

УДК 539.3

## МНОГОСЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТОВ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ С МАЛЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ НАПОЛНЕНИЯ

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Рассматриваются композиты, состоящие из набора типовых композитных многосеточных конечных элементов, структуры которых регулярны и различны. Предложены средние локальные погрешности и показано их применение в многосеточном моделировании композитов.

**Ключевые слова:** композиты, нерегулярная структура, многосеточные конечные элементы, средние локальные погрешности.

**Введение.** Для анализа композитов применяются микро- и макроподходы [1]. Согласно макроподходу композит рассматривается как однородное тело с некоторыми (фиктивными) модулями упругости. При этом для описания деформирования композита используются те или иные гипотезы в зависимости от его структуры. Эти гипотезы накладывают определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений композита, что порождает неустранимую погрешность в решениях. Построение решения по макроподходу сводится к нахождению фиктивных модулей упругости для композита, что является непростой задачей. Большие трудности возникают в реализации макроподхода при анализе композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения. Микроподход позволяет точно описывать поведение композита. Однако конечно-элементные (базовые) модели композитов, построенные по микроподходу, имеют большую размерность [1]. Применение суперэлементов [2] для понижения размерности таких моделей малоэффективно.

В данной работе для анализа композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения предлагается многосеточное моделирование, которое сводится к построению на базовой модели композита многосеточной дискретной модели. Эта модель состоит из композитных многосеточных конечных элементов (КМнКЭ) [3, 4]. Для проектирования  $m$ -сеточного композитного конечного элемента (КЭ) используются  $m$  вложенных узловых сеток. Самая мелкая сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает структуру КМнКЭ, остальные  $m - 1$  сетка определяются на его границе. Построение КМнКЭ сводится к исключению всех узловых неизвестных базового разбиения внутри области и большей части неизвестных на ее границе.

Достоинства многосеточного моделирования состоят в том, что многосеточная модель учитывает структуру композита, причем ее размерность на несколько порядков меньше размерности базовой модели композита, и поэтому реализация метода конечных элементов (МКЭ) для многосеточной модели требует существенно меньше времени счета и памяти ЭВМ, чем для базовой.

Здесь рассматриваются композиты, состоящие из набора типовых квадратных двухсеточных КЭ одинаковых размеров, которые имеют одинаковые мелкие и крупные сетки. При этом композитные структуры типовых КМнКЭ регулярны и различны. Как показывают расчеты, погрешность сеточных решений есть некоторая функция координат. В связи



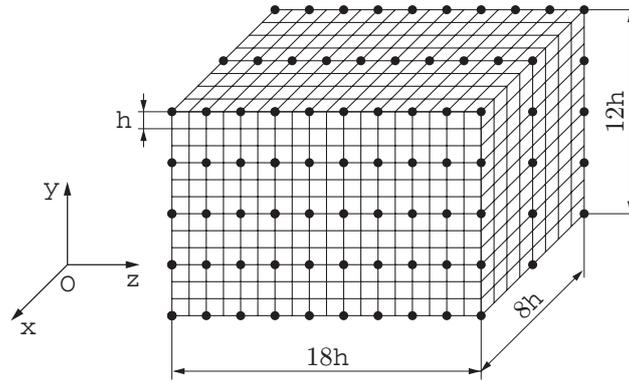


Рис. 2. Четырехсеточный КЭ  $V_e^p$

Полагаем, что в граничных узлах мелкой сетки значения функций  $u_i, v_i$  равны соответствующим компонентам вектора  $\mathbf{v}_s^e$ . Тогда, используя эти равенства и (2), (3), вектор  $\mathbf{v}_s^e$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_0^e$

$$\mathbf{v}_s^e = A_s^e \mathbf{q}_0^e, \tag{5}$$

где  $A_s^e$  — прямоугольная матрица.

Подставляя (5) в (1), с учетом (4) из условия  $\partial \Pi_s^e / \partial \mathbf{v}_h^e = 0$  получаем

$$K_t^e \mathbf{v}_h^e = \mathbf{F}_t^e, \tag{6}$$

где  $K_t^e = (B_s^e)^T (A_s^e)^T K_s^e A_s^e B_s^e$  — матрица жесткости;  $\mathbf{F}_t^e = (B_s^e)^T (A_s^e)^T \mathbf{P}_s^e$  — вектор узловых сил композитного пятисеточного ПрКЭ.

Итак, ПрКЭ содержит пять узловых сеток — сетку  $S_h$  и четыре сетки  $L_i$  — и поэтому называется пятисеточным. При  $a = b$  и  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = H$  получаем квадратный двухсеточный КЭ. Алгоритмы построения треугольных и формы прямоугольного параллелепипеда КМнКЭ аналогичны вышеописанному алгоритму. На рис. 2 показан четырехсеточный КЭ формы прямоугольной призмы, который имеет мелкую трехмерную узловую сетку с шагом  $h$  по осям  $Ox, Oy, Oz$  и три крупные двумерные узловые сетки, лежащие на смежных гранях данного КЭ. Узлы крупных сеток отмечены точками. Дискретную модель композита, состоящую из  $m$ -сеточных КЭ, будем называть  $m$ -сеточной.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Обозначим через  $\mathbf{W}_0$  вектор узловых перемещений базовой модели (базового разбиения) композита. Пусть  $\|\mathbf{W}^0 - \mathbf{W}_0\| \leq \delta_1$ , где  $\mathbf{W}^0$  — точное решение, и пусть  $\|\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}^h\| \leq \delta$ , где  $\mathbf{W}^h$  — вектор узловых перемещений многосеточной модели композита. Тогда  $\|\mathbf{W}^0 - \mathbf{W}^h\| \leq \delta_0$ , где  $\delta_0 = \delta_1 + \delta$ . Погрешность  $\delta_1$  определяется базовым разбиением композита. Факторы, влияющие на эту погрешность, изучены в теории МКЭ [7]. Пусть для базового разбиения  $\delta_1 = 0$ . Тогда тестирование многосеточной модели сводится к определению погрешности  $\delta$ . Расчеты показывают, что наибольшее изменение  $\delta$  достигается при совместном изменении структур (шагов) мелкой и крупных сеток.

**2. Применение средних локальных погрешностей в многосеточном моделировании композитов.** Расчеты показывают, что погрешность  $\delta$  (см. замечание 1) является функцией координат и интервалы изменения ее значений могут быть достаточно велики. Отметим, что при расчетах наиболее важно знать погрешность для максимальных значений перемещений и напряжений. В связи с этим при анализе сеточных решений предлагается использовать средние локальные погрешности, определяемые для перемещений (напряжений) в подобластях малых размеров, которые лежат в центре КМнКЭ. Рассмотрим средние локальные погрешности в многосеточном моделировании композитов,

используя при этом положения, суть которых покажем на примере двухсеточных моделей двумерных композитов.

2.1. *Основные положения для двухсеточных моделей двумерных композитов.* ПОЛОЖЕНИЕ 1. Двумерный композит, расположенный в декартовой системе координат  $xOy$ , испытывает плоское напряженное состояние и представлен квадратными областями  $S_e$  со стороной  $a$ , где  $e = 1, \dots, N$ ;  $N$  — общее число областей  $S_e$ . Базовое разбиение (базовая модель) композита, состоящее из квадратных КЭ  $S_j^h$  первого порядка со стороной  $h$ , учитывает его структуру. Компонентами композита являются изотропные однородные тела. Двухсеточная модель композита состоит из двухсеточных квадратных КЭ  $S_e^p$  со стороной  $a$  ( $e = 1, \dots, N$ ;  $N$  — общее число КЭ  $S_e^p$ ), композитные структуры которых регулярны и различны. Базовое разбиение области  $S_e$  двухсеточного КЭ  $S_e^p$  состоит из квадратных КЭ  $S_j^h$  и порождает мелкую квадратную сетку  $S_h$  с шагом  $h$  (как и в области  $S_e$  базовой модели композита). На сторонах КЭ  $S_e^p$  расположены 4 крупные одинаковые сетки:  $L_1, L_2, L_3, L_4$  с шагом  $H = kh$ ,  $k$  — целое. При этом двухсеточные КЭ  $S_e^p$  имеют одинаковые мелкие и одномерные крупные сетки ( $S_h$  и  $L_i$ ). Обозначим  $w_h^e, w_0^e$  векторы узловых перемещений мелкой сетки  $S_h$  области  $S_e$ , отвечающие перемещениям соответственно двухсеточной и базовой моделей композита.

ПОЛОЖЕНИЕ 2. Для областей  $S_e$  базовой и двухсеточной моделей композита определяем один и тот же закон измельчения на КЭ  $S_j^h$ . Для области  $S_e$  строим последовательность разбиений  $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$  (базовых разбиений), которые при любом  $n$  учитывают композитную структуру области  $S_e$ . Для разбиения  $R_n$  шаг  $h$  мелкой сетки  $S_h$  определяем по формуле  $h = h_0/n$ , где  $h_0 = a/l$ ,  $l$  — целое, при этом имеем  $k_1 = l/k$ ,  $k_1$  — целое. Запись  $h \rightarrow 0$  означает:  $h = h_0/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем  $a, h_0, k = \text{const}$ , т. е. величины  $a, l, k$  заданы. Отметим, что при заданном законе измельчения области  $S_e$  квадратные КЭ  $S_j^h$  разбиений  $R_n$  являются изотропными однородными. Как известно [8], значения коэффициентов матриц жесткости квадратных изотропных однородных КЭ  $S_j^h$  первого порядка со стороной  $h$  не зависят от  $h$  и ограничены. Следовательно, при  $h \rightarrow 0$  значения коэффициентов матрицы системы уравнений МКЭ, построенных для разбиений  $R_n$ , не возрастают, т. е. ограничены.

ПОЛОЖЕНИЕ 3. Структуру векторов  $w_h^e, w_0^e$  представим в виде

$$w_0^e = \{u_0^e v_0^e\}^T, \quad w_h^e = \{u_h^e v_h^e\}^T, \quad (7)$$

где  $v_0^e(v_h^e)$  — вектор значений перемещений всех узлов крупных сеток  $L_i$  области  $S_e$ ;  $u_0^e(u_h^e)$  — вектор значений перемещений тех узлов мелкой сетки  $S_h$  области  $S_e$ , которые не совпадают с узлами крупных сеток.

Считаем, что для двухсеточных квадратных КЭ любой регулярной композитной структуры при  $h \rightarrow 0$   $\|w_0^e - w_h^e\| \rightarrow 0$ ,  $e = 1, \dots, N$ , т. е. пусть

$$h \rightarrow 0: \quad \|u_0^e - u_h^e\| \rightarrow 0, \quad \|v_0^e - v_h^e\| \rightarrow 0, \quad \|u\| = \max |u_i|, \quad (8)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора  $u$ .

Пусть базовое разбиение композита такое, что решение, построенное по МКЭ, можно считать точным, т. е. векторы перемещений  $w_0^e$  (векторы  $u_0^e, v_0^e$ ) будем считать точным решением.

ПОЛОЖЕНИЕ 4. Средние локальные погрешности определяем для сеточных перемещений и напряжений области  $S_r^{qe}$  малых размеров, которая лежит в центре квадратного двухсеточного КЭ  $S_e^p$  ( $S_r^{qe} \subset S_e$ ) и содержит такое число  $q$  узлов мелкой сетки, что  $2q$  есть размерность вектора  $v_0^e$ . Считаем, что для любого  $h$  в области  $S_r^{qe}$  перемещения, напряжения и эквивалентные напряжения ограничены и не равны нулю. Систему уравнений

МКЭ для разбиения  $S_h$  области  $S_e$  базовой модели композита с учетом (7) представим в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A_0^e & B_0^e \\ C_0^e & D_0^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0^e \\ \mathbf{P}_0^e \end{Bmatrix}, \quad K_0^e = \begin{bmatrix} A_0^e & B_0^e \\ C_0^e & D_0^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_0^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0^e \\ \mathbf{P}_0^e \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где  $A_0^e$ ,  $D_0^e$  и  $B_0^e$ ,  $C_0^e$  — квадратные и прямоугольные матрицы;  $\mathbf{R}_0^e$  — вектор узловых сил, действующих в тех узлах мелкой сетки  $S_h$ , которые не совпадают с узлами крупных сеток;  $\mathbf{P}_0^e$  — вектор узловых сил, действующих в узлах крупных сеток области  $S_e$ ;  $K_0^e$  — матрица жесткости;  $\mathbf{F}_0^e$  — вектор узловых сил разбиения  $S_h$ . При этом векторы перемещений  $\mathbf{u}_0^e$ ,  $\mathbf{v}_0^e$  учитывают заданные условия крепления области  $S_e$ , размерность вектора  $\mathbf{u}_0^e$  больше размерности вектора  $\mathbf{v}_0^e$ .

Из системы (9) получаем  $\mathbf{u}_0^e = E_0^e \mathbf{v}_0^e$ , где  $E_0^e = (A_0^e)^{-1} \mathbf{R}_0^e - (A_0^e)^{-1} B_0^e$ ;  $(A_0^e)^{-1}$  — обратная матрица. Обозначим  $\mathbf{u}_0^{qe}$  вектор узловых перемещений области  $S_r^{qe}$ , отвечающий равновесию базовой модели композита. Пусть число узлов  $q$  области  $S_r^{qe}$  такое, что размерности векторов  $\mathbf{u}_0^{qe}$  и  $\mathbf{v}_0^e$  равны (и равны  $2q$ ). Используя матрицу  $E_0^e$  и учитывая, что  $\mathbf{u}_0^{qe} \subset \mathbf{u}_0^e$ , строим равенство  $\mathbf{u}_0^{qe} = (A_0^{qe} \mathbf{R}_0^e - Q_0^{qe}) \mathbf{v}_0^e$ , где  $A_0^{qe}$ ,  $Q_0^{qe}$  — соответственно прямоугольная и квадратная матрицы. Пусть  $\mathbf{R}_0^e = \{\mathbf{R}_p^e \mathbf{R}_g^e\}^T$ , где  $\mathbf{R}_g^e$  — вектор узловых усилий, действующих по границе области  $S_e$  (отметим, что поскольку вектор  $\mathbf{w}_0^e$  неизвестен, усилия  $\mathbf{R}_g^e$  также неизвестны);  $\mathbf{R}_p^e$  — вектор узловых усилий, действующих внутри области  $S_e$ , т. е. вектор заданных узловых усилий. Как известно, чем дальше находится точка приложения сосредоточенной силы от области  $S_r^{qe}$ , тем меньше эта сила оказывает влияние на поле перемещений в этой области. Пусть усилия  $\mathbf{R}_g^e$  оказывают такое малое влияние на перемещения в области  $S_r^{qe}$ , что при определении перемещений считаем  $\mathbf{R}_g^e = 0$ . Заметим, что  $\mathbf{R}_p^e$  — часть узловых усилий области  $S_e$ , расположенных по ее границе равномерно. Найдем перемещения  $\mathbf{u}_p^{qe} = (A_0^{qe} \{\mathbf{R}_p^e 0\}^T - Q_0^{qe}) \mathbf{v}_0^e$ . Пусть  $\varepsilon_0^e = \|\mathbf{u}_0^{qe} - \mathbf{u}_p^{qe}\|$  — такая малая величина, что можно принять  $\varepsilon_0^e = 0$ , т. е.  $\mathbf{u}_0^{qe} = \mathbf{u}_p^{qe}$ . Тогда узловые перемещения  $\mathbf{u}_0^{qe}$  области  $S_r^{qe}$  находим по формуле

$$\mathbf{u}_0^{qe} = G_0^{qe} \mathbf{v}_0^e, \quad (10)$$

где  $G_0^{qe} = A_0^{qe} \{\mathbf{R}_p^e 0\}^T - Q_0^{qe}$ ;  $G_0^{qe}$  — квадратная матрица, вектор узловых усилий  $\mathbf{R}_p^e$  задан.

Соотношения между параметрами  $a$ ,  $h$ ,  $k$  двухсеточных КЭ  $S_e^p$ , для которых используем представления (10) с заданной погрешностью  $\varepsilon_0^e$ , определяем с помощью численных экспериментов. Положения, аналогичные положениям 1–4, формулируются и для двухсеточных (четырёхсеточных) моделей трехмерных композитов, состоящих из двухсеточных (четырёхсеточных) КЭ формы куба (прямоугольного параллелепипеда), композитные структуры которых регулярны и различны.

*2.2. Процедура построения двухсеточных моделей композитов с заданной средней локальной погрешностью для перемещений.* Основные положения этой процедуры покажем на примере двухсеточной модели двумерного композита, состоящей из двухсеточных КЭ  $S_e^p$ , для которой выполняются положения 1–4. Пусть для этой модели построено сеточное решение, т. е. определены векторы  $\mathbf{v}_h^e$ ,  $e = 1, \dots, N$ . Отметим, что  $\mathbf{v}_h^e$  — вектор узловых перемещений двухсеточного КЭ  $S_e^p$ .

Вектор  $\mathbf{u}_h^e$  (см. формулу (7)) представим в форме  $\mathbf{u}_h^e = \{\mathbf{u}_s^e \mathbf{v}_g^e\}^T$ , где  $\mathbf{u}_s^e$  — вектор значений перемещений внутренних узлов мелкой сетки  $S_h$  области  $S_e$ ;  $\mathbf{v}_g^e$  — вектор значений перемещений граничных узлов сетки  $S_h$ , которые не совпадают с узлами крупных сеток. Тогда вектор  $\mathbf{v}_s^e$  граничных узловых перемещений сетки  $S_h$  (т. е. вектор узловых перемещений суперэлемента, построенного на разбиении  $S_h$  области  $S_e$ ) имеет вид  $\mathbf{v}_s^e = \{\mathbf{v}_g^e \mathbf{v}_h^e\}^T$ .

Используя матричные соотношения суперэлемента, между векторами  $\mathbf{u}_s^e$ ,  $\mathbf{v}_s^e$  установим связь (см. [2])

$$\mathbf{u}_s^e = M_s^e \mathbf{v}_s^e, \quad (11)$$

где  $M_s^e$  — прямоугольная матрица.

Пусть  $a = b$ ,  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = H$ . Тогда, подставляя (4), (5) в (11), получим  $\mathbf{u}_s^e = E_s^e \mathbf{v}_h^e$ , где  $E_s^e = M_s^e A_s^e B_s^e$ . Обозначим  $\mathbf{u}_h^{qe}$  вектор узловых перемещений области  $S_r^{qe}$ , отвечающий равновесию двухсеточной модели композита. Используя матрицу  $E_s^e$  и то, что  $\mathbf{u}_h^{qe} \subset \mathbf{u}_s^e$ , строим равенство

$$\mathbf{u}_h^{qe} = G_h^{qe} \mathbf{v}_h^e, \quad (12)$$

где  $G_h^{qe}$  — квадратная матрица.

Для области  $S_r^{qe}$  находим вектор  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}$  по формуле

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} = G_0^{qe} \mathbf{v}_h^e. \quad (13)$$

Используя (10), (13), получим неравенство

$$\|\mathbf{u}_0^{qe} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}\| \leq \|G_0^{qe}\| \|\mathbf{v}_0^e - \mathbf{v}_h^e\|. \quad (14)$$

При  $h \rightarrow 0$  коэффициенты матрицы  $K_0^e$  системы (9) ограничены (см. положение 2), значит, и коэффициенты матрицы  $G_0^{qe}$  ограничены. Поэтому норма квадратной матрицы  $G_0^{qe}$  при  $h \rightarrow 0$  ограничена [9]. Следовательно, существует такое  $C_e > 0$ , что при  $h \rightarrow 0$

$$\|G_0^{qe}\| \leq C_e < \infty, \quad e = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Так как  $\mathbf{u}_0^{qe} \subset \mathbf{u}_0^e$  и  $\mathbf{u}_h^{qe} \subset \mathbf{u}_s^e \subset \mathbf{u}_h^e$ , то в силу (8) выполняется условие

$$\|\mathbf{u}_0^{qe} - \mathbf{u}_h^{qe}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (16)$$

Из неравенства (14) с учетом (15) и (8) следует

$$\|\mathbf{u}_0^{qe} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из неравенства

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} - \mathbf{u}_h^{qe}\| \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} - \mathbf{u}_0^{qe}\| + \|\mathbf{u}_0^{qe} - \mathbf{u}_h^{qe}\|$$

с учетом (16), (17) получаем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} - \mathbf{u}_h^{qe}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (18)$$

Для сеточных перемещений области  $S_r^{qe}$  введем среднюю локальную (относительную) погрешность  $\varepsilon_u^e$  и величину  $\delta_u^e$ , вычисляемые по формулам

$$\varepsilon_u^e = \frac{1}{2q} \sum_{j=1}^{2q} \left| \frac{u_{0j}^{qe} - u_{hj}^{qe}}{u_{0j}^{qe}} \right|, \quad \delta_u^e = \frac{1}{2q} \sum_{j=1}^{2q} \left| \frac{\tilde{u}_{hj}^{qe} - u_{hj}^{qe}}{u_{hj}^{qe}} \right|, \quad e = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где  $u_{0j}^{qe}$ ,  $u_{hj}^{qe}$ ,  $\tilde{u}_{hj}^{qe}$  — компоненты соответственно векторов  $\mathbf{u}_0^{qe}$ ,  $\mathbf{u}_h^{qe}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}$ ,  $2q$  — их размерность;  $q$  — общее число узлов области  $S_r^{qe}$ .

Согласно (19)  $\varepsilon_u^e = \varepsilon_u^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$ ,  $\delta_u^e = \delta_u^e(\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$ . В силу (16), (18), (19) и так как сходимость по норме (8) эквивалентна равномерной сходимости (т. е. при  $h \rightarrow 0$ :  $|u_{01}^{qe} - u_{h1}^{qe}| \rightarrow 0, \dots, |\tilde{u}_{h2q}^{qe} - u_{h2q}^{qe}| \rightarrow 0$ ) и перемещения на  $S_r^{qe}$  ограничены и не равны нулю (см. положение 4), получаем

$$\text{при } h \rightarrow 0: \quad \varepsilon_u^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe}) \rightarrow 0, \quad \delta_u^e(\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe}) \rightarrow 0. \quad (20)$$

В силу (20) для любого заданного  $\varepsilon_0^r > 0$  существует такое  $h$ , т. е. существуют такие векторы  $\mathbf{u}_h^{qe}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}$  ( $\mathbf{u}_0^{qe} = \text{const}$ , ибо  $\mathbf{u}_0^{qe}$  — точное решение, см. положение 3), что

$$\varepsilon_u^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe}) < \varepsilon_0^r, \quad \delta_u^e(\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe}) < \varepsilon_0^r. \quad (21)$$

Пусть  $\varepsilon_0^r$  — такая малая величина, что  $\varepsilon_u^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$ ,  $\delta_u^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$  можно считать равными, т. е. имеем

$$\varepsilon_u^e = \delta_u^e. \quad (22)$$

Тогда в силу (21), (22) получаем: если  $\delta_u^e < \varepsilon_0^r$ , то для  $\varepsilon_u^e$  имеем оценку

$$\varepsilon_u^e < \varepsilon_0^r. \quad (23)$$

В двухсеточной модели композита выделяем совокупность областей  $S_r^{qe}$  (т. е. область композита, состоящую из двухсеточных КЭ  $S_e^p$ ), в которой сеточные перемещения ( $u$  или  $v$ ) достигают максимального (по модулю) значения. По формулам (12), (13), (19) для этой совокупности областей  $S_r^{qe}$  находим значения  $\delta_u^e$ ,  $e = 1, \dots, N_1$  ( $N_1 < N$ ),  $N_1$  — число выделенных областей  $S_r^{qe}$  (число выделенных КЭ  $S_e^p$ ). Если для выделенной области  $S_r^{qe}$  получаем, что  $\delta_u^e \geq \varepsilon_0^r$  (где постоянная  $\varepsilon_0^r$  задана), то в силу (20) уменьшаем шаг  $h$  базовых разбиений всех двухсеточных КЭ композита (шаг  $h$  изменяем по правилу положения 2) и для новой построенной двухсеточной модели находим решение. В результате получаем двухсеточную модель композита, в которой для всех выделенных областей  $S_r^{qe}$  выполняются условия  $\delta_u^e < \varepsilon_0^r$  (т. е.  $\varepsilon_u^e < \varepsilon_0^r$ ),  $e = 1, \dots, N_1$ . Таким образом, в построенной двухсеточной модели в выделенных областях  $S_r^{qe}$  средняя локальная погрешность  $\varepsilon_u^e$  меньше заданной оценки  $\varepsilon_0^r$ . В (23) целесообразно использовать значения  $\varepsilon_0^r \leq 0,01$  (т. е.  $\varepsilon_0^r \leq 1\%$ ). Если значения функций перемещений на  $S_e$  изменяются незначительно, то оценку  $\varepsilon_0^r$  можно расширить на всю область  $S_e$ .

*2.3. Процедура построения двухсеточных моделей композитов с заданной средней локальной погрешностью для напряжений.* Основные положения этой процедуры покажем на примере двухсеточной модели двумерного композита, состоящей из двухсеточных квадратных КЭ  $S_e^p$ , для которой выполняются положения 1–4,  $e = 1, \dots, N$ ,  $N$  — общее число КЭ  $S_e^p$ . Пусть для двухсеточной модели построено решение, т. е. определены векторы  $\mathbf{v}_h^e$ .

Обозначим  $\mathbf{u}_0^{je}$ ,  $\mathbf{u}_h^{je}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{je}$  векторы узловых перемещений  $j$ -го квадратного КЭ  $S_j^h$  разбиения области  $S_r^{qe}$ , соответствующие векторам узловых перемещений  $\mathbf{u}_0^{qe}$ ,  $\mathbf{u}_h^{qe}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $m$  — общее число КЭ  $S_j^h$  области  $S_r^{qe}$ . Пусть  $\mathbf{t}_0^{je} = \{\sigma_x^{0j} \sigma_y^{0j} \tau_{xy}^{0j}\}^T$ ,  $\mathbf{t}_h^{je} = \{\sigma_x^{hj} \sigma_y^{hj} \tau_{xy}^{hj}\}^T$  и  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je} = \{\tilde{\sigma}_x^{hj} \tilde{\sigma}_y^{hj} \tilde{\tau}_{xy}^{hj}\}^T$  — векторы значений напряжений  $\sigma_x^{0j}, \dots, \tilde{\tau}_{xy}^{hj}$ , которые определяются в центре тяжести КЭ  $S_j^h$  и которые отвечают соответственно векторам перемещений  $\mathbf{u}_0^{je}$ ,  $\mathbf{u}_h^{je}$  и  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{je}$ . Поскольку область  $S_e$  в двухсеточной и базовой моделях композита состоит из квадратных КЭ  $S_j^h$  со стороной  $h$  (см. положения 1, 2), в двухсеточной и базовой моделях композита базисные функции КЭ  $S_j^h$  области  $S_r^{qe}$  одинаковы. Следовательно, векторы  $\mathbf{t}_0^{je}$ ,  $\mathbf{t}_h^{je}$  и  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je}$  можно представить в виде  $\mathbf{t}_0^{je} = D_j^e \mathbf{u}_0^{je}$ ,  $\mathbf{t}_h^{je} = D_j^e \mathbf{u}_h^{je}$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je} = D_j^e \tilde{\mathbf{u}}_h^{je}$ , где  $D_j^e$  — прямоугольная матрица. Для простоты изложения, учитывая, что  $\mathbf{u}_0^{je} \subset \mathbf{u}_0^{qe}$ ,  $\mathbf{u}_h^{je} \subset \mathbf{u}_h^{qe}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{je} \subset \tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}$ , векторы  $\mathbf{t}_0^{je}$ ,  $\mathbf{t}_h^{je}$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je}$  запишем в виде

$$\mathbf{t}_0^{je} = M_j^e \mathbf{u}_0^{je}, \quad \mathbf{t}_h^{je} = M_j^e \mathbf{u}_h^{je}, \quad \tilde{\mathbf{t}}_h^{je} = M_j^e \tilde{\mathbf{u}}_h^{je}, \quad (24)$$

где  $M_j^e$  — прямоугольная матрица,  $j = 1, \dots, m$ .

Коэффициенты  $M_{\alpha\beta}^{je}$  матрицы  $M_j^e$  зависят от модулей упругости квадратного элемента  $S_j^h$  (со стороной  $h$ ) и от частных производных его базисных функций, которые ограничены на области КЭ  $S_j^h$  при любом значении  $h$ , а значит, при  $h \rightarrow 0$  имеем  $|M_{\alpha\beta}^{je}| < \infty$ .

Для сеточных эквивалентных напряжений области  $S_r^{qe}$  используем среднюю локальную (относительную) погрешность  $\varepsilon_\sigma^e$  и величину  $\delta_\sigma^e$ , вычисляемые по формулам

$$\varepsilon_\sigma^e = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{\sigma_{0j}^{qe} - \sigma_{hj}^{qe}}{\sigma_{0i}^{qe}} \right|, \quad \delta_\sigma^e = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{\sigma_{hj}^{qe} - \tilde{\sigma}_{hj}^{qe}}{\sigma_{hj}^{qe}} \right|, \quad e = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Эквивалентные напряжения  $\sigma_{0j}^{qe}$ ,  $\sigma_{hj}^{qe}$ ,  $\tilde{\sigma}_{hj}^{qe}$  определяем по четвертой теории прочности [10] в центре  $j$ -го КЭ  $S_j^h$ , т. е. используем представление

$$\sigma_{0j}^{qe} = \sqrt{(\sigma_x^{0j})^2 + (\sigma_y^{0j})^2 - \sigma_x^{0j} \sigma_y^{0j} + 3(\tau_{xy}^{0j})^2}, \quad \mathbf{t}_0^{je} = \{\sigma_x^{0j} \sigma_y^{0j} \tau_{xy}^{0j}\}^T, \quad (26)$$

значения  $\sigma_{hj}^{qe}$ ,  $\tilde{\sigma}_{hj}^{qe}$  определяем по формуле (26), в которой вместо компонент вектора напряжений  $\mathbf{t}_0^{je}$  подставляем соответствующие компоненты векторов напряжений  $\mathbf{t}_h^{je}$  или  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je}$ .

Согласно (24), (25) имеем  $\varepsilon_\sigma^e = \varepsilon_\sigma^e(\mathbf{u}_0^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$ ,  $\delta_\sigma^e = \delta_\sigma^e(\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe}, \mathbf{u}_h^{qe})$ . В силу (12), (13)  $\mathbf{u}_h^{qe} = G_h^{qe} \mathbf{v}_h^e$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} = G_0^{qe} \mathbf{v}_h^e$ , значит,  $\varepsilon_\sigma^e = \varepsilon_\sigma^e(\mathbf{u}_0^{qe}, G_h^{qe} \mathbf{v}_h^e)$ ,  $\delta_\sigma^e = \delta_\sigma^e(G_0^{qe} \mathbf{v}_h^e, G_h^{qe} \mathbf{v}_h^e)$ . Таким образом, поскольку  $\mathbf{u}_0^{qe} = \text{const}$  ( $\mathbf{u}_0^{je} \subset \mathbf{u}_0^{qe} \subset \mathbf{u}_0^e$  — точное решение, см. положение 3), получаем

$$\varepsilon_\sigma^e = \varepsilon_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e), \quad \delta_\sigma^e = \delta_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e). \quad (27)$$

Следовательно, между функциями  $y_e = y_e(\mathbf{v}_h^e)$  и  $x_e = x_e(\mathbf{v}_h^e)$ , где

$$y_e = \varepsilon_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e), \quad x_e = \delta_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e), \quad (28)$$

существует связь вида  $y_e = F_e(x_e)$ . Используя (16), (18), (24) с учетом, что при  $h \rightarrow 0$   $|M_{\alpha\beta}^{je}| < \infty$  и что норма (8) обеспечивает равномерную сходимость  $\mathbf{u}_h^{qe} \rightarrow \mathbf{u}_0^{qe}$  и  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} \rightarrow \mathbf{u}_h^{qe}$ , нетрудно показать, что при  $h \rightarrow 0$

$$\|\mathbf{t}_h^{je} - \mathbf{t}_0^{je}\| = \|M_j^e(\mathbf{u}_h^{qe} - \mathbf{u}_0^{qe})\| \rightarrow 0, \quad \|\tilde{\mathbf{t}}_h^{je} - \mathbf{t}_h^{je}\| = \|M_j^e(\tilde{\mathbf{u}}_h^{qe} - \mathbf{u}_0^{qe})\| \rightarrow 0.$$

Используя (26) и учитывая, что сходимость  $\mathbf{t}_0^{je} \rightarrow \mathbf{t}_0^{je}$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_h^{je} \rightarrow \mathbf{t}_h^{je}$  равномерная (т. е. имеем при  $h \rightarrow 0$ :  $|\sigma_x^{0j} - \sigma_x^{hj}| \rightarrow 0$ ,  $|\sigma_y^{0j} - \sigma_y^{hj}| \rightarrow 0$ , ...,  $|\tilde{\sigma}_x^{hj} - \sigma_x^{hj}| \rightarrow 0$ ) и что  $\sigma_{0j}^{qe}, \sigma_{hj}^{qe}, \tilde{\sigma}_{hj}^{qe} < \infty$ ,  $\sigma_{0j}^{qe}, \sigma_{hj}^{qe}, \tilde{\sigma}_{hj}^{qe} \neq 0$  (см. положение 4), нетрудно показать, что при  $h \rightarrow 0$ :  $|\sigma_{hj}^{qe} - \sigma_{0j}^{qe}| \rightarrow 0$ ,  $|\tilde{\sigma}_{hj}^{qe} - \sigma_{hj}^{qe}| \rightarrow 0$ , и в силу (25) имеем

$$h \rightarrow 0: \quad \varepsilon_\sigma^e \rightarrow 0, \quad \delta_\sigma^e \rightarrow 0. \quad (29)$$

Используя (8), (27), (29), получаем, что при  $h \rightarrow 0$ , т. е. при  $\mathbf{v}_h^e \rightarrow \mathbf{v}_0^e$ ,  $\varepsilon_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e) \rightarrow \varepsilon_\sigma^e(\mathbf{v}_0^e) = 0$ ,  $\delta_\sigma^e(\mathbf{v}_h^e) \rightarrow \delta_\sigma^e(\mathbf{v}_0^e) = 0$ . Отсюда, учитывая (28), имеем  $y_e(\mathbf{v}_h^e) \rightarrow y_e(\mathbf{v}_0^e) = 0$ ,  $x_e(\mathbf{v}_h^e) \rightarrow x_e(\mathbf{v}_0^e) = 0$  при  $\mathbf{v}_h^e \rightarrow \mathbf{v}_0^e$ . Итак, функции  $y_e(\mathbf{v}_h^e)$  и  $x_e(\mathbf{v}_h^e)$  в одной и той же точке ( $\mathbf{v}_0^e$ ) равны нулю, следовательно,  $F_e(0) = 0$  справа, так как  $x_e \geq 0$ .

Следует отметить, что рассуждая аналогично подп. 2.2, получим, что если  $\delta_\sigma^e < \delta_0^r$ , то для погрешности  $\varepsilon_\sigma^e$  выполняется оценка  $\varepsilon_\sigma^e < \delta_0^r$ , где  $\delta_0^r$  задана. Пусть  $\delta_0^r$  — такая малая величина, что можно принять  $\delta_\sigma^e = \varepsilon_\sigma^e$ . Эти условия для погрешности  $\varepsilon_\sigma^e$  реализуются для малых значений  $\delta_0^r$  ( $\delta_0^r \leq 0,01$ ), и поэтому их выполнение затруднительно, так как в этом случае необходимо использовать очень мелкие базовые разбиения КЭ  $S_e^p$ . Рассмотрим другой вариант построения оценок для погрешностей  $\varepsilon_\sigma^e$ .

Функцию  $F_e(x_e)$  (с учетом, что  $F_e(0) = 0$ ) в  $\varepsilon$ -окрестности точки нуль (справа от нуля), т. е. на отрезке  $[0, \varepsilon]$ , приближенно представим в виде  $F_e(x_e) = b_e x_e + a_1^e x_e^2 + \dots + a_n^e x_e^{n+1}$ , где  $b_e, a_i^e = \text{const}$ ;  $n$  — целое,  $0 \leq x_e \leq \varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon \ll 1$ , т. е.  $x_e \ll 1$ . Тогда, полагая  $a_1^e x_e^2 = 0, \dots, a_n^e x_e^{n+1} = 0$ , получаем  $F_e(x_e) = b_e x_e$ , т. е. получаем линейную функцию вида  $y_e = b_e x_e$ , где  $b_e > 0$ , так как  $x_e y_e \geq 0$ . Для данной линейной функции и для любого

числа  $\delta_r$  ( $0 < \delta_r < \varepsilon$ ) имеем: если  $x_e < \delta_r$ , то  $y_e < \varepsilon_r^e$ , где  $\varepsilon_r^e = b_e \delta_r$ . Отсюда с учетом обозначений (28) получаем: если  $\delta_\sigma^e < \delta_r$ , то для  $\varepsilon_\sigma^e$  имеем оценку

$$\varepsilon_\sigma^e \leq \varepsilon_r, \quad e = 1, \dots, N_2, \quad (30)$$

где  $\varepsilon_r = \max(\varepsilon_r^e)$ ,  $e = 1, \dots, N_2$ ;  $N_2$  — общее число выделенных областей  $S_r^{qe}$  (т. е. число выделенных КЭ  $S_e^p$ ), в которых исследуем напряженное состояние композита,  $N_2 < N$ ;  $\varepsilon_r, \delta_r = \text{const}$ ;  $\varepsilon_r, \delta_r \ll 1$  и  $\varepsilon_r$  задано.

Так как  $\varepsilon_r^e = b_e \delta_r$  ( $b_e = \text{const}$ ),  $\varepsilon_r = \max(\varepsilon_r^e)$ , то  $\varepsilon_r = \max(b_e \delta_r)$ , т. е.  $\varepsilon_r = b \delta_r$ , где  $b = \max(b_e)$ ,  $e = 1, \dots, N_2$ . Итак,  $\varepsilon_r$  зависит от  $\delta_r$ , причем важно отметить, что уменьшение  $\delta_r$  приводит к уменьшению  $\varepsilon_r$ . Для заданной величины  $\varepsilon_r$  с помощью тестовых расчетов определяем постоянную  $\delta_r$ . В двухсеточной модели двумерного композита выделяем совокупность областей  $S_r^{qe}$  (т. е. подобласть композита, состоящую из КЭ  $S_e^p$ ), в которой эквивалентные напряжения достигают максимального значения. По формуле (25) для этих областей  $S_r^{qe}$  находим величины  $\delta_\sigma^e$ ,  $e = 1, \dots, N_2$ . Если для выделенной области  $S_r^{qe}$  получаем, что  $\delta_\sigma^e \geq \delta_r$ , то в этом случае в силу (29) уменьшаем шаг  $h$  базовых разбиений всех двухсеточных КЭ и для новой построенной двухсеточной модели композита находим сеточное решение. В результате получаем двухсеточную модель, для выделенной подобласти которой выполняются условия  $\delta_\sigma^e < \delta_r$ , т. е.  $\varepsilon_\sigma^e \leq \varepsilon_r$ . Согласно расчетам в (30) для заданного  $\varepsilon_r = 0,02$  ( $\varepsilon_r = 2\%$ ) целесообразно использовать значения  $\delta_r \leq 0,06$  (т. е.  $\delta_r \leq 6\%$ ). Если значения функций напряжений на  $S_e$  изменяются незначительно, то оценку  $\varepsilon_r$  можно расширить на всю область  $S_e$ . На практике используем область  $S_r^e \subset S_r^{qe}$ , форма которой удобна для расчетов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Расчеты показывают, что для заданных  $\varepsilon_0^r, \delta_r, \varepsilon_r \ll 1$  оценки (23), (30) погрешностей  $\varepsilon_u^e, \varepsilon_\sigma^e$  выполняются и для таких областей  $S_r^{qe}$  выделенных КЭ  $S_e^p$ , структуры которых различны. Значит, величины  $\varepsilon_0^r, \delta_r, \varepsilon_r$  не зависят от вида структур КЭ  $S_e^p$ . В самом деле, в основе построения оценок (23), (30) лежат условия (8) и предположение (см. положение 3), которые выполняются для двухсеточных квадратных КЭ  $S_e^p$  любой регулярной композитной структуры.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Выполняя рассуждения, аналогичные сделанным выше для моделей композитов, состоящих из двухсеточных (четырёхсеточных) КЭ  $V_e^p$  формы куба (прямоугольной призмы), для которых выполняются положения, аналогичные положениям 1–4, получим для средних локальных погрешностей перемещений и эквивалентных напряжений подобластей, расположенных в центре КЭ  $V_e^p$ , оценки вида (23) и (30).

**3. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим в декартовой системе координат  $xOy$  двумерный композит  $S$  нерегулярной структуры с коэффициентом наполнения 0,218, который испытывает плоское напряженное состояние (рис. 3,а). При  $y = 0$ ,  $2a \leq x \leq 5a$  и при  $x = 0$ ,  $3a \leq y \leq 5a$  имеем  $u = v = 0$  (границы крепления  $S$  на рис. 3,а отмечены штриховкой). Область композита представлена квадратными подобластями  $S_e$  со стороной  $a = 60h$ , где  $e = 1, \dots, 43$ . Структура композита состоит из набора четырех типовых композитных квадратных областей  $S^k$  (рис. 3,б,  $k = 1, 2, 3, 4$ ) со стороной  $a$ . Область  $S^k$  армирована плоскими волокнами шириной  $2h$  внутри области и шириной  $h$  на ее границе. На рис. 3 волокна показаны линиями, в скобках указан коэффициент наполнения  $S^k$ . При построении на области  $S_e$  двухсеточного КЭ  $S_e^p$  используем сетку его базового разбиения, которое состоит (как и базовая модель композита) из квадратных КЭ  $S^h$  первого порядка [7] со стороной  $h$ , и четыре одинаковые одномерные сетки с шагом  $4h$ . Для узлов базового разбиения композита  $S$  вводим целочисленную систему координат  $i, j$  (рис. 3,а). В узлах с координатами (481, 181), (481, 241) и (181, 361) композит нагружен силами  $P_x = 87,5$  и  $P_y = 96,3$ . Расчеты выполнены при  $h = 0,5$ , коэффициент Пуассона для всех компонентов композита равен 0,3, модуль Юнга волокна равен 10, модуль Юнга связующего материала — 1.

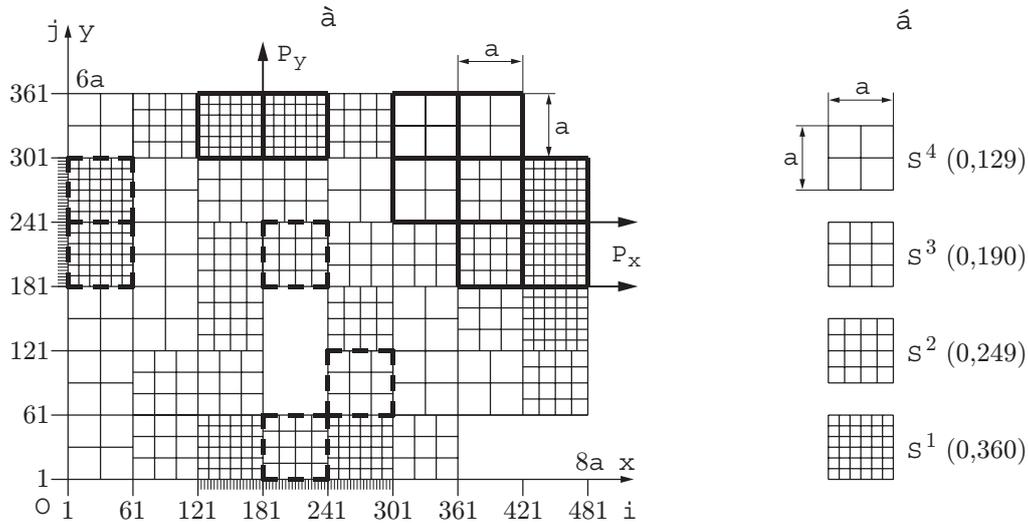


Рис. 3. Расчетная схема композита  $S$  (а) и композитные структуры типовых областей  $S^k$  (б)

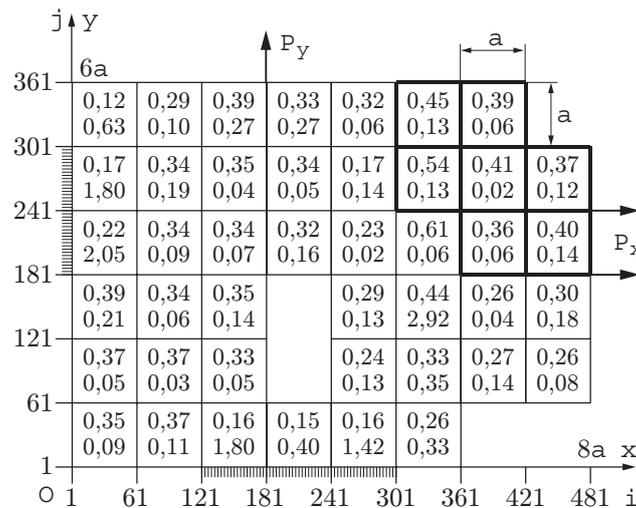


Рис. 4. Карта погрешностей  $\varepsilon_u^e$  и значений  $\delta_u^e$  для перемещений областей  $S_r^e \subset S_e$

Максимальное значение перемещений  $u_h, v_h$  двухсеточной модели отличается от перемещений  $u_0, v_0$  базовой модели на 0,4 %. Максимальное значение эквивалентных напряжений  $\sigma_h$  двухсеточной модели, посчитанных в центре тяжести КЭ  $S^h$  по четвертой теории прочности [10], отличается от напряжений  $\sigma_0$  базовой модели на 0,3 %.

На рис. 4, 5 показаны карты погрешностей  $\varepsilon_u^e, \varepsilon_\sigma^e$  и значений  $\delta_u^e, \delta_\sigma^e$  (в процентах), которые определены по формулам (19) и (25) для области  $S_r^e$  размерами  $4h \times 4h$  ( $S_r^e \subset S_r^{qe}$ ), причем в области  $S_e$   $\varepsilon_u^e$  и  $\varepsilon_\sigma^e$  — верхние числа,  $\delta_u^e$  и  $\delta_\sigma^e$  — нижние. Например, для  $S_e$ , примыкающей к началу координат  $xOy$ ,  $\varepsilon_u^e = 0,35$  %,  $\delta_u^e = 0,09$  % (см. рис. 4). Жирными непрерывными линиями на рис. 3, а, 4, 5 выделены КЭ  $S_e^p$ , в которых  $\sigma_h$  или  $u_h, v_h$  имеют максимальные значения. Анализ показывает, что для  $\varepsilon_u^e$  оценка (23) при  $\varepsilon_0^r = 0,01$  ( $\varepsilon_0^r = 1$  %) и для  $\varepsilon_\sigma^e$  оценка (30) при  $\delta_r = 0,06, \varepsilon_r = 0,02$  ( $\delta_r = 6$  %,  $\varepsilon_r = 2$  %) выполняются для всех областей  $S_r^e$  выделенных КЭ  $S_e^p$ . Оценки погрешностей  $\varepsilon_u^e, \varepsilon_\sigma^e$  расширяем на всю область  $S_e$ . В окрестности максимального значения перемещений композита  $\varepsilon_u^e < 1$  %, в

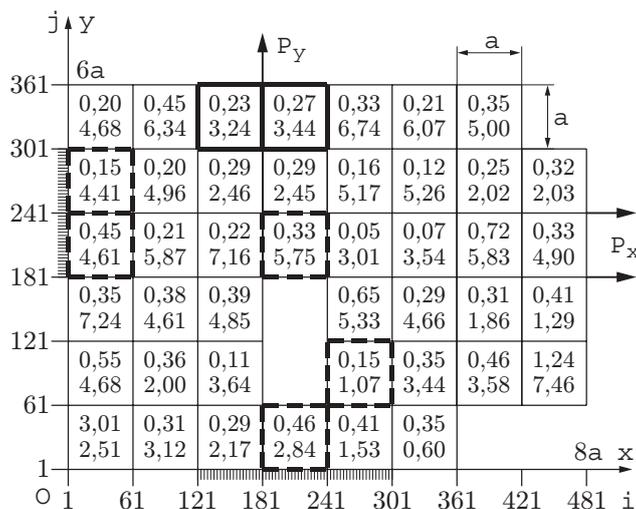


Рис. 5. Карта погрешностей  $\varepsilon_\sigma^e$  и значений  $\delta_\sigma^e$  для напряжений областей  $S_r^e \subset S_e$

окрестности действия сил  $\varepsilon_\sigma^e < 2\%$ . Оценка (30) при  $\delta_r \leq 0,06$ ,  $\varepsilon_r = 0,02$  выполняется и для подобластей  $S_r^e$  КЭ  $S_e^p$  (на рис. 3,а, 5 эти КЭ отмечены жирными штриховыми линиями), в которых  $\sigma_h$  примерно в 10 раз меньше максимального. Отметим, что при заданных  $\varepsilon_0^r$ ,  $\delta_r$ ,  $\varepsilon_r$  оценки (23), (30) погрешностей  $\varepsilon_u^e$ ,  $\varepsilon_\sigma^e$  выполняются для  $S_r^e$  выделенных КЭ  $S_e^p$  различной композитной структуры (см. рис. 3,а). Реализация МКЭ для двухсеточной модели композита требует в 150 раз меньше объема памяти ЭВМ и в 20 раз меньше времени счета, чем базовая.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982.
2. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
3. Матвеев А. Д. Построение упругих многосеточных конечных элементов. Анализ композитов с учетом их структуры. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1998. Деп. в ВИНТИ 06.11.98, № 3219-B98.
4. Матвеев А. Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. Красноярск: Ин-т вычисл. моделир. СО РАН, 2000. Деп. в ВИНТИ 24.11.00, № 2990-B00.
5. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1970.
6. Норри Д., де-Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
8. Варвак П. М., Бузун И. М., Городецкий А. С. и др. Метод конечных элементов. Киев: Вища шк., 1981.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973. Т. 1.
10. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1975.

*Поступила в редакцию 8/X 2002 г.,  
в окончательном варианте — 13/X 2003 г.*