

УДК 539.3:534.1

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК С УЧЕТОМ БЕЛОГО ШУМА

Е. Ю. Крылова, И. В. Папкина*, Н. П. Ерофеев*,
В. М. Захаров*, В. А. Крысько*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

* Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.,
410054 Саратов, Россия

E-mails: kat.krylova@bk.ru, ikravzova@mail.ru,
erofeevnp@mail.ru, zakharov.victor@gmail.com, tak@sun.ru

Исследовано влияние интенсивности внешнего аддитивного белого шума на нелинейную динамику прямоугольных в плане пластин как механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Обнаружен новый сценарий, представляющий собой комбинацию классических сценариев Фейгенбаума и Помо — Монневиля. С использованием классических методов нелинейной динамики, а также вейвлет-преобразований выявлены особенности модифицированного сценария. Исследованы индуцируемые шумом переходы и показано, что при шумовом воздействии происходит переход к хаотическим колебаниям при меньшей амплитуде вынуждающей нагрузки. Установлено, что при наличии внешних флуктуаций сценарий перехода от гармонических колебаний к хаотическим может оставаться неизменным.

Ключевые слова: нелинейная динамика, параметрические колебания, индуцированные шумом переходы, пластина, хаос, вейвлеты, белый шум.

DOI: 10.15372/PMTF20160416

Введение. Гибкие пластины являются элементами конструкций в космическом, авиа-, судо-, приборостроении, работающих в средах с изменяющимися во времени свойствами (случайные ударные воздействия, звуковое давление). Поэтому возникает необходимость комплексного исследования влияния внешних шумов на поведение таких систем и определения множества параметров воздействия, характеризующих безопасные и опасные режимы. Анализу детерминированных параметрических колебаний пластин и оболочек под действием различных нагрузок посвящены работы [1–4]. Исследования в таких областях, как физика, химия, биология, показали, что случайные воздействия оказывают существенное влияние на поведение динамических систем [5]. Внешние шумы способны не только приводить к флуктуациям характеристик динамических систем, но и вызывать перестройку их режимов. В работах [6–8] и др. теоретически исследуются уравнения типа уравнений Дуффинга с учетом внешних шумов. В [9] показано, что неустойчивую по Ляпунову де-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-10290).

© Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Ерофеев Н. П., Захаров В. М., Крысько В. А., 2016

терминированную параметрическую систему можно стабилизировать путем наложения на параметрическую нагрузку случайного шума. В работе [10] экспериментально изучалось поведение балочно-ударной системы при возмущениях типа гауссова шума. Показано, что при учете нескольких форм колебаний реакция нелинейной модели существенно отличается от реакции расчетной модели с одной степенью свободы. В [11] показано, что учет количества степеней свободы оказывает значительное влияние на достоверность получаемых результатов.

Насколько известно авторам данной работы, влияние случайных флуктуаций внешней среды на нелинейную динамику гибких пластин как систем со множеством степеней свободы ранее не исследовалось. В настоящей работе впервые проводится анализ влияния внешнего аддитивного шума на поведение нелинейных механических систем в виде гибких пластин как систем с бесконечным числом степеней свободы. Использование вейвлет-анализа при исследовании нелинейной динамики континуальных механических систем позволило выявить особенности перехода рассматриваемых систем к хаотическим колебаниям. Изучение вейвлет-спектров позволяет утверждать, что сценарий может содержать элементы всех трех классических сценариев. Так, рассматриваемый в данной работе переход к хаотическому состоянию осуществляется не только путем увеличения количества бифуркаций Хопфа в сигнале (сценарий Фейгенбаума [12]), но и посредством увеличения количества хаотических “окон” (сценарий Помо — Монневила [12]).

Постановка задачи. Построена математическая модель колебаний гибкой прямоугольной в плане пластины с постоянными жесткостью и плотностью под действием знакопеременной продольной нагрузки, приложенной по ее периметру с учетом аддитивного внешнего шума, добавленного в систему уравнений в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью. Материал пластины полагается изотропным и однородным. Построенная математическая модель пластины основана на гипотезах Кирхгофа — Лява, геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана.

В прямоугольной системе координат рассматривается трехмерная область: $\Omega = \{x_1, x_2, x_3: (x_1, x_2) \in [0; a] \times [0; b], x_3 \in [-h; h]\}$, $0 \leq t < \infty$. Математическая модель пластины описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в безразмерном виде [13]

$$\frac{1}{12(1 - \mu^2)} (\nabla_{\lambda}^4 w) - L(w, F) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q(x_1, x_2, t) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla_{\lambda}^4 F + \frac{1}{2} L(w, w) = 0,$$

где $L(w, F)$, $L(w, w)$ — известные нелинейные операторы;

$$\nabla_{\lambda}^4 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2};$$

w , F — прогиб и функция усилия соответственно; μ — коэффициент Пуассона. Система (1) приведена к безразмерному виду с использованием следующих безразмерных параметров: $\lambda = a/b$; a , b — размеры пластины в плане по координатам x_1 , x_2 соответственно; $x_1 = a\bar{x}_1$, $x_2 = b\bar{x}_2$; $w = 2h\bar{w}$; $F = E(2h)^3\bar{F}$; $t = t_0\bar{t}$ — время; $q = [E(2h)^4/(a^2b^2)]\bar{q}$ — внешнее нормальное давление; $\varepsilon = (2h)\bar{\varepsilon}$ — коэффициент демпфирования среды (черта над безразмерными параметрами опускается). К уравнениям (1) добавляются граничные и начальные условия, зависящие от типа нагружения и закрепления пластины.

С учетом граничных и начальных условий система (1) сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией $O(\Delta^2)$ по пространственным переменным. Первое уравнение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени решается методом Рунге —

Кутты четвертого порядка [14] относительно функции прогиба. Далее значения функции прогиба подставляются в правую часть второго уравнения системы. Второе уравнение системы (1) становится линейным и решается методом обратной матрицы относительно функции усилия на каждом шаге по времени. Число разбиений в методе конечных разностей равно $n = 14$ [15].

Модифицированный сценарий Фейгенбаума. В детерминированных системах известно несколько сценариев перехода колебаний в хаотические, т. е. простые детерминированные системы способны генерировать внутренний шум. Случайный характер среды способствует индуцированию большего количества различных режимов колебаний. Переходы от одной структуры к другой аналогичны равновесным фазовым переходам и переходам, встречающимся в неравновесных системах при детерминированных внешних воздействиях. Таким образом, классические методы анализа можно распространить на явления, в которых существенную роль играет шум.

Исследовалось влияние интенсивности внешнего шума на сценарии перехода колебаний прямоугольной пластины в хаотические под действием продольной знакопеременной нагрузки $p_{x_1} = p_{x_2} = p_0 \sin \omega_p t$ (ω_p, p_0 — частота и амплитуда внешнего воздействия соответственно на временном интервале $t \in (0; 286)$, $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0,3$), действующей по периметру пластины. К системе (1) добавлялись неоднородные граничные условия опирания на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) ребра [16]:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, 1: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = p_{x_2} + p_n, \\ x_2 = 0, 1: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = p_{x_1} + p_n \end{aligned}$$

и начальные условия

$$w(x_1, x_2)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Аддитивный шум добавлен в систему уравнений в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью $p_n = p_{n0}(2.0 \text{ rand}() / (\text{RAND_MAX} + 1.0) - 1.0)$, где p_{n0} — интенсивность шума; $\text{rand}()$ — стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое значение от 0 до RAND_MAX ; RAND_MAX — константа, равная 65 535. В результате без амплитуды формула принимает произвольные дробные значения в диапазоне $(-1; 1)$. При исследовании колебаний результаты, полученные для центральной точки срединной плоскости пластины, обобщаются на всю пластину.

В численном эксперименте для детерминированных параметрических колебаний рассматриваемых механических систем при частоте внешней продольной нагрузки $\omega_p = 8,7 > \omega_0$ (ω_0 — частота собственных колебаний пластины) получен модифицированный сценарий Фейгенбаума. Выяснилось, что под действием рассматриваемой нагрузки с малыми амплитудами колебания пластины происходят на частоте, равной половине частоты внешней силы. С увеличением амплитуды нагрузки характер колебаний меняется на двухчастотный, в спектре присутствуют две частоты: ω_p и $\omega_1 = \omega_p/2$. При дальнейшем увеличении управляющего параметра p_0 система переходит в хаотическое состояние по сценарию, представляющему собой комбинацию двух классических сценариев: Фейгенбаума и Помо — Монневиля. С увеличением амплитуды внешней продольной нагрузки наблюдается увеличение количества бифуркаций Хопфа в сигнале (сценарий Фейгенбаума). Получено пять последовательных бифуркаций, при которых частота удваивается, затем в сигнале появляются хаотические “окна” (сценарий Помо — Монневиля). В численном эксперименте получена константа Фейгенбаума (см. таблицу), поэтому данный сценарий

Экспериментально полученные значения константы Фейгенбаума

Номер бифуркации	$p_{0,n}$	d_n
1	1,700 000	—
2	1,820 000	4,395 604 000
3	1,847 300	4,604 486 000
4	1,853 229	4,657 501 964
5	1,854 500	—

следует называть модификацией именно сценария Фейгенбаума. На основе данных таблицы получаем сходящуюся последовательность

$$d_n = \frac{p_{0,n} - p_{0,n-1}}{p_{0,n+1} - p_{0,n}} = 4,657\,501\,964, \quad n = 4.$$

Теоретическое значение константы Фейгенбаума равно $d = 4,669\,162\,2$ [12], различие теоретического и экспериментального значений составляет менее 0,25 %.

Вейвлет-анализ является альтернативой анализу Фурье и позволяет отследить локализованные особенности сигнала. Коэффициенты Фурье, наоборот, определяют поведение сигнала на всем временном интервале. Рассматривая сигнал, характеристики которого существенно меняются с течением времени, с помощью фурье-анализа, получаем суммарную картину поведения. Анализ построенных вейвлет-спектров с использованием материнского вейвлета Гаусса 32-го порядка [17] позволил выявить особенности полученного сценария (рис. 1). Во-первых, мощности гармоник сигнала на различных частотах неравномерны по времени. Низкая частота, соответствующая второй бифуркации удвоения, становится видимой на вейвлет-спектре при $p_0 = 1,834$ лишь на временном интервале $t \in (70; 286)$ (см. рис. 1, *a*). Во-вторых, частоты, соответствующие четвертой ($p_0 = 1,853\,229$) и пятой

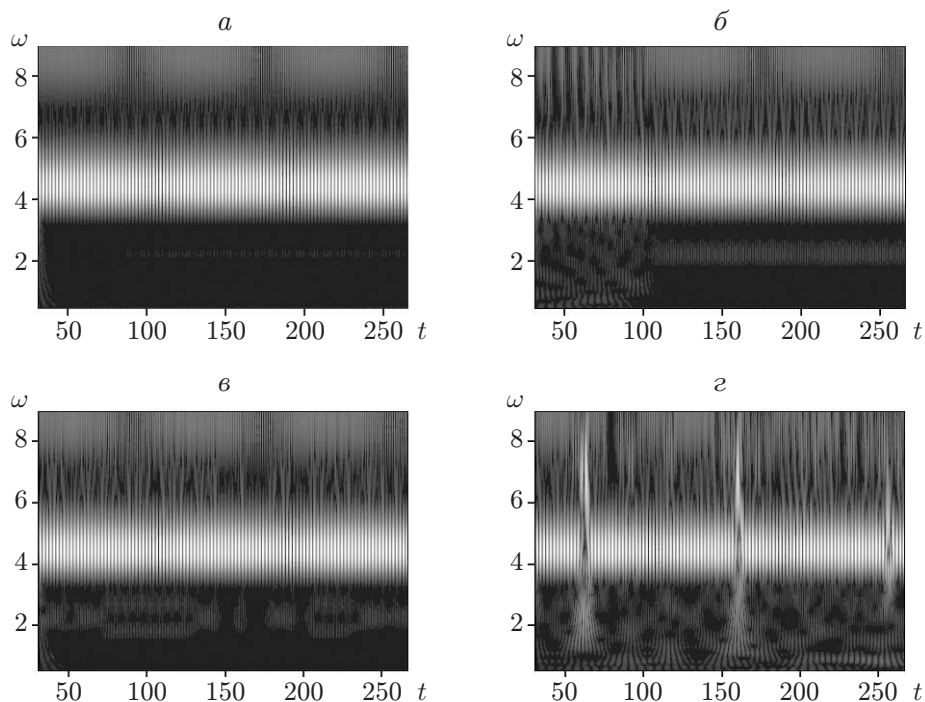


Рис. 1. Вейвлет-спектры при различных значениях амплитуды нагрузки: *a* — $p_0 = 1,8340$, *б* — $p_0 = 1,8556$, *в* — $p_0 = 1,8597$, *г* — $p_0 = 1,8700$

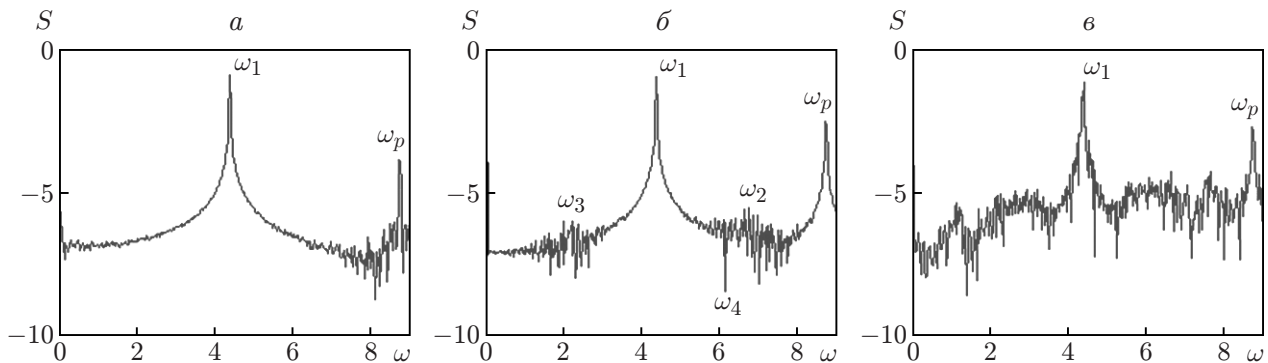


Рис. 2. Спектры Фурье при $p_{n0} = 0,5$ и различных значениях p_0 :
 $a - p_0 = 1,7$, $b - p_0 = 1,83$, $v - p_0 = 1,85$

($p_0 = 1,8556$) бифуркациям (см. рис. 1,б), также появляются лишь на начальном интервале времени. Следует отметить, что при увеличении амплитуды внешней продольной нагрузки указанные частоты нигде не заполняют спектр полностью. Мощности гармоник сигнала на данных частотах существенно меняются с течением времени при фиксированной нагрузке. На спектрах отчетливо видны области “включения-выключения” частот. Если на вейвлет-спектре в данный момент времени “включены” частоты, соответствующие третьей бифуркации, то частоты, соответствующие второй бифуркации, в этот момент “выключены” (см. рис. 1,в). Анализ вейвлет-спектров позволяет утверждать, что переход рассматриваемой системы в хаотическое состояние происходит через перемежаемость. После пятой бифуркации Хопфа на вейвлет-спектре появляются три хаотических “окна” (см. рис. 1,г). При увеличении управляющего параметра количество хаотических “окон” увеличивается, и система переходит в хаотическое состояние по сценарию Помо — Монневила.

Далее исследовалось влияние интенсивности аддитивного шума на характер перехода к хаотическим колебаниям (рис. 2, 3). Видно, что при наличии случайных флуктуаций внешней среды разрушения сценария Фейгенбаума не происходит. С увеличением интенсивности внешнего шума сечения Пуанкаре и фазовые портреты качественно не менялись. Как при отсутствии, так и при наличии внешней шумовой составляющей с увеличением амплитуды продольной знакопеременной нагрузки система переходит в хаотическое состояние на первой бифуркации (см. рис. 2,в). Наличие случайных флуктуаций при увеличении амплитуды продольной нагрузки приводит к зашумлению спектра мощности Фурье в областях, соответствующих последующим бифуркациям (см. рис. 2,б) и как следствие к увеличению расстояний между витками фазовой траектории, различающихся на период. Увеличение интенсивности аддитивного внешнего шума ускоряет появление бифуркаций системы по управляющему параметру и как следствие переход системы в хаотическое состояние.

На рис. 3, на котором приведены спектры, построенные на основе материнского вейвлета Гаусса 32-го порядка, видно, что переход рассматриваемой системы в хаотическое состояние при наличии внешних флуктуаций также осуществляется через перемежаемость (см. рис. 3,в). Использование вейвлет-преобразования позволяет показать, что состояние системы меняется не только при увеличении управляющего параметра (амплитуды внешней продольной нагрузки), но и при его фиксированном значении. Частоты, соответствующие последующим бифуркациям системы, распределены по временной оси неравномерно, мощность гармоник сигнала на данных частотах значительно меняется с течением времени, присутствуют окна “включения-выключения” частот (см. рис. 3,б,в). Так, вейвлет-

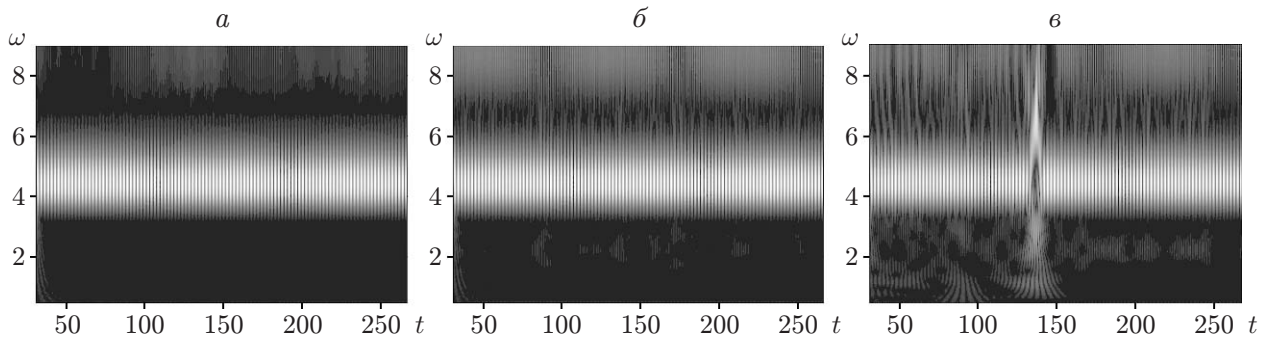


Рис. 3. Вейвлет-спектры, построенные на основе материнского вейвлета Гаусса 32-го порядка при $p_{n0} = 0,5$ и различных значениях p_0 :
 a — $p_0 = 1,7$, b — $p_0 = 1,83$, v — $p_0 = 1,85$

спектр, построенный для амплитуды продольной нагрузки $p_0 = 1,83$, в случае отсутствия флуктуаций системы показывает, что частоты, соответствующие второй бифуркации системы ($\omega_2, \omega_3 = \omega_p/4$), появляются лишь на небольшом начальном временном интервале $t \in (40; 70)$, в то время как фурье-спектр не дает информации о временной локализации этих частот. Вейвлет-спектр, построенный для той же амплитуды нагрузки ($p_0 = 1,83$), но с учетом внешнего шума интенсивностью $p_{n0} = 0,125$, показывает, что частоты, соответствующие второй бифуркации системы (ω_2, ω_3), появляются на всем временном интервале, однако отчетливо видны области их “включения-выключения”. Частота, соответствующая следующей бифуркации системы ($p_{n0} = 0,125$), появляется при $p_0 = 1,841$ на интервале времени $t \in (125; 150)$.

Использование вейвлет-преобразования позволяет детально изучить особенности индуцированных шумом переходов в рассматриваемой механической системе в зависимости от интенсивности внешнего аддитивного шума. Анализ построенных вейвлет-спектров показывает, что следствием увеличения интенсивности шумовой составляющей является “более разреженный спектр” в области низких частот. Мощности гармоник сигнала на частотах, соответствующих второй и последующим бифуркациям, значительно меньше мощности $\omega_1 = \omega_p/2$ (см. рис. 3). Чем больше интенсивность белого шума, тем меньше областей “включения” частот, соответствующих второй и последующим бифуркациям. Следует отметить, что как при отсутствии внешних флуктуаций, так и при их наличии, если на вейвлет-спектре в данный момент времени “включены” частоты, соответствующие третьей бифуркации, то частоты, соответствующие второй бифуркации, в этот момент “выключены”.

При увеличении амплитуды внешней продольной нагрузки состояние системы, в спектре которой присутствует только $\omega_p/2$, в экспериментах с большей интенсивностью шума возникает более часто. При отсутствии внешних флуктуаций такие состояния в сценарии перехода колебаний системы к хаотическим не наблюдаются.

Заключение. В численном эксперименте выявлен сценарий Фейгенбаума новой модификации, представляющий собой комбинацию классических сценариев Фейгенбаума и Помо — Монневила. Показано, что при наличии случайных флуктуаций внешней среды разрушения полученного сценария не происходит. Увеличение интенсивности аддитивного внешнего шума вызывает более раннее появление бифуркаций системы по управляющему параметру, ускоряя переход системы в хаотическое состояние, а также приводит к “более разреженному спектру” в области низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Awrejcewicz J.** Nonlinear dynamics of continuous elastic systems / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, A. Vakakis. Berlin: Springer, 2004.
2. **Крысько В. А., Крысько А. В.** Фазовая хаотическая синхронизация многослойных балочных структур // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 3. С. 166–175.
3. **Крысько В. А., Жигалов М. В., Салтыкова О. А., Крысько А. В.** Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 5. С. 186–193.
4. **Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В., Папкина И. В., Крысько В. А.** Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок // Пробл. прочности и пластичности. 2015. Т. 77, № 3. С. 235–243.
5. **Хорстхемке В.** Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / В. Хорстхемке, Р. Лефевр. М.: Мир, 1987.
6. **Feng Jinqing, Xu Wei, Wang Rui.** Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise // J. Sound Vibrat. 2008. V. 309, N 3–5. P. 730–738.
7. **Feng Jinqing, Xu Wei, Wang Rui.** Stochastic responses of Duffing — Van der Pol vibro-impact system under additive and multiplicative random excitations // Intern. J. Non-Linear Mech. 2009. V. 44, N 1. P. 51–57.
8. **Wu Y. J., Huan R. H.** First-passage failure minimization of stochastic Duffing — Rayleigh — Mathieu system // Mech. Res. Comm. 2008. V. 35, N 7. P. 447–453.
9. **Потапов В. Д.** Об устойчивости стохастических вязкоупругих систем // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2009. № 6. С. 85–90.
10. **van de Wouw N., de Kraker A., van Campen D. H., Nijmeijer H.** Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact // Intern. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38, N 5. С. 767–779.
11. **Awrejcewicz J., Krylova E. Yu., Papkova I. V., Krysko V. A.** Regular and chaotic dynamics of flexible plates // Shock Vibrat. 2014. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/937967>.
12. **Шустер Г.** Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
13. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. **Awrejcewicz J., Krysko V. A., Papkova I. V., Krysko A. V.** Routes to chaos in continuous mechanical systems. 1. Mathematical models and solution methods // Chaos, Solitons Fractals. 2012. V. 45, N 6. P. 687–708.
15. **Awrejcewicz J., Krylova E. Yu., Papkova I. V., Krysko V. A.** Wavelet-based analysis of the regular and chaotic dynamics of rectangular flexible plates subjected to shear-harmonic loading // Shock Vibrat. 2012. V. 19, N 5. P. 979–994.
16. **Корнишин М. С.** Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения М.: Наука, 1964.
17. **Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krylova E. Yu., Papkova I. V.** Analysis of nonlinear dynamics of plates and shells using the Lyapunov exponents and wavelets // Dynamical systems: Theory. Lodz: Tech. Univ. of Lodz Press, 2013. P. 273–282.

*Поступила в редакцию 17/III 2015 г.,
в окончательном варианте — 4/VI 2015 г.*