стержней при ударном сжатии. Инж. ж., МТТ, 1966, № 4.
- Слепян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
- Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
- Григорьев Э. И., Чулков П. П. Теория упругих трехслойных конструкций в нелинейной постановке. В сб. Расчеты элементов авиационных конструкций, М., Машиностроение, 1965, вып. 4, стр. 99—133.

#### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ КАБЕЛЯ ПОТОКОМ НЕЙТРОНОВ И $\gamma$ -КВАНТОВ

*P. M. Зайдель (Москва)*

Рассмотрено влияние ионизирующих излучений на формирование электрического импульса между обкладками кабеля.

1. Возникновение электрического поля в диэлектрике под действием нейтронов и  $\gamma$ -квантов объясняется в основном поляризацией среды [1—5]. Для нахождения возникающей при этом разности потенциалов между оплеткой и жилой коаксиального кабеля рассмотрим вначале статическую задачу, когда все величины не зависят от времени.

Пусть диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$  заполняет пространство между двумя концентрическими проводящими окружностями радиусов  $r_1 < r_2$  (фиг. 1). Внутренняя металлическая жила ( $0 < r < r_1$ ) защищена наклонными линиями. Наружную металлическую оплетку ( $r = r_2$ ) считаем достаточно тонкой, чтобы можно было не учитывать поглощения в ней потока нейтронов и  $\gamma$ -квантов, падающих на кабель слева, перпендикулярно его оси.

Обозначим через  $\delta$  средний пробег комптоновских электронов в диэлектрике в направлении полета  $\gamma$ -кванта. В том месте, где был выбит электрон, останется положительный ион. Образовавшийся электрический диполь имеет дипольный момент с компонентами  $p_x = -e_0 \delta$ ;  $p_y = 0$ , где  $e_0$  — абсолютная величина заряда электрона.

При облучении нейтронами из атомов будет выбиваться протон отдачи, который вместе с отрицательно заряженным ионом образует диполь обратного знака  $p_x = e_0 \Delta$ ,  $p_y = 0$ , причем  $\Delta$  — пробег протона отдачи. В дальнейшем будем рассматривать только влияние  $\gamma$ -квантов, имея в виду, что эффект нейтронного облучения можно получить изменением знака и заменой  $\delta$  на  $\Delta$ .

Обозначим через  $J$  число  $\gamma$ -квантов, прошедших через площадку  $1 \text{ см}^2$ , расположенную слева от кабеля перпендикулярно оси  $x$ . В точке с координатами  $x, y$  имеем

$$J(x, y) = J \exp \frac{-L(x, y)}{\lambda_0} \quad (1.1)$$

где  $\lambda_0$  — пробег  $\gamma$ -квантов в диэлектрике, а  $L(x, y)$  — расстояние от места входа  $\gamma$ -квантов до точки  $(x, y)$ . Из фиг. 1 находим

$$L(x, y) = \sqrt{r_2^2 - y^2} + x \quad (1.2)$$

Объемная плотность  $n_\gamma$  поглощенных в веществе  $\gamma$ -квантов равна

$$n_\gamma = -\frac{\partial J(x, y)}{\partial x} = \frac{J}{\lambda_0} \exp \frac{-L(x, y)}{\lambda_0} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{J}{\lambda_0} \exp \frac{-L(x, y)}{\lambda_0} \quad (1.3)$$

так как, согласно (1.2),  $\partial L / \partial x = 1$ . Пробег  $\gamma$ -кванта в диэлектрике обычно гораздо больше диаметра кабеля:  $\lambda_0 \gg 2r_2$ , поэтому вместо (1.3) можно с достаточной точностью написать

$$n_\gamma = \frac{J}{\lambda_0} \left[ 1 - \frac{\sqrt{r_2^2 - y^2} + x}{\lambda_0} \right] \quad (1.4)$$

В области тени (на фиг. 1 горизонтальная штриховка) поток  $\gamma$ -квантов

$$J(x, y) = J \exp \left[ -\frac{L - L_1}{\lambda_0} - \frac{L_1}{\lambda_1} \right] = J \exp \left[ -\frac{L}{\lambda_0} + L_1 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (1.5)$$

$$L_1 = 2 \sqrt{r_1^2 - y^2}$$

где  $\lambda_1$  — пробег  $\gamma$ -кванта в материале жилы,  $L_1$  — путь  $\gamma$ -кванта в жиле. Производная  $\partial L_1 / \partial x = 0$ , поэтому в области тени плотность поглощенных  $\gamma$ -квантов равна

$$n_\gamma = -\frac{\partial J(x, y)}{\partial x} = \frac{J}{\lambda_0} \exp \left[ -\frac{L}{\lambda_0} + L_1 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (1.6)$$

Будем считать, что выполнено условие  $\lambda_1 \gg 2r_1$ . Тогда для области тени

$$n_\gamma = \frac{J}{\lambda_0} \left[ 1 - \frac{\sqrt{r_2^2 - y^2} + x}{\lambda_0} + 2 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \sqrt{r_1^2 - y^2} \right] \quad (1.7)$$

Пусть на каждые  $N$  поглощенных  $\gamma$ -квантов приходится один комптоновский электрон. Объемная плотность комптоновских электронов равна

$$n_e = n_\gamma / N \quad (1.8)$$

От места поглощения  $\gamma$ -кванта комптоновский электрон уходит вдоль оси  $x$  на расстояние  $\delta$ . Будем считать, что  $\delta \ll r_2$ . При этом весь диэлектрик будет поляризован. Вектор  $\mathbf{P}_0$  начальной поляризации имеет компоненты

$$P_{0x} = -e_0 \delta n_e, \quad P_{0y} = 0 \quad (1.9)$$

Такая неоднородная по пространству поляризация дает отличную от нуля объемную плотность зарядов

$$\rho_0 = -\operatorname{div} \mathbf{P}_0 \quad (1.10)$$

Применяя формулы (1.4), (1.7) и (1.9), найдем, что объемная плотность зарядов во всем диэлектрике постоянна и равна

$$\rho_0 = \text{const} = -C, \quad C = \frac{e_0 \delta}{N \lambda_0^2} J \quad (1.11)$$

Уравнения поля для однородного диэлектрика

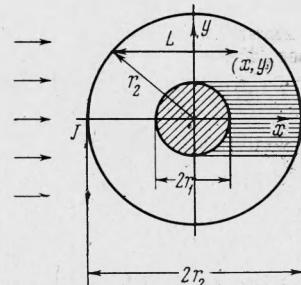
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \psi, \quad \Delta \psi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho_0 \quad (1.12)$$

должны быть решены при условии, что окружности  $r = r_1$  и  $r = r_2$  являются эквипотенциальными поверхностями. Для решения, имеющего вид  $\psi = \psi(r)$ , получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{4\pi}{\epsilon} C \quad (1.13)$$

Отсюда

$$\frac{d\psi}{dr} = -E_r = \frac{2\pi}{\epsilon} Cr - \frac{C_1}{r}, \quad \psi = \frac{\pi}{\epsilon} Cr^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (1.14)$$



Фиг. 1

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Для определения  $C_1$  нужно вычислить полный заряд, примыкающий к внутренней окружности  $r = r_1$ . На поверхности разрыва вектора поляризации имеется поверхностный заряд с плотностью

$$\sigma_0 = -(P_{2n} - P_{1n}) \quad (1.15)$$

причем вектор нормали направлен из среды 1 в среду 2. В данном случае средой 2 является диэлектрик, средой 1 — металл, в котором поляризация отсутствует. Направление нормали совпадает с радиусом-вектором  $r$ , поэтому на окружности  $r = r_1$ :

$$\sigma_0 = -P_{0r} \quad (1.16)$$

При  $r = r_1$  имеем  $x = r_1 \cos \varphi, y = r_1 \sin \varphi$ . Области тени соответствует интервал углов  $-1/2\pi < \varphi < +1/2\pi$ ; интервал  $1/2\pi < \varphi < 3/2\pi$  — область вне тени. Учитывая также, что  $P_{0r} = P_{0x} \cos \varphi$ , получаем при помощи (1.4), (1.7) и (1.9):

для  $-1/2\pi < \varphi < +1/2\pi$

$$\sigma_0(\varphi) = \lambda_0 C \left[ 1 - \frac{\sqrt{r_2^2 - (r_1 \sin \varphi)^2} + r_1 \cos \varphi}{\lambda_0} + 2 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) r_1 \cos \varphi \right] \cos \varphi \quad (1.17)$$

для  $1/2\pi < \varphi < 3/2\pi$

$$\sigma_0(\varphi) = \lambda_0 C \left[ 1 - \frac{\sqrt{r_2^2 - (r_1 \sin \varphi)^2} + r_1 \cos \varphi}{\lambda_0} \right] \cos \varphi \quad (1.18)$$

Очевидно, что (1.17) дает  $\sigma_0 > 0$ , а (1.18) дает  $\sigma_0 < 0$ , как и должно быть по физическим соображениям. Пусть  $q_0$  — полный заряд (на 1 см длины кабеля), примыкающий к окружности  $r = r_1$ :

$$q_0 = r_1 \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} \sigma_0(\varphi) d\varphi = r_1 \left[ \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \sigma_0(\varphi) d\varphi + \int_{1/2\pi}^{3/2\pi} \sigma_0(\varphi) d\varphi \right] \quad (1.19)$$

Во втором интеграле делаем замену  $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ , после чего элементарный подсчет дает

$$q_0 = -\frac{\pi r_1^2 \lambda_0}{\lambda_1} C \quad (1.20)$$

Радиальная составляющая вектора индукции, согласно (1.12) и (1.14), равна

$$D_r = -\epsilon \left[ \frac{2\pi}{\epsilon} Cr + \frac{C_1}{r} \right] \quad (1.21)$$

По теореме Гаусса

$$\oint D_n ds = 4\pi q \quad (1.22)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности,  $q$  — заряд, находящийся внутри этой поверхности. В рассматриваемом случае интеграл следует вычислять по окружности  $r = r_1$ , а вместо  $q$  нужно подставлять выражение (1.20)

$$-\frac{2\pi r_1 \epsilon}{\epsilon} \left[ \frac{2\pi}{\epsilon} Cr_1 + \frac{C_1}{r_1} \right] = 4\pi \left( -\frac{\pi r_1^2 \lambda_0}{\lambda_1} C \right) \quad (1.23)$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{2\pi}{\epsilon} r_1^2 \lambda_0 C \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \quad (1.24)$$

Подставляя это значение  $C_1$  в (1.14), для разности потенциалов между оплеткой и жилой  $V = \psi(r_2) - \psi(r_1)$  получаем формулу

$$V = \frac{B}{\epsilon} J, \quad B = \pi r_1^2 a \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 + 2 \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \right) \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right], \quad a = \frac{\epsilon_0 \delta}{N \lambda_0^2}$$

2. Рассмотрим теперь влияние проводимости  $\sigma$  диэлектрика, а также изменение потока  $\gamma$ -квантов со временем. Проводимость  $\sigma$  сложным образом зависит от мощности облучения. Поскольку ослабление пучка  $\gamma$ -квантов в кабеле считается малым, проводимость диэлектрика можно считать некоторой функцией времени  $\sigma = \sigma(t)$ , одинаковой по всему объему диэлектрика. Аналогично диэлектрическую проницаемость будем считать известной функцией времени  $\epsilon = \epsilon(t)$ .

Обозначим через  $R$  сопротивление внешней нагрузки, соединяющей оплетку и жилу на одном из концов кабеля.

Ток нагрузки  $I(t)$ , текущий в направлении от оплетки к жиле, равен

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} \quad (2.1)$$

где  $V(t)$  — разность потенциалов между оплеткой и жилой. Как показано в п. 1, поток  $\gamma$ -квантов порождает однородную по всему объему диэлектрика плотность зарядов  $\rho_0$ . Поэтому возникающий ток проводимости  $j$  будет направлен по радиусу и не будет зависеть от полярного угла  $\varphi$ . Пусть  $\rho_1(r, t)$  — объемная плотность зарядов, обусловленная проводимостью. Величины  $\rho_1$  и  $j = \sigma E$  связаны уравнением

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \sigma \operatorname{div} E = 0 \quad (2.2)$$

В уравнение поля

$$\operatorname{div} D = \epsilon \operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad (2.3)$$

входит полная объемная плотность зарядов  $\rho$ . Ее производную по времени можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \quad (2.4)$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau(t)} = \frac{\partial \rho_0}{\partial t}, \quad \tau(t) = \frac{\epsilon(t)}{4\pi\sigma(t)} \quad (2.5)$$

Обобщая формулу (1.11) на случай меняющегося со временем потока  $\gamma$ -квантов, запишем

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -aJ(t), \quad a = \frac{e_0\delta}{N\lambda_0^2} \quad (2.6)$$

В отличие от (1.11) здесь и далее в пп. 2,3 через  $J(t)$  обозначаем поток  $\gamma$ -квантов через  $1 \text{ см}^2$  в 1 сек. Условимся, что облучение кабеля началось в момент  $t = 0$ . Тогда, очевидно,  $\rho(t=0) = 0$ . При таком начальном условии уравнение (2.5) с учетом (2.6) имеет решение

$$\rho(t) = -a \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{\tau(\alpha)} \right] \int_0^t J(t') \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{\tau(\beta)} \right] dt' \quad (2.7)$$

Плотность зарядов по объему диэлектрика снова оказывается постоянной. Уравнение Пуассона для потенциала  $\psi(r, t)$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi}{\epsilon(t)} \rho(t) \quad (2.8)$$

имеет своим решением

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -E_r = \frac{r}{2} f(t) + \frac{A(t)}{r}, \quad \psi(r, t) = \frac{r^2}{4} f(t) + A(t) \ln r + A_1(t) \quad (2.9)$$

$$f(t) = \frac{4\pi a}{\epsilon(t)} \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{\tau(\alpha)} \right] \int_0^t J(t') \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{\tau(\beta)} \right] dt' \quad (2.10)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $A_1(t)$  — некоторые функции времени. Функция  $A_1(t)$  на физические результаты не влияет, поэтому можно считать, что  $A_1(t) = 0$ . При помощи (2.9) находим

$$V(t) = \psi(r_2, t) - \psi(r_1, t) = \frac{1}{4} f(t) (r_2^2 - r_1^2) + A(t) \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2.11)$$

Полный заряд  $q(t)$ , приходящийся на единицу длины внутреннего цилиндра ( $r = r_1$ ), найдем, положив  $r = r_1$  в (2.9) и применив теорему Гаусса (1.22)

$$q(t) = -\frac{\epsilon(t)}{2} \left[ \frac{r_1^2}{2} f(t) + A(t) \right] \quad (2.12)$$

Полный ток  $I_1(t)$ , уходящий с единицы длины внутреннего цилиндра, равен  $2\pi \times \sigma(t)E_r(r=r_1)$  или, согласно (2.9)

$$I_1(t) = -\sigma(t) 2\pi \left[ \frac{r_1^2}{2} f(t) + A(t) \right] = \frac{q(t)}{\tau(t)} \quad (2.13)$$

Пусть  $L$  — длина кабеля. Предполагая, что приносимый током  $I(t)$ , текущим через нагрузку  $R$ , заряд распределяется равномерно по всей длине кабеля, можно написать соотношение

$$\frac{dq}{dt} = \frac{I(t)}{L} \quad I_1(t) + \frac{dq}{dt} \quad (2.14)$$

Последнее слагаемое  $\frac{dq_0}{dt}$  учитывает изменение поверхностного заряда, примыкающего к внутреннему цилиндру  $r = r_1$ . В нестационарном случае обобщением формулы (1.20) будет

$$\frac{dq_0}{dt} = -bJ(t), \quad b = \pi r_1^2 \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a \quad (2.15)$$

Здесь  $J(t)$  и  $a$  — те же, что и в (2.6). Используя равенства (2.4), (2.12), (2.13) и (2.11), получим уравнение для  $V(t)$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{T(t)} = \frac{B}{\varepsilon(t)} J(t) \quad (2.16)$$

где постоянный коэффициент  $B$  определяется формулой (1.25), а

$$\frac{1}{T(t)} = \frac{1}{\tau(t)} + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon(t) RL} + \frac{d \ln \varepsilon}{dt} \quad (2.17)$$

Если в начальный момент разность потенциалов между оплеткой и жилой равна нулю, т. е.  $V(t=0) = 0$ , то решением уравнения (2.16) будет

$$V(t) = B \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{T(\alpha)} \right] \int_0^t \frac{J(t')}{\varepsilon(t')} \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{T(\beta)} \right] dt' \quad (2.18)$$

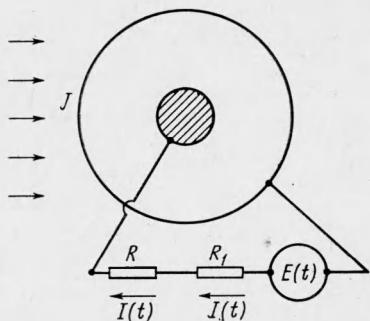
Не представляет труда учесть влияние внешней э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$ , включенной, как показано на фиг. 2. Обозначив через  $R_1$  внутреннее сопротивление источника э. д. с., вместо (2.1) получим

$$I(t) = \frac{V(t) - \mathcal{E}(t)}{R + R_1} \quad (2.19)$$

Повторяя рассуждения, придем к следующему уравнению для  $V(t)$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{T_1(t)} = \frac{B}{\varepsilon(t)} J(t) + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon(t)(R + R_1)L} \mathcal{E}(t)$$

где  $\frac{1}{T_1(t)} = \frac{1}{\tau(t)} + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon(t)(R + R_1)L} + \frac{d \ln \varepsilon}{dt} \quad (2.21)$



Фиг. 2

Естественно предположить, что к началу облучения проводимость диэлектрика была равна нулю, тока в цепи не было, так что в момент  $t = 0$  напряжение между оплеткой и жилой было равно начальному значению э. д. с.:  $V(t=0) = \mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}_0$ . При таком начальном условии решение имеет вид

$$V(t) = \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{T_1(\alpha)} \right] \left\{ \mathcal{E}_0 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')} \left[ BJ(t') + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{L(R + R_1)} \mathcal{E}(t') \right] \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{T_1(\beta)} \right] dt' \right\} \quad (2.22)$$

Обычно внешнюю э. д. с. можно считать постоянной во времени  $\mathcal{E} = \text{const} = \mathcal{E}_0$ . При этом

$$V(t) = B \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{T_1(\alpha)} \right] \int_0^t \frac{J(t')}{\varepsilon(t')} \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{T_1(\beta)} \right] dt' + \\ + \mathcal{E}_0 \exp \left[ - \int_0^t \frac{d\alpha}{T_1(\alpha)} \right] \left\{ 1 + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{L(R + R_1)} \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')} \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{T_1(\beta)} \right] dt' \right\} \quad (2.23)$$

3. Рассмотрим длинный кабель в квазистационарном приближении. Самоиндукцию и омическое сопротивление единицы длины кабеля обозначим через  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , соответственно. Ось  $x$  направим вдоль оси кабеля;  $i(x, t)$  — ток в жиле;  $v(x, t)$  — разность потенциалов между жилой и оплеткой;  $c$  — скорость света в вакууме. Падение напряжения на участке  $dx$ , равное  $(\partial v / \partial x) dx$ , складывается из омического слагаемого —  $\mathcal{R}i(x, t) dx$  и э. д. с. самоиндукции —  $(\mathcal{L}/c^2) (\partial i / \partial t) dx$ .

Поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\mathcal{R}i - \frac{\mathcal{L}}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.1)$$

Обозначим через  $q(x, t)$  заряд, приходящийся на единицу длины внутреннего цилиндра. Сохранение заряда выражается уравнением

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} - I_1(x, t) + \frac{\partial q_0}{\partial t} \quad (3.2)$$

Здесь  $I_1(x, t)$  — ток, обусловленный проводимостью  $\sigma(x, t)$  с единицы длины жилы. Обобщая (2.12) и (2.13), в случае длинного кабеля можем записать

$$q(x, t) = -\frac{\varepsilon(x, t)}{2} \left[ \frac{r_1^2}{2} f(x, t) + A(x, t) \right], \quad I_1(x, t) = \frac{q(x, t)}{\tau(x, t)}, \quad \tau(x, t) = \frac{\varepsilon(x, t)}{4\pi\sigma(x, t)} \quad (3.3)$$

где функция  $f(x, t)$  определяется формулой, аналогичной (2.10)

$$f(x, t) = \frac{4\pi a}{\varepsilon(x, t)} \exp \left[ -\int_0^t \frac{d\alpha}{\tau(x, \alpha)} \right] \int_0^t J(x, t') \exp \left[ \int_0^{t'} \frac{d\beta}{\tau(x, \beta)} \right] dt' \quad (3.4)$$

Заменив  $V(t)$  в (2.11) на  $-v(x, t)$ , запишем

$$-v(x, t) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4} f(x, t) + A(x, t) \ln(r_2/r_1) \quad (3.5)$$

Очевидным обобщением формулы (2.15) будет

$$\frac{\partial q_0(x, t)}{\partial t} = -b J(x, t) \quad (3.6)$$

При помощи (3.3) — (3.6) уравнение (3.2) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left[ \frac{1}{\tau(x, t)} + \frac{\partial \ln \varepsilon(x, t)}{\partial t} \right] v + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon(x, t)} \frac{\partial i}{\partial x} = -B \frac{J(x, t)}{\varepsilon(x, t)} \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.1) и (3.7) служит основой для дальнейших расчетов. Обозначим через  $c_1$  местную скорость сигнала по кабелю;  $C$  — емкость единицы длины кабеля;  $R^*$  — волновое сопротивление

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad C = \frac{\varepsilon}{2 \ln(r_2/r_1)}, \quad R^* = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}} = \frac{1}{c_1 C} \quad (3.8)$$

Рассмотрим случай, когда  $\varepsilon(x, t) = \text{const} = \varepsilon$ ,  $\sigma(x, t) = \text{const} = \sigma$ ,  $J(x, t) = J(t)$ . При этом система (3.1), (3.7) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mathcal{L}}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} + \mathcal{R}i = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{\tau} + \frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{B}{\varepsilon} J(t) = F(t) \quad (3.9)$$

Пусть левый конец кабеля нагружен на омическое сопротивление  $R_0$ , а правый — на сопротивление  $R_1$ . Если  $L_0$  — длина кабеля, то граничные условия можно записать так:

$$R_0 i(0, t) = -v(0, t), \quad x = 0; \quad R_1 i(L_0, t) = v(L_0, t), \quad x = L_0 \quad (3.10)$$

Начальные условия для простоты будем считать нулевыми

$$i(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0 \quad (3.11)$$

Задачу решаем при помощи преобразования Лапласа по времени, т.е. от функции-оригинала  $\Phi(x, t)$  перейдем к ее изображению

$$\Phi(x, t) \rightarrow \Phi_1(x, p) = \int_0^\infty \Phi(x, t) e^{-pt} dt \quad (3.12)$$

Система для изображений  $i_1(x, p)$ ,  $v_1(x, p)$  имеет вид

$$\frac{dv_1}{dx} + \left( \mathcal{R} + \frac{\mathcal{L}p}{c^2} \right) i_1 = 0, \quad \left( p + \frac{1}{\tau} \right) v_1 + \frac{1}{C} \frac{di_1}{dx} = F_1(p) \quad (3.13)$$

## Краевые условия для изображений

$$R_0 i_1(0, p) = -v_1(0, p), R_1 i_1(L_0, p) = v_1(L_0, p) \quad (3.14)$$

Общим решением системы (3.13) будет

$$i_1(x, p) = A_1 \operatorname{ch} \alpha x + A_2 \operatorname{sh} \alpha x,$$

$$v_1(x, p) = -R^* \left( \frac{p + 1/\tau_1}{p + 1/\tau} \right)^{1/2} (A_1 \operatorname{sh} \alpha x + A_2 \operatorname{ch} \alpha x) + \frac{F_1(p)}{p + 1/\tau} \quad (3.15)$$

Здесь  $A_1, A_2$  — произвольные постоянные

$$\tau_1 = \frac{\mathcal{L}}{c_1^2 \mathcal{P}}, \quad \alpha = \frac{1}{c_1} \left[ \left( p + \frac{1}{\tau} \right) \left( p + \frac{1}{\tau_1} \right) \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

Условимся брать ту ветвь радикала, которая для  $p > 0$  дает  $\alpha > 0$ . Подставляя (3.15) в (3.14), после вычислений найдем

$$v_1(L_0, p) = R_1 \frac{F_1(p)}{p + 1/\tau} \frac{\operatorname{ch} \alpha L_0 - 1 + (R_0/R^*) P \operatorname{sh} \alpha L_0}{(R_0 + R_1) \operatorname{ch} \alpha L_0 + [(R_0 R_1/R^*) P + R^* P^{-1}] \operatorname{sh} \alpha L_0} \\ P = [(p + 1/\tau)/(p + 1/\tau_1)]^{1/2} \quad (3.17)$$

Введем обозначения

$$y = \frac{t}{\tau}, \quad q = p\tau, \quad \beta = \frac{L_0}{c_1 \tau}, \quad \mu = \alpha L_0, \quad K = \left( \frac{q + 1}{q + \tau/\tau_1} \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

Переходя к оригиналам, запишем

$$v(L_0, t) = \frac{R_1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{qy} \frac{F_1(p)}{q+1} \frac{[\operatorname{ch} \mu - 1 + (R_0/R^*) K \operatorname{sh} \mu] dq}{(R_0 + R_1) \operatorname{ch} \mu + [(R_0 R_1/R^*) K + R^* K^{-1}] \operatorname{sh} \mu} \quad (3.19)$$

Вследствие того, что функция  $\operatorname{sh} x$  нечетна, подынтегральная функция однолистна. Интеграл (3.19) вычисляется вдоль вертикальной прямой в плоскости  $q$ , расположенной справа от всех полюсов подынтегрального выражения.

Для достаточно короткого кабеля параметр  $\beta \ll 1$ . Наиболее существенный вклад в интеграл дают полюса с конечным значением  $q$ . Разложив в (3.19) числитель и знаменатель по степеням  $\beta$ , получим

$$v(L_0, t) = \frac{1}{1 + \gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{F_1(p) dp}{p + T_1^{-1}} = -\frac{B}{(1 - \gamma)\varepsilon} e^{-t/T_1} \int_0^t J(t') e^{t'/T_1} dt' \quad (3.20)$$

Здесь обозначено

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{1 + \gamma} \left[ \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon L_0 R} + \frac{1}{\tau} \left( 1 + \gamma \frac{\tau}{\tau_1} \right) \right], \quad \gamma = \frac{(R^*)^2}{R_0 R_1}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \quad (3.21)$$

Положим в формуле (2.18)  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const}$

$$V(t) = \frac{B}{\varepsilon} e^{-t/T} \int_0^t J(t') e^{t'/T} dt', \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} + \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{\varepsilon L R} \quad (3.22)$$

Это решение совпадает с (3.20), если  $\gamma \ll 1$ . Рассмотренный пример показывает, что для применимости формулы (2.18), помимо условия  $L_0 \ll c_1 \tau$ , должно быть выполнено неравенство  $R^* \ll \sqrt{R_0 R_1}$ . В частности, если один из концов разомкнут (например,  $R_0 = \infty$ ), то при  $L_0 \ll c_1 \tau$  можно пользоваться формулой (2.18), так как волновые явления при этом несущественны.

Не теряя общности, можно ограничиться импульсным облучением

$$J(t) = \delta(t), \quad F_1(p) = -\frac{B}{\varepsilon} \quad (3.23)$$

Как обычно,  $\delta(t)$  означает дельта-функцию. Рассмотрим случай, когда длина кабеля велика:  $\hat{p} = L_0 / c_1 \tau \gg 1$ . Заменяя в (3.19)  $\operatorname{ch} \mu$  и  $\operatorname{sh} \mu$  на  $1/2e^{\mu} \gg 1$ , получаем

$$v(L_0 \rightarrow \infty, t) = -\frac{B}{\epsilon} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p + 1/\tau} \frac{dp}{1 + (R^*/R_1)P^{-1}} \quad (3.24)$$

Отметим, что в эту формулу  $R_0$  не входит, т. е.  $v(L_0, t)$  при  $\beta \gg 1$  не зависит от нагрузки на левом конце, а ток  $i(x, t)$  обращается в нуль вдали от правого конца. Для простоты примем,  $R_1 = R^*$  (согласованная нагрузка). В случае  $\tau_1 > \tau$  обозначим

$$p + \frac{1}{\tau_1} = s, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right) > 0$$

Интеграл (3.24) запишем так:

$$\begin{aligned} v(L_0 \rightarrow \infty, t) &= -\frac{B}{2\alpha\epsilon} e^{-t/\tau_1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\alpha e^{st} ds}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} - \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{s + \alpha - \sqrt{s^2 + 2\alpha s}}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} ds \right\} = \\ &= -\frac{B}{2\epsilon} e^{-t/\tau_1} \{ e^{-\xi} I_0(\xi) - e^{-\xi} I_1(\xi) \} = \\ &= -\frac{B}{2\epsilon} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) t \right] \{ I_0(\xi) - I_1(\xi) \}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right) t > 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $I_0(\xi)$ ,  $I_1(\xi)$  — функции Бесселя мнимого аргумента.  
В случае  $\tau_1 < \tau$  обозначим

$$p + 1/\tau = s, \quad \alpha = 1/2 (1/\tau_1 - 1/\tau) > 0$$

Интеграл (3.24) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} v(L_0 \rightarrow \infty, t) &= -\frac{B}{2\alpha\epsilon} e^{-t/\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\alpha e^{st} ds}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} + \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{s + \alpha - \sqrt{s^2 + 2\alpha s}}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} ds \right\} = \\ &= -\frac{B}{\epsilon} e^{-t/\tau} \{ e^{-\xi} I_0(\xi) + e^{-\xi} I_1(\xi) \} = \\ &= -\frac{B}{2\epsilon} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) t \right] \{ I_0(\xi) + I_1(\xi) \}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau} \right) t > 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Воспользуемся асимптотическими формулами при  $x \gg 1$

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 + \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \quad I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \quad (3.27)$$

Используя эти соотношения, находим асимптотику решения (3.24)

$$\begin{aligned} v(L_0 \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty) &= -\frac{B}{2\epsilon} \frac{e^{-t/\tau_1}}{\sqrt{\pi}} \left[ \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right) t \right]^{-3/2} \text{ при } \tau_1 > \tau \\ v(L_0 \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty) &= -\frac{B}{\epsilon} \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{\pi}} \left[ \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau} \right) t \right]^{-1/2} \text{ при } \tau_1 < \tau \end{aligned} \quad (3.28)$$

Пусть  $\tau = \tau_1$  (случай Хевисайда). Если при этом  $R_1 = R^*$ , то интеграл (3.19) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} v(L_0, t) &= \frac{1}{2} f(t) - \frac{R^*}{R_0 + R^*} e^{-t/\tau} f(t - t_0) \eta(t - t_0) + \\ &\quad + \frac{R^* - R_0}{2(R_0 + R^*)} e^{-2t_0/\tau} f(t - 2t_0) \eta(t - 2t_0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

где  $t_0 = L_0 / c_1$  — время, в течение которого сигнал проходит по кабелю путь  $L_0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{F_1(p)}{p + 1/\tau} dp = -\frac{B}{\epsilon} e^{-t/\tau} \int_0^t J(t') e^{t'/\tau} dt' \\ \eta(t < 0) &= 0, \quad \eta(t > 0) = 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Считая по-прежнему  $\tau = \tau_1$ , откажемся от условия  $R_1 = R^*$ . Обозначив

$$p + \frac{1}{\tau} = \frac{z}{t_0}, \quad \xi = \frac{t}{t_0}, \quad \lambda_{0,1} = \frac{R_{0,1} - R^*}{R_{0,1} + R^*}, \quad Q = (\lambda_0 \lambda_1)^{-1} \quad (3.31)$$

так что  $|\lambda_{0,1}| < 1$ ,  $|Q| > 1$ , в случае импульсного облучения получим  $(3.32)$

$$v(L_0, t) = -\frac{BR_1 e^{-t/\tau}}{\epsilon(R_0 + R^*)(R_1 + R^*)} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{z\xi} \frac{(R_0 + R^*) e^{2z} - 2R^* e^z + R^* - R_0}{e^{2z} - Q^{-1}} \frac{dz}{z}$$

Точка  $z = 0$  не будет особой. При  $Q > 0$  полюсами первого порядка будут точки

$$z_n = -\frac{1}{2} \ln Q + i\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.33)$$

Интеграл  $(3.32)$  заменим суммой вычетов

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & -\frac{BR_1 e^{-t/\tau}}{\epsilon(R_1 + R^*)} Q^{-\xi/2} \operatorname{Re} \left\{ (\mathcal{V}\bar{Q} + \lambda_0)(\mathcal{V}\bar{Q} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i2\pi n \xi}}{\frac{1}{2} \ln Q - i2\pi n} + \right. \\ & \left. + (\lambda_0 \mathcal{V}\bar{Q} - 1)(\mathcal{V}\bar{Q} + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\pi(2n+1)\xi}}{\frac{1}{2} \ln Q - i\pi(2n+1)} \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Если  $Q < 0$ , то полюса будут в точках

$$z_n = -\frac{1}{2} \ln |Q| + i\pi(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.35)$$

Интеграл  $(3.32)$  в этом случае сводится к сумме

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & \frac{BR_1 e^{-t/\tau}}{\epsilon(R_1 + R^*)} |Q|^{-1/2} \xi \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\pi(n+\frac{1}{2})\xi}}{\frac{1}{2} \ln |Q| - i\pi(n + \frac{1}{2})} \times \right. \\ & \left. \times \left[ 1 + \frac{2iR^*}{R_0 + R^*} |Q|^{1/2} + \lambda_0 |Q| \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для некоторых расчетов формулу  $(3.19)$  при  $J(t) = \delta(t)$  удобно записать так:

$$\begin{aligned} v(L_0 t) = & -\frac{BR_1}{2\pi i \epsilon} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) t \right] \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\xi z} dz}{z + \omega} \times \\ & \times \frac{\operatorname{ch} \theta - 1 + (R_0/R^*) \Omega \operatorname{sh} \theta}{(R_0 + R_1) \operatorname{ch} \theta + [(R_0 R_1/R^*) \Omega + R^* \Omega^{-1}] \operatorname{sh} \theta} \end{aligned} \quad (3.37)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) = & \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right| z, \quad \xi = \frac{t}{2} \left| \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right|, \quad v = \frac{t_0}{2} \left| \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right|, \quad t_0 = \frac{L_0}{c_1} \\ \theta = \alpha L_0 = v \sqrt{z^2 - 1}, \quad \omega = & \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right) / \left| \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right|, \quad \Omega = \left( \frac{z + \omega}{z - \omega} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Совершим преобразование  $(3.39)$

$$z = \frac{1}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right), \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right), \quad z \pm 1 = \frac{(w \pm 1)^2}{2w}$$

переводящее внешность отрезка  $-1 < z < 1$  на внешность единичного круга  $|w| > 1$ . Пусть вначале  $\tau_1 > \tau$ , т. е.  $\omega = +1$ . Тогда

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & \frac{-BR_1}{2\pi i \epsilon (R_1 + R^*)} \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \times \\ & \times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp \left[ \frac{\xi}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right) \right] \frac{w-1}{w} \frac{(e^\theta - 1)[(w + \lambda_0)e^\theta + \lambda_0 w + 1]}{(w + \lambda_0)(w + \lambda_1)e^{2\theta} - (w\lambda_0 + 1)(w\lambda_1 + 1)} dw \end{aligned} \quad (3.40)$$

Величины  $\lambda_0, \lambda_1$  те же, что и в (3.31). Интеграл (3.40) также можно вычислять вдоль вертикальной прямой, лежащей справа от полюсов подынтегрального выражения. Подынтегральная функция в (3.37) однолистна. Следовательно, интеграл (3.40), взятый по окружности  $|w| = 1$  (в плоскости  $z$  этому соответствует дважды проходимый отрезок  $-1 < z < 1$ ), равен нулю. Поэтому в (3.40) нужно учитывать только полюса, лежащие вне единичного круга  $|w| = 1$ . Для нахождения полюсов  $w = \rho e^{i\varphi}$  имеем уравнение

$$\exp \left\{ v \left[ \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi + i \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi \right] \right\} = \frac{\lambda_0 \rho e^{i\varphi} + 1}{\rho e^{i\varphi} + \lambda_0} \frac{\lambda_1 \rho e^{i\varphi} + 1}{\rho e^{i\varphi} + \lambda_1} \quad (3.41)$$

При  $\rho > 1$  ( $\rho < 1$ ) правая часть этого уравнения по модулю меньше (больше) единицы. Отсюда следует, что  $\cos \varphi < 0$ , т. е. все корни уравнения (3.41) лежат в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} w < 0$ . Полукружность  $w = e^{i\varphi}, -1/2\pi < \varphi < 1/2\pi$  соответствует дважды проходимому отрезку  $0 < z < 1$ , поэтому интеграл (3.40) вдоль этой полукружности равен нулю. Таким образом, интеграл (3.40) можно вычислять вдоль мнимой оси  $\operatorname{Re} w = 0$ , за исключением отрезка ее, соединяющего точки  $(-i, i)$

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & -\frac{BR_1}{\pi \varepsilon (R_1 + R^*)} \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \operatorname{Re} \int_1^\infty e^{\frac{i\xi}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right)} \left( x + \frac{i}{x} \right) \times \\ & \times \frac{(e^\theta - 1) [(ix + \lambda_0) e^\theta + i\lambda_0 x + 1] dx}{(ix + \lambda_0)(ix + \lambda_1) e^{2\theta} - (i\lambda_0 x + 1)(i\lambda_1 x + 1)} \quad (3.42) \\ & \theta = \frac{iv}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\tau_1 < \tau$ , т. е.  $\omega = -1$ . Формула (3.37) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & -\frac{BR_1}{\varepsilon (R_1 + R^*)} \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp \left[ \frac{i\xi}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right) \right] \frac{w+1}{w} \times \\ & \times \frac{(e^\theta - 1) [(w - \lambda_0) e^\theta + \lambda_0 w - 1] dw}{(w - \lambda_0)(w - \lambda_1) e^{2\theta} - (w\lambda_0 - 1)(w\lambda_1 - 1)} \quad (3.43) \end{aligned}$$

Знаменатели в формулах (3.40) и (3.43) отличаются лишь знаком перед  $\lambda_0, \lambda_1$ . Очевидно, что интеграл (3.43) можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & -\frac{BR_1}{\pi \varepsilon (R_1 + R^*)} \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \operatorname{Re} \int_1^\infty \exp \left[ \frac{i\xi}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] \left( 1 - \frac{i}{x} \right) \times \\ & \times \frac{(e^\theta - 1) [(ix - \lambda_0) e^\theta + i\lambda_0 x - 1] dx}{(ix - \lambda_0)(ix - \lambda_1) e^{2\theta} - (i\lambda_0 x - 1)(i\lambda_1 x - 1)} \quad (3.44) \\ & \theta = \frac{iv}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Возвращаясь к формуле (3.37), видим, что в качестве линии интегрирования можно взять мнимую ось  $\operatorname{Re} z = 0$ , поэтому интеграл (3.37) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(L_0, t) = & -\frac{B}{\pi \varepsilon R_0} \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\xi x} \times \\ & \times \frac{R_0(ix + \omega) \sin \nu y - R^*(1 - \cos \nu y) y}{(R^*/R)y \cos \nu y + [(1 + \gamma)ix + (1 - \gamma)\omega] \sin \nu y} \frac{dx}{ix + \omega} \quad (3.45) \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \gamma = (R^*)^2 (R_0 R_1)^{-1}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}$$

При помощи (3.19) нетрудно установить, что если  $R_1 = R^*$ , то

$$v(L_0, t)|_{R_0=\infty} = v(2L_0, t)|_{R_0=R^*} \quad (3.46)$$

Обозначим через  $\psi(t)$  решение  $v(L_0, t)$  при  $R_0 = 0, R_1 = R^*$ . Представим теперь (чисто формально), что имеется кабель длиной  $2L_0$ , причем на участках  $0 < x < L_0$  и  $-L_0 < x < 0$  поляризация в каждый момент одинакова по величине, но противоположна по знаку. Можно показать (вычисления опускаем), что если в точках  $x = \pm L_0$  нагрузка согласованная:  $R_0 = R_1 = R^*$ , то напряжение в точке  $x = L_0$  совпадает с  $\psi(t)$ . Физический смысл этих соотношений очевиден.

В заключение рассмотрим тонкий кабель, для которого справедливо неравенство  $\delta \gg r_2$ . При этом можно считать, что быстрые электроны, в каком бы месте диэлектрика они ни образовались, двигаются в направлении полета  $\gamma$ -кванта и попадают на встречающуюся металлическую поверхность. Будем считать также, что пробег комptonовских электронов в металле столь мал, что их выходом из оплетки и жилы можно пренебречь. В данном случае объемная плотность поглощенных  $\gamma$ -квантов может быть получена заменой  $\exp$  в формулах (1.3) и (1.6) на единицу

$$n_\gamma = \frac{J}{\lambda_0} \quad (3.47)$$

где, как и в п. 1,  $J$  означает полный поток. Так как все быстрые электроны попадают либо на оплетку, либо на жилу, то весь диэлектрик заряжается положительно, причем с учетом (1.8) для объемной плотности зарядов получим формулу

$$\rho_0 = \frac{e_0 J}{N \lambda_0} \quad (3.48)$$

На единицу длины внутреннего цилиндра придет отрицательный заряд

$$q_0 = -\rho_0 S = -\frac{e_0 S}{N \lambda_0} J \quad (3.49)$$

где  $S$  — площадь области на фиг. 1, определяемой условиями:  $x < 0; |y| < r_1$ ,  $r_1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < r_2$ . Обозначив  $\sin \alpha = r_1 / r_2$ , запишем

$$S = r_2^2 [\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 1/2 \pi (\sin \alpha)^2] \quad (3.50)$$

Положительный объемный заряд с плотностью (3.48) и отрицательный заряд на жиле с погонной плотностью (3.49) приводят к появлению электростатического поля с потенциалом

$$\psi(r) = -\frac{\pi}{\epsilon} \rho_0 r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.51)$$

где

$$C_1 = \frac{2e_0 r_2^2}{\epsilon N \lambda_0} \left[ \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\pi}{2} (\sin \alpha)^2 \right] J \quad (3.52)$$

Разность потенциалов между оплеткой и жилой  $V = \psi(r_2) - \psi(r_1)$  может быть записана аналогично (1.25)

$$V = \frac{B^*}{\epsilon} J, \quad B^* = -\frac{e_0 \pi r_2^2}{N \lambda_0} \left[ \cos^2 \alpha - \left( \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi} + \sin^2 \alpha \right) \ln \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right] \quad (3.53)$$

Вся дальнейшая теория для тонких кабелей получается из предыдущего, если заменить всюду постоянную  $B$  из (1.25) величиной  $B^*$  из (3.53).

Автор благодарит Г. М. Гандельмана, Ф. М. Гудина, Г. Ф. Иоилева и С. А. Кучая за полезные дискуссии.

Поступила 26 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М я з д р и к о в О. А., М а н о й л о в В. Е. Электреты М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
2. Gross B. Compton Dosimeter for Measurement of Penetrating X-Rays and Gamma-Rays. Radiation Research, 1961, vol. 14, p. 117—130.
3. Gross B. Gamma Radiation Induced Current in Teflon. Nukleonik, 1964, vol. 6, No. 7.
4. Gross B. Compton current and polarisation in Gamma Irradiated Dielectrics. J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No. 5.
5. Wicklein H. W. Transient Radiation Effects in Coaxial Cables Due to Gamma-Neutrons Radiation Pulses. Communication and Electronics, January 1963, vol. 64, 473.