

3. Кузьмин Е. А., Пух В. П. Скорость роста хрупкой трещины в стекле и канифоли. Сб. «Некоторые проблемы прочности твердого тела», Изд-во АН СССР, 1959.
4. Регель В. Р. К вопросу о кинетике роста трещин в процессе разрушения твердых тел. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, № 2.
5. Журков С. Н., Томашевский Э. Е. Микроскопическое изучение роста трещин при взрыве. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, № 6.
6. Schardin H. Ergebnisse der kinematographischen Untersuchung des Glasbruchvorganges. Glastechn. Ber., 1950, vol. 23, No 2.
7. Гаек Ю. В., Друкованный М. Ф., Мишин В. В. О скорости развития трещин в горных породах и твердых телах и методы ее измерения, Сб. «Взрывное дело», 1963, № 51/8.
8. Данчев П. С., Пучков Я. М., Ветлужских В. П. О скорости распространения трещин в прочной среде при взрыве. Тр. Ин-та горн. дела «Вопросы разрушения горных пород взрывом», Свердловск, 1963.
9. Турута Н. У., Миронов П. С. Изучение влияния массовых взрывов на устойчивость бортов карьеров. Научн. зап. Укр. НИИПроекта, 1961, вып. 6.

## ОБ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ

О. В. Соснин (Новосибирск)

Показано, что прокатанный в лист толщиной 20 мм дюраль ведет себя при снятии обычной диаграммы  $\sigma - \epsilon$  как изотропный материал в упругой и пластической областях при разных температурах, в то же время при определении характеристик ползучести обнаруживает существенную анизотропию.

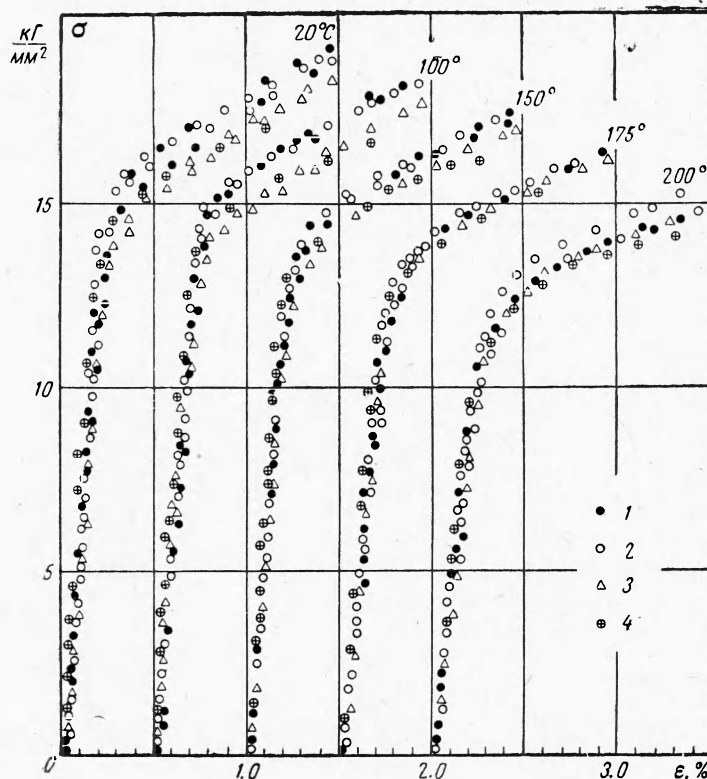
В статье [1] дан краткий обзор состояния работ по анизотропной ползучести металлических и неметаллических материалов, и, при использовании идей, развитых в теории пластичности, показаны некоторые возможности описания анизотропной ползучести с применением теоретических результатов к обработке экспериментов на ползучесть стеклопластиков. В настоящей работе, как и в [2], эти исследования проведены в приложении к установившейся анизотропной ползучести типа теории течения.

1. Для снятия диаграммы  $\sigma - \epsilon$  из листа вырезались заготовки вдоль прокатки, поперек прокатки и под углом  $45^\circ$  в плоскости листа, из которых изготавливались образцы с длиной рабочей части 50 мм и диаметром 12 мм — для растяжения и 8 мм — для сжатия. Диаграмма снималась при различной фиксированной температуре, показания абсолютного удлинения и непрерывно возрастающего усилия при сжатии с микронных индикаторов фиксировались на киноленту и затем обрабатывались, при растяжении нагрузка осуществлялась ступенями посредством грузов, а показания индикаторов на удлинение снимались визуально. Весь процесс при снятии диаграммы на сжатие не превосходил 10 сек, при растяжении — 30—35 сек. После снятия диаграммы замерялось поперечное сечение образца — практически никакой овальности в сечении не наблюдалось. На фиг. 1 представлены снятые диаграммы  $\sigma - \epsilon$ , где опытные данные на сжатие образцов, вырезанных из листа вдоль прокатки, поперек прокатки и под углом  $45^\circ$  к направлению прокатки, обозначены соответственно темными кружками, светлыми треугольниками. Крестиками обозначены данные на растяжение образцов в поперечном направлении. Все кривые идут в довольно узком пучке не только в упругой, но и в пластической областях, из чего можно заключить, что материал в смысле упруго-пластических характеристик изотропен.

Совершенно другая картина наблюдается в процессе ползучести. Эксперименты на ползучесть при растяжении проводились на образцах той же формы и вырезанных в тех же направлениях из листа. В процессе эксперимента замерялись осевое удлинение и изменение величины диаметров в двух направлениях, причем одно из них всегда выбиралось в направлении нормали к плоскости листа, другое — ему перпендикулярно. Для замера поперечных деформаций вокруг нагревательной печи на упругой подвеске крепилось кольцо из сплава инвар, на котором по взаимно перпендикулярным диаметрам устанавливались четыре микронных индикатора. Изменение поперечных размеров образца при ползучести через кварцевые стержни передавалось на эти индикаторы и фиксировалось кинокамерой или визуально.

Эксперименты проводились при  $200^\circ\text{C}$  в интервале нагрузок от 6 до 10 кг/мм<sup>2</sup>, когда первый участок на диаграммах ползучести практически не наблюдается. В процессе ползучести нагрузка либо оставалась постоянной, либо менялась ступенчато — и в том, и другом случае скорости ползучести, соответствующие одним и тем же напряжениям, совпадали, а отклонение скорости ползучести от постоянной величины при

изменении нагрузки продолжалось в течение сравнительно короткого интервала времени. Сумма деформаций в трех взаимно перпендикулярных направлениях во всех случаях была близка к нулю, особенно в области высоких напряжений. На фиг. 2 приведены диаграммы ползучести, снятые при  $\sigma = 8 \text{ кг/мм}^2$ , на растяжение на образцах:



Фиг. 1

а) вдоль прокатки и б) поперек прокатки с соответствующими поперечными деформациями. В обоих случаях скорость поперечной деформации в направлении нормали к плоскости листа больше, чем в перпендикулярном ему направлении, причем

$$\begin{aligned} \eta_{33}^{(1)} : \eta_{22}^{(1)} &= k_1 \approx 2.7 \text{ — в первом случае} \\ \eta_{33}^{(2)} : \eta_{11}^{(2)} &= k_2 \approx 2 \text{ — во втором случае} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы обозначают направления: 1 — вдоль прокатки, 2 — поперек прокатки, 3 — по нормали к плоскости листа, при этом верхний индекс соответствует направлению действия нагрузки. Таким образом, например,  $\eta_{33}^{(2)}$  обозначает скорость деформации ползучести в третьем направлении под действием осевой нагрузки, приложенной во втором направлении.

На цилиндрических образцах длиной 35 мм и диаметром 12 мм, вырезанных в тех же направлениях, были проведены при тех же температурном и силовом режиме эксперименты на ползучесть при сжатии с замером только осевых удлинений с целью сравнения поведения материала при растяжении и сжатии. Скорости деформаций ползучести во всех случаях практически совпадали, несколько меньшее совпадение было в области высоких напряжений.

В направлении нормали к плоскости листа, т. е. в его толщине, вырезались призматические образцы длиной 19 мм и поперечным сечением  $10 \times 10 \text{ мм}^2$ , на которых проводились эксперименты на сжатие с замером осевых удлинений. Учитывая идентичность поведения материала на растяжение и сжатие в плоскости листа, была предложена возможность распространения этого свойства и на все остальные направления.

Поведение материала при ползучести довольно хорошо описывалось уравнением типа теории течения

$$\dot{\eta} = B_1 \sigma^n \quad (1.2)$$

Здесь  $\eta$  — скорость деформации ползучести,  $B_i$  и  $n$  — константы материала. В результате обработки экспериментальных данных было получено

$$\begin{aligned} n &= 8 \text{ — для всех направлений} \\ B_1 &= 5 \cdot 10^{-10} \text{ [мм}^{2n} / \text{кг}^n \text{час]} \text{ — вдоль прокатки} \\ B_2 &= 3 \cdot 10^{-10} \text{ [мм}^{2n} / \text{кг}^n \text{час]} \text{ — поперек прокатки} \\ B_3 &= 17 \cdot 10^{-10} \text{ [мм}^{2n} / \text{кг}^n \text{час]} \text{ — по нормали к листу} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, материал обнаруживает ортотропность свойств при довольно сильной степени анизотропии в смысле ползучести, несмотря на практически полную изотропию вневременных упруго-пластических характеристик.

2. Как уже отмечалось, при указанных условиях основная часть деформации ползучести при постоянной и ступенчато меняющейся нагрузке является деформацией установившейся ползучести, а сам процесс можно трактовать как вязкое течение при нелинейном законе вязкости.

Для вязко-линейных сред Г. Циглером [3] сделана попытка с термодинамических позиций обосновать наличие потенциала текучести, и показано, что теория Онзагера гипотетично может быть обобщена и на случай вязко-нелинейных процессов, когда потенциал текучести не является квадратичной формой переменных. Для изотропного тела с вязко-нелинейным течением потенциал должен быть принят в виде функции от инвариантов тензора напряжений, в простейшем случае — от квадратичного инварианта, т. е. от интенсивности напряжений [4]. Обобщая это предположение на слабо анизотропные тела, будем считать, что потенциал текучести есть функция от некоторой квадратичной формы, т. е. имеет место зависимость

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi(T)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad T = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (2.1)$$

Здесь  $\eta_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации ползучести, а  $T$  — положительно определенная квадратичная форма, имеющая для тела произвольной анизотропии 21 независимый коэффициент, а при специальном выборе системы координат — 18 [5].

Формула (2.1) при одноосном напряженном состоянии должна совпадать с формулой (1.2), вследствие чего потенциальную функцию целесообразно взять в виде степенной функции от квадратичной формы

$$\Phi(T) = T^{(n+1)/2} \quad (2.2)$$

В случае ортотропного тела, выбирая систему координат совмещенной с главными осями анизотропии, количество коэффициентов в квадратичной форме можно, уменьшив до 6. Действительно, умножив (2.1) слева и справа на  $\sigma_{ij}$  и проведя суммирование по индексам, получим с учетом (2.2)

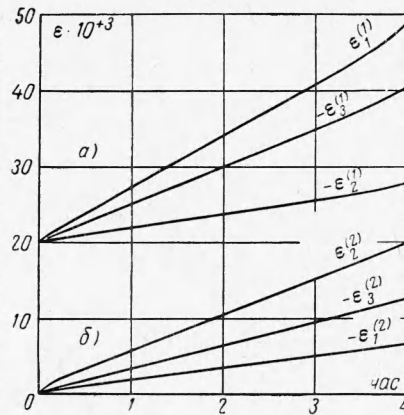
$$\sigma_{ij} \eta_{ij} = (n + 1) T^{(n+1)/2} \quad (2.3)$$

т. е. в пространстве напряжений удельная мощность диссипации энергии при ползучести с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом ползучести. Очевидно, при заданной системе внешних нагрузок удельная мощность диссипации энергии не зависит от выбора системы координат. Изменяя поочередно направление каждой из координатных осей на противоположное, легко показать, что количество коэффициентов сократится до 9 и квадратичная форма примет вид

$$\begin{aligned} T(\sigma_{ij}) &= a_{1111} \sigma_{11}^2 + a_{2222} \sigma_{22}^2 + a_{3333} \sigma_{33}^2 + \\ &+ 2a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2a_{1133} \sigma_{11} \sigma_{33} + 2a_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + 4n_{1212} \sigma_{12}^2 + 4a_{1313} \sigma_{13}^2 + 4a_{2323} \sigma_{23}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как уже отмечалось, эксперименты довольно хорошо подтверждают гипотезу о несжимаемости материала при ползучести, но тогда из (2.1) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= (n + 1) T^{(n-1)/2} (a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} + a_{1133} \sigma_{33}) \\ \eta_{22} &= (n + 1) T^{(n-1)/2} (a_{2211} \sigma_{11} + a_{2222} \sigma_{22} + a_{2233} \sigma_{33}) \\ \eta_{33} &= (n + 1) T^{(n-1)/2} (a_{3311} \sigma_{11} + a_{3322} \sigma_{22} + a_{3333} \sigma_{33}) \end{aligned}$$



Фиг. 2

Отсюда следует

$$\eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33} = (n+1) T^{(n-1)/2} [(a_{1111} + a_{2211} + a_{3311}) \sigma_{11} + (a_{1122} + a_{2222} + a_{3322}) \sigma_{22} + (a_{1133} + a_{2233} + a_{3333}) \sigma_{33}] \equiv 0$$

Это равенство должно выполняться тождественно при любых  $\sigma_{ij}$  и  $T(\sigma_{ij}) \neq 0$ ; отсюда следуют дополнительно три условия

$$(a_{1111} + a_{2211} + a_{3311}) = (a_{1122} + a_{2222} + a_{3322}) = (a_{1133} + a_{2233} + a_{3333}) = 0$$

а квадратичная форма примет вид, использованный ранее Хиллом для описания анизотропной пластичности,

$$T(\sigma_{ij}) = A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2 \quad (2.5)$$

$$(A_{11} = -a_{2233}, A_{22} = -a_{1133}, A_{33} = -a_{2211}, A_{12} = 2a_{1212}, A_{23} = 2a_{2323}, A_{31} = 2a_{3131})$$

Оставшиеся 6 коэффициентов определяются из экспериментов на ползучесть при одноосном напряженном состоянии. Пусть известны характеристики одномерной ползучести в трех главных направлениях, т. е. известны  $B_1, B_2, B_3, n$ . Принимая в (2.1), с учетом (2.2) и (2.5), последовательно отличным от нуля одно из нормальных напряжений в соответствующем главном направлении, приравнявая полученное выражение к зависимости (1.2) с соответствующим значением  $B_i$  и сравнивая члены при  $\sigma^n$ , получим систему трех уравнений относительно  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$

$$A_{22} + A_{33} = \left(\frac{B_1}{n+1}\right)^{2/(n+1)}, \quad A_{33} + A_{11} = \left(\frac{B_2}{n+1}\right)^{2/(n+1)}, \quad A_{11} + A_{22} = \left(\frac{B_3}{n+1}\right)^{2/(n+1)} \quad (2.6)$$

Разрешая ее, найдем

$$2A_{11} = \left(\frac{B_2}{n+1}\right)^{2/(n+1)} + \left(\frac{B_3}{n+1}\right)^{2/(n+1)} - \left(\frac{B_1}{n+1}\right)^{2/(n+1)} \quad (2.7)$$

Остальные два получают круговой перестановкой индексов.

Для исследуемого материала, подставляя значения  $B$  и  $n$  из (1.3), получим

$$A_{11} = 0.53 \cdot 10^{-20}, \quad A_{22} = 0.62 \cdot 10^{-20}, \quad A_{33} = 0.25 \cdot 10^{-20} [\text{мм}^{2n} / \text{кг}^n \text{час}]^{2/(n+1)}$$

Если в третьем направлении эксперименты не ставились, а замерялись поперечные деформации, например, при эксперименте в первом направлении, то из (2.1), (2.2) и (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \eta_{33}^{(1)} &= -(n+1) [A_{22} + A_{33}]^{(n-1)/2} A_{22} \sigma^n \\ \eta_{22}^{(1)} &= -(n+1) [A_{22} + A_{33}]^{(n-1)/2} A_{33} \sigma^n \end{aligned} \quad (2.8)$$

а из экспериментов известно отношение  $\eta_{33}^{(1)}: \eta_{22}^{(1)} = k_1$ .

Используя первые два равенства (2.6), найдем

$$\begin{aligned} A_{22} &= \frac{k_1}{1+k_1} \left(\frac{B_1}{n+1}\right)^{2/(n+1)}, \quad A_{33} = \frac{1}{1+k_1} \left(\frac{B_1}{n+1}\right)^{2/(n+1)} \\ A_{11} &= \left(\frac{B_2}{n+1}\right)^{2/(n+1)} - \frac{1}{1+k_1} \left(\frac{B_1}{n+1}\right)^{2/(n+1)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Третье равенство (2.6) позволяет определить  $B_3$  через  $k_1$  при известных двух других константах  $B_1$  и  $B_2$

$$B_3 = \left[ B_2^{2/(n+1)} + \frac{k_1-1}{k_1+1} B_1^{2/(n+1)} \right]^{(n+1)/2} \quad (2.10)$$

Аналогичные соотношения можно получить и из экспериментов во втором направлении, в частности, значение  $B_3$  будет

$$B_3 = \left[ B_1^{2/(n+1)} + \frac{k_2-1}{k_2+1} B_2^{2/(n+1)} \right]^{(n+1)/2} \quad (2.11)$$

Подставляя из (1.1) и (1.3) соответствующие величины в (2.10) и (2.11), получим

$B_3 = 19 \cdot 10^{-10}$  — из экспериментов в первом направлении

$B_3 = 16 \cdot 10^{-10}$  — из экспериментов во втором направлении

Обе величины довольно хорошо согласуются со значением  $B_3 = 17 \cdot 10^{-10}$ , полученным из экспериментов на сжатие.

В ряде конкретных случаев (например, труба или сфера под внутренним давлением, вращающийся диск и т. д.), когда задача решается в главных напряжениях и система координат совмещена с главными осями анизотропии, этих трех коэффициентов  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  в квадратичной форме достаточно, ибо последние три в ходе решения не используются.

Для определения остальных трех коэффициентов в (2.5) необходимо знание характеристик одномерной ползучести в трех направлениях, не лежащих в одной плоскости и не совпадающих с главными направлениями. Пусть, для простоты выкладок, эти направления лежат соответственно в трех координатных плоскостях. Введем новую систему координат, получающуюся из исходной поворотом осей  $X_1$  и  $X_2$  на положительный угол в  $45^\circ$  вокруг оси  $X_3$ . Из экспериментов, проведенных в направлении  $X'_1$ , будут известны  $B_{12}$  и  $n$ . Выразив компоненты напряжений, отнесенных к старой системе координат, совмещенной с главными осями анизотропии, через напряжение  $\sigma_v$ , совпадающее по направлению с осью  $X'_1$  новой системы координат

$$\sigma_{11} = 1/2 \sigma_v, \quad \sigma_{22} = 1/2 \sigma_v, \quad \sigma_{12} = 1/2 \sigma_v$$

и подставив их значения в (2.1), с учетом (2.2) и (2.5) найдем компоненты тензора скоростей деформаций в старых осях

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \frac{n+1}{2^n} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} A_{22}' \sigma_v^n \\ \eta_{22} &= \frac{n+1}{2^n} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} A_{11}' \sigma_v^n \\ \eta_{33} &= -\frac{n+1}{2^n} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} (A_{11}' + A_{22}') \sigma_v^n \\ \eta_{12} = \eta_{21} &= \frac{n+1}{2^n} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} A_{12}' \sigma_v^n \end{aligned}$$

Совершив обратный переход, выразим нормальные компоненты скоростей деформаций в новой системе координат через значения  $\eta_{ij}$  в старой

$$\begin{aligned} \eta_{11}' &= \frac{n+1}{2^{n+1}} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} (A_{11}' + A_{22}' + 2A_{12}') \sigma_v^n \\ \eta_{22}' &= \frac{n+1}{2^{n+1}} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} (A_{11}' + A_{22}' - 2A_{12}') \sigma_v^n \\ \eta_{33}' &= -\frac{n+1}{2^{n+1}} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n-1)/2} 2(A_{11}' + A_{22}') \sigma_v^n \end{aligned} \quad (2.12)$$

Сравнивая выражение первой из них с формулой (1.2), подставив значения  $B_{12}$ , получим после сокращения на  $\sigma_v^n$  уравнение

$$B_{12} = \frac{n+1}{2^{n+1}} [A_{11} + A_{22} + 2A_{12}]^{(n+1)/2} \quad (2.13)$$

из которого и определяется коэффициент  $A_{12}$

$$2A_{12} = 4 \left( \frac{B_{12}}{n+1} \right)^{2/(n+1)} - A_{11} - A_{22} \quad (2.14)$$

Повернув теперь старую систему координат на угол  $45^\circ$  в плоскости  $X_1X_3$ , оставив  $X_2$  без изменения и проделав аналогичные выкладки, получим

$$B_{13} = \frac{n+1}{2^{n+1}} [A_{11} + A_{33} + 2A_{13}]^{(n+1)/2} \quad (2.15)$$

откуда определим коэффициент  $A_{13}$

$$2A_{13} = 4 \left( \frac{B_{13}}{n+1} \right)^{2/(n+1)} - A_{11} - A_{33} \quad (2.16)$$

И, наконец, проделав аналогичную операцию в плоскости  $X_2X_3$  и повторив соответствующие рассуждения, найдем  $A_{23}$

$$2A_{23} = 4 \left( \frac{B_{23}}{n+1} \right)^{2/(n+1)} - A_{22} - A_{33} \quad (2.17)$$

В силу технических трудностей эксперименты в направлении, не совпадающем с главным направлением, проводились только в плоскости  $X_1X_2$  под углом  $45^\circ$  к направлению прокатки. Было найдено  $B_{12} = 3.7 \cdot 10^{-10}$  и отношение скоростей поперечных деформаций ползучести  $\eta_{33}' : \eta_{22}' = k_{12} \approx 2.1$ .

Из (2.14), подставляя значения  $B_{12}$  и  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ , найдем  $A_{12} = 1.1 \cdot 10^{-30}$ , а последние два равенства (2.12) дают

$$\eta_{33}' : \eta_{22}' = \frac{2(A_{11}' + A_{22}')}{2A_{12}' - A_{11}' - A_{22}'} = 2.25$$

