УДК 539.31

ВНЕЗАПНОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

А. Бегматов, Н. Т. Маматова

Национальный университет Узбекистана, 100174 Ташкент, Узбекистан
E-mails: begmatov_ab@rambler.ru, nigmamatova@yandex.ru

Исследуется влияние внешнего сухого трения на напряженно-деформированное состояние полубесконечного упругопластического стержня при внезапном нагружении. Полагается, что поведение стержня описывается моделью Прандтля; трение с окружающей средой, движущейся с постоянной скоростью, происходит по закону Кулона с различными значениями коэффициента трения в возмущенной и невозмущенной областях стержня. Получены аналитические решения. Определены условия, при которых стержень представляет собой упругое тело в области (части области) между фронтами пластической и упругой волн.

Ключевые слова: упругопластический, сухое трение, упругая и пластическая волны, линия текучести.

DOI: 10.15372/PMTF20220118

Введение. Результаты исследований волновых процессов, возникающих при продольном нагружении полубесконечного упругого стержня, приведены в работах [1, 2]. В [3] изучено влияние внешнего сухого трения на напряженно-деформированное состояние упругого стержня. Эти исследования были продолжены, например, в работах [4, 5]. В данной работе рассматривается задача о внезапном нагружении упругопластического полубесконечного стержня, взаимодействующего с окружающей средой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полубесконечный цилиндрический стержень, расположенный внутри некоторой сплошной среды. Следуя [3], будем считать, что в начальный момент стержень находится в невозмущенном состоянии:

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < \infty \tag{1}$$

($u(x,t)$ — перемещение). Пусть к концу $x = 0$ этого стержня внезапно приложено постоянное давление $\sigma_0 > \sigma_s$, т. е.

$$\sigma(0,t) = -\sigma_0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

где σ_s — предел упругости материала стержня.

В момент нагружения стержня окружающая среда начинает движение с постоянной скоростью v_0. Будем полагать, что при $t > 0$ имеет место трение, описываемое законом Кулона [6, 7], а поведение стержня описывается с использованием модели Прандтля (рис. 1) — модели линейно упрочняющегося материала.

В случае отсутствия трения напряженно-деформированное состояние стержня при $t > 0$ представлено на рис. 2 [1, 2]. В области I, расположенной перед фронтом упругой

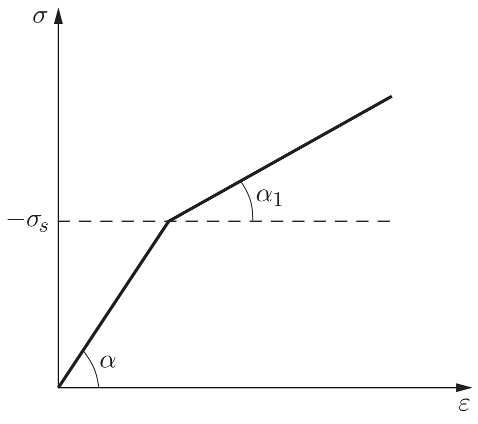

Рис. 1

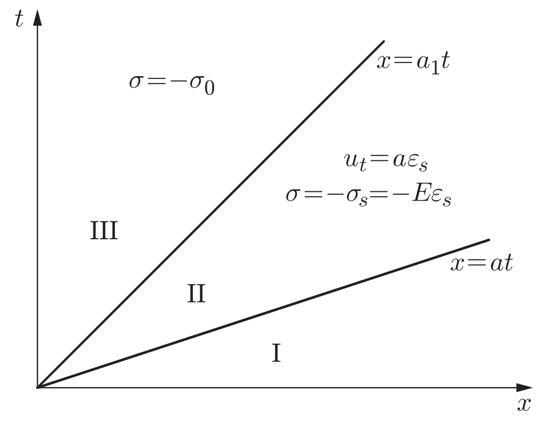

Рис. 2

Рис. 1. Модель Прандтля

Рис. 2. Напряженно-деформированное состояние стержня в отсутствие трения: I — область недеформированного состояния, II — область упругопластического деформирования, III — область деформированного состояния после прохождения фронтов упругой и пластической волн

волны, стержень находится в невозмущенном состоянии, в области II, расположенной между характеристиками $x = at$ и $x = a_1t$ ($a = \sqrt{E/\rho}$, $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$ — скорости упругой и пластической волн в стержне соответственно, E, E_1 — модули упругости в зонах упругого и пластического деформирования), напряженно-деформированное состояние характеризуется постоянными параметрами $\sigma = -\sigma_s$, $\varepsilon = \varepsilon_s$, $u_t = a\varepsilon_s$. При этом перемещение в области II определяется по формуле

$$u(x,t) = \frac{\sigma_s}{E}\,(at - x). \tag{3}$$

В области III имеет место постоянное напряжение $\sigma = -\sigma_0$.

Будем полагать, что в областях II, III плотность силы трения определяется формулой

$$F_\tau = -k\,\frac{\tau}{\rho}, \qquad \tau = \frac{\lambda L}{S}\,P,$$

где $k = \operatorname{sign}(u_t - v_0)$; ρ — плотность; τ — модуль приведенной предельной силы трения; P — контактное давление; λ — коэффициент трения; L, S — периметр и площадь поперечного сечения стержня соответственно.

Сила трения существенно зависит от скорости проскальзывания (см. работу [3] и библиографию к ней). Однако обычно коэффициент трения считается постоянным. В рассматриваемой задаче скорость проскальзывания зависит от времени как в зонах упругого и пластического деформирования, так и в области невозмущенного движения. Предполагается, что коэффициенты трения постоянные, но различные в областях возмущенного и невозмущенного движений.

Далее полагается, что коэффициент трения в области I может отличаться от коэффициента трения в областях II, III. В этом случае выражение для плотности силы трения F_τ^{I} в области I представим в виде

$$F_\tau^{\mathrm{I}} = -k_0 k\,\frac{\tau}{\rho} = k_0 F_\tau, \qquad 0 < \lambda k_0 \leqslant 1.$$

При этом напряженно-деформированное состояние стержня в областях I, II и III соответственно описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_0 k \frac{\tau}{\rho}, \qquad x > at, \quad t > 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k\tau}{\rho}, \qquad a_1 t < x < at, \quad t > 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k\tau}{\rho}, \qquad 0 < x < a_1 t, \quad t > 0. \tag{6}$$

Требуется найти в области $x > 0$, $t > 0$ функцию $u(x,t)$, являющуюся решением уравнений (4)–(6), удовлетворяющим начальному условию (1), граничному условию (2) и динамическому условию непрерывности

$$(\sigma + \rho a u_t)\big|_{x=at-0} = (\sigma + \rho a u_t)\big|_{x=at+0} \tag{7}$$

на фронте упругой волны $x = at$ и

$$(\sigma + \rho a_1 u_t)\big|_{x=a_1 t-0} = (\sigma + \rho a_1 u_t)\big|_{x=a_1 t+0} \tag{8}$$

на фронте пластической волны.

2. Решение задачи. Сформулированная задача решается в следующей последовательности. Сначала находится решение в областях I, II, а затем — в области пластической деформации (области III) с учетом условия (8). При этом в области I, где $k = -1$, имеет место задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями (1), решение которой записывается в виде

$$u = k_0 \frac{\tau}{\rho} \frac{t^2}{2}. \tag{9}$$

В силу принятой гипотезы плоских сечений и замены поверхностной силы трения на объемную невозмущенная часть стержня движется как абсолютно твердое тело. В зависимости от свойств материала стержня и скорости внешней среды v_0 возможны неравенства

$$\frac{Ev_0}{\sigma_s a} < 1, \qquad \frac{Ev_0}{\sigma_s a} \geqslant 1.$$

Далее будем полагать, что имеет место первое неравенство $Ev_0/(\sigma_s a) < 1$.

При $\tau = 0$ решение u_{o} уравнения (5), т. е. однородного уравнения, имеет вид (3). Частное решение u_1 неоднородного уравнения (5) в области II находим с помощью преобразования Лапласа:

$$u_1 = \frac{\tau}{\rho a^2} \frac{1}{2(1-\mu^2)} (x - a_1 t)^2, \qquad \mu = \frac{a_1}{a}.$$

При этом решение $u_{\text{o}} + u_1$ не удовлетворяет условию (7), поэтому решение задачи в области II представим в виде

$$u = u_{\text{o}} + u_1 + \frac{\tau}{\rho a^2} f(x,t),$$

или

$$u = \frac{\sigma_s}{E} (at - x) + \frac{\tau}{\rho a^2} \Big(\frac{(x - a_1 t)^2}{2(1-\mu^2)} + f(x,t) \Big),$$

где $f(x,t)$ — функция, удовлетворяющая однородному уравнению и условию $f(0,0)=0$. Нетрудно показать, что в случае $k_0=0$ решение $f(x,t)=Axt$ удовлетворяет условию (7), если

$$f(x,t)=Axt, \qquad A=-\frac{a}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}.$$

В общем случае положим

$$f(x,t)=Axt+A_1(x+at)^2/2.$$

При этом с учетом динамического условия непрерывности (7) находим $A_1=k_0/4$. Таким образом, решение задачи в области II имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\sigma_s}{E}\,(at-x)+\frac{\tau}{\rho a^2}\Big(\frac{(x-a_1t)^2}{2(1-\mu^2)}-\frac{a}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,xt+\frac{k_0}{8}\,(x+at)^2\Big). \tag{10}$$

Отсюда находим напряжение:

$$\sigma=-\sigma_s+\sigma_\tau, \qquad \sigma_\tau=\tau\Big(\frac{x-a_1t}{1-\mu^2}-\frac{a}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,t+\frac{k_0}{4}\,(x+at)\Big) \tag{11}$$

(σ_τ — напряжение, возникающее вследствие наличия трения).

Очевидно, что в области II $\partial\sigma_\tau/\partial x>0$ и минимальное значение σ_τ достигается на характеристике $x=a_1t$, где напряжение определяется по формуле

$$\sigma|_{x=a_1t+0}=-\sigma_s+\frac{\tau at}{2}\Big(\frac{k_0}{2}\,(1+\mu)-\frac{1-\mu}{1+\mu}\Big). \tag{12}$$

Следовательно, в области II поведение стержня подобно поведению упругого тела, если выполняется неравенство

$$F(\mu)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)^2}<\frac{k_0}{4}=A_1. \tag{13}$$

Далее будем полагать, что условие (13) выполняется, и будем рассматривать теоретически возможные случаи упругого деформирования в области между характеристиками $x=a_1t$ и $x=at$.

Из (10) следует, что имеет место неравенство

$$\frac{\partial u_t}{\partial x}=-\frac{\tau}{2\rho a}\Big(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}-\frac{k_0}{2}\Big)<0, \qquad k_0<2\,\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}. \tag{14}$$

Будем полагать, что неравенство (14) выполняется. Тогда скорость движения сечений стержня u_t является убывающей функцией x и, следовательно, ее минимальное значение достигается на фронте упругой волны $x=at$:

$$u_t\big|_{x=at-0}=\frac{\sigma_s a}{E}-\frac{\tau}{2\rho}\,(1-k_0)t. \tag{15}$$

Таким образом, возможны следующие случаи.

1. Пусть $0<k_0<1$. При этом $u_t\big|_{x=at-0}$ убывает с увеличением t и выполняется равенство

$$u_t\big|_{x=at-0}\to v_0, \qquad t\to t_0=\frac{2\rho}{(1-k_0)\tau}\Big(\frac{\sigma_s a}{E}-v_0\Big), \qquad \frac{Ev_0}{\sigma_s a}<1. \tag{16}$$

2. Пусть $1\leqslant k_0\leqslant 2(1+\mu^2)/(1-\mu^2)$. При этом, поскольку $Ev_0/(\sigma_s a)<1$, согласно (15) на фронте волны $x=at-0$ скорость $u_t\big|_{x=at-0}$ больше скорости v_0 окружающей среды и равенство (16) не выполняется, в то время как на фронте волны $x=at+0$

$$u_t\big|_{x=at+0}=v_0 \quad \text{при} \quad t=t^*=\frac{v_0}{k_0}\,\frac{\rho}{\tau}. \tag{17}$$

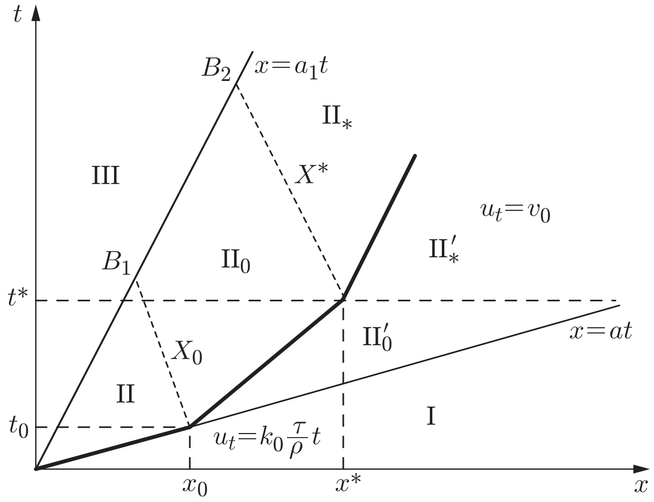

Рис. 3. Области с различными значениями коэффициента трения в случае $t^* > t_0$: I — область недеформированного состояния, II — область упругопластического деформирования, III — область деформированного состояния после прохождения фронтов упругой и пластической волн

Нетрудно показать, что в случае 1 имеют место неравенства

$$t_0 < t^* \quad \text{при} \quad \frac{2k_0}{1+k_0} < \frac{Ev_0}{\sigma_s a} < 1; \tag{18}$$

$$t_0 > t^* \quad \text{при} \quad \frac{Ev_0}{\sigma_s a} < \frac{2k_0}{1+k_0} < 1. \tag{19}$$

Исследуем в этих случаях напряженно-деформированное состояние стержня в области между характеристиками $x = a_1 t$ и $x = at$.

В случае выполнения неравенства (18) решение (10) уравнения (5) справедливо, если выполняется условие (13), что налагает ограничения на параметры k_0, μ. Согласно [1] для стали параметр μ изменяется в диапазоне $0{,}0548 \div 0{,}1000$, для сухих песчаных грунтов — в диапазоне $0{,}2236 \div 0{,}3162$. С учетом этого и условий (13), (18) будем полагать, что $\mu = 0{,}2362 \div 0{,}4000$, $k_0 = 0{,}6123 \div 0{,}9999$. При этом каждому значению k_0 в указанном интервале соответствует некоторое множество значений μ, удовлетворяющих условиям (13), (18).

Решение (10) уравнения (5) справедливо в области, принадлежащей области II и ограниченной характеристиками $x = at$, $x = a_1 t$ и X_0 $(x - x_0 + a(t - t_0) = 0)$ (рис. 3). Из (11) с учетом (13), (18) следует

$$0 < \sigma_\tau\big|_{x=a_1t_1} = a\tau t(1+\mu)(A_1 - F) < \frac{1}{2}\, a\tau t^* k_0\Big(1 - \frac{4F(\mu)}{k_0}\Big) < \frac{1}{2}\, a\tau t^* k_0 = \frac{Ev_0}{2\sigma_s a}\,\sigma_s < \sigma_s,$$

$$\frac{d\sigma_\tau(a_1t, t)}{dt} > 0, \qquad 0 < t \leqslant t_1,$$

где $t_1 = 2t_0/(1+\mu)$ — момент времени, в который характеристика $x = a_1 t$ пересекается с характеристикой X_0 с отрицательным углом наклона (точка B_1 на рис. 3).

Следовательно, в случае выполнения неравенства (18) деформация является упругой в области, принадлежащей области II и ограниченной характеристиками $x = at$, $x = a_1 t$ и X_0, а также в области II_0 (см. рис. 3), по крайней мере, вблизи X_0. При этом согласно (16) при $t \to t_0$ скорость стержня на фронте упругой волны $x = at - 0$ равна скорости окружающей среды. Однако, как следует из (17), (18), скорость на фронте упругой волны

$x = at + 0$ достигает значения, равного скорости окружающей среды, при $t = t^* > t_0$, поэтому $u_t\big|_{x=at_0+0} < v_0$. Будем полагать, что при $t > t_0$ условия, учитывающие это неравенство, выполняются на некоторой линии Γ_0, которая в момент $t = t_0$ отклоняется от фронта упругой волны. Пусть уравнение линии Γ_0 имеет вид

$$x - x_0 = a\psi(t - t_0), \tag{20}$$

где ψ — подлежащая определению функция. Таким образом, необходимо найти решение уравнения (5) и область его определения $\{x, t\colon a_1 t < x < x_0 + a\psi(t-t_0),\ t > t_0 - (x - x_0)/a\}$, т. е. функцию $\psi(t - t_0)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_0} = v_0, \quad \Big(a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \dot\psi\,\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big|_{\Gamma_0} = k_0\,\frac{\tau}{\rho}\,t\dot\psi, \quad t_0 < t \leqslant t^*, \quad \psi(0) = 0, \tag{21}$$

где второе условие представляет собой условие динамической непрерывности на Γ_0; $\dot\psi = d\psi/dt$.

Решение $u(x, t)$ задачи (5), (20), (21) будем искать в виде

$$u(x, t) = u^0(x, t) + \frac{\tau}{\rho a^2}\,\varphi(\zeta), \qquad \zeta = x - x_0 + a(t - t_0), \tag{22}$$

где $\varphi(\zeta)$ — произвольная функция; $u^0(x, t)$ — функция, определяемая формулой (10):

$$u^0(x, t) = \frac{\sigma_s}{E}\,(at - x) + \frac{\tau}{\rho a^2}\Big(\frac{(x - a_1 t)^2}{2(1 - \mu^2)} - \frac{a}{2}\,\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\,xt + \frac{k_0}{8}\,(x + at)^2\Big). \tag{23}$$

Условия (21) удовлетворяются следующим образом. Из (22) и первого условия (21) находим равенство

$$\frac{\tau}{\rho a}\,\varphi'(\zeta)\big|_{\Gamma_0} = v_0 - u^0_t(x, t)\big|_{\Gamma_0}, \tag{24}$$

которое подставляем во второе условие (21), и используем следующие равенства, имеющие место в силу условий (7), (9), (17):

$$u^0_t\big|_{\Gamma_0} = u^0_t\big|_{\Gamma_0} - u^0_t(x_0, t_0) + v_0, \qquad u^0_x\big|_{\Gamma_0} = u^0_x\big|_{\Gamma_0} - u_x(x_0, t_0) + \frac{1}{a}\Big(k_0\,\frac{\tau}{\rho}t_0 - v_0\Big).$$

В результате второе условие (21) принимает вид

$$v_0 - k_0\,\frac{\tau}{\rho a}\,t_0 - \big(au_x\big|_{\Gamma_0} - au^0_x(x_0, t_0)\big) + \big(u^0_t(x, t)\big|_{\Gamma_0} - u^0_t(x_0, t_0)\big) = \Big(v_0 - k_0\,\frac{\tau}{\rho}\,t\Big)\frac{d\psi}{dt}, \qquad \psi(0) = 0.$$

Вычисляя производные функции $u^0(x, t)$ по формуле (23) с учетом (20), получаем задачу Коши для определения искомой функции $\psi(t - t_0)$:

$$\Big(\beta_0 - k_0\,\frac{\tau}{\rho}\,(t - t_0)\Big)\frac{d\psi}{dt} + \beta_1\psi = \beta_2(t - t_0) + \beta_0, \qquad \psi(0) = 0. \tag{25}$$

Здесь

$$\beta_0 = v_0 - k_0\,\frac{\tau}{\rho}\,t_0, \qquad \beta_1 = \frac{3 + \mu^2}{2(1 - \mu^2)}\,\frac{\tau}{\rho}, \qquad \beta_2 = \frac{1 + 3\mu^2}{2(1 - \mu^2)}\,\frac{\tau}{\rho}.$$

Решение задачи Коши нетрудно найти в виде ряда по степеням $t - t_0$:

$$\psi(t - t_0) = c_1(t - t_0) + c_2\,\frac{(t - t_0)^2}{2} + c_3\,\frac{(t - t_0)^3}{3} + \dots. \tag{26}$$

Здесь

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -\frac{\beta_1 - \beta_2 + k_0\tau/\rho}{\beta_0}, \qquad c_i = \frac{\beta_1 - (i-1)k_0\tau/\rho}{(i-1)\beta_0}\, c_{i-1}, \qquad i \geqslant 3.$$

Произвольная функция $\varphi(\zeta)$ в (22) находится следующим образом. Введем функции

$$\theta = a\psi(t - t_0) + a(t - t_0), \qquad t - t_0 = \chi(\theta), \qquad t_0 < t \leqslant t^*. \tag{27}$$

При этом (24) можно записать в виде

$$\varphi'(\zeta)\big|_{\Gamma_0} = \frac{\rho a}{\tau}\,(v_0 - u_t^0(x,t))\big|_{\Gamma_0} = \frac{\rho a}{\tau}\,(u_t^0(x_0,t_0) - u_t^0(x,t))\big|_{\Gamma_0} = \varphi'(\theta), \qquad x_0 = at_0,$$

поскольку $\zeta\big|_{\Gamma_0} = a[\psi(t-t_0) + (t-t_0)] = \theta$, где t_0 определяется по формуле (16). Отсюда получаем уравнение для определения $\varphi(\theta)$:

$$\varphi'(\theta) = \frac{\rho a}{\tau}\,\big[u_t^0(x_0,t_0) - u_t^0(x,t)\big|_{x=x_0+a\psi(t-t_0)}\big], \qquad t - t_0 = \chi(\theta), \qquad t_0 < t \leqslant t^*, \tag{28}$$

где функция $\chi(\theta)$ определяется из уравнения $\theta = a\psi(t-t_0) + a(t-t_0)$.

Приближенное решение уравнения (28) можно получить путем аппроксимации (26) линейной функцией

$$\psi(t - t_0) = c_0(t - t_0), \qquad c_0 = \frac{\psi(t^* - t_0)}{t^* - t_0}, \tag{29}$$

где $\psi(t^* - t_0)$ вычисляется по формуле (26). При этом в выражениях (27), (28) функции θ и $\chi(\theta)$ имеют вид

$$\theta = a(1 + c_0)(t - t_0), \qquad t - t_0 = \chi(\theta) = \frac{\theta}{a(1 + c_0)}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (28) и выполняя интегрирование, находим функцию $\varphi(\theta)$ и, следовательно, произвольную функцию в (22):

$$\varphi(\zeta) = \frac{b_1c_0 - b_2}{2(1 + c_0)}\,\zeta^2, \qquad b_1 = \frac{1 + \mu^2}{2(1 - \mu^2)} - A_1, \qquad b_2 = \frac{\mu^2}{2(1 - \mu^2)} + A_1. \tag{31}$$

Таким образом, получено приближенное решение задачи в виде (22), где функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(t - t_0)$ имеют вид (31) и (29) соответственно. На рис. 4 приведены зависимости ψ/T от t/T (T — характерное время) для точного решения (26) (линия *1*) и для его линейной интерполяции (29) при следующих значениях безразмерных параметров задачи: $k_0 = 0{,}8$,

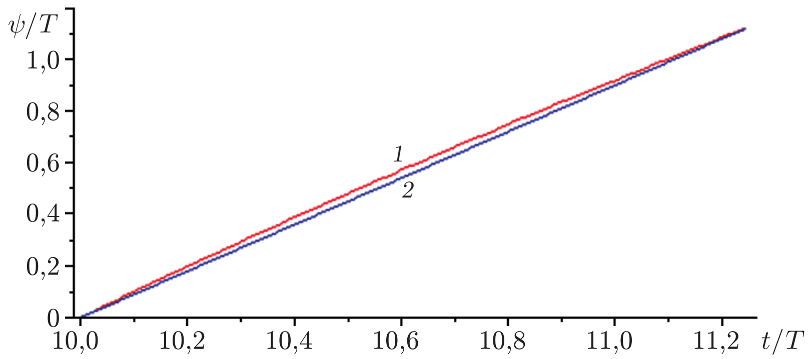

Рис. 4. Зависимость ψ/T от t/T для точного решения (26) (*1*) и его линейной интерполяции (29) (*2*)

$\mu = 0{,}4$, $V_0 = Ev_0/(\sigma_s a) = 0{,}9$, $(\tau/\rho)ET/(\sigma_s a) = 0{,}1$. При этом согласно формулам (16), (17) $t/T = 10$, $t^*/T = 11{,}25$. Поскольку погрешность, допускаемая при линейной интерполяции, мала, можно ожидать, что приближенное решение также будет незначительно отличаться от точного решения. При необходимости можно увеличить точность приближенного решения следующим образом. Отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ разбивается на несколько частей, на каждой из которых осуществляется локальная линейная интерполяция функции ψ. Затем для каждой части отрезка находится произвольная функция $\varphi(\zeta)$.

Полученное выше решение справедливо в области между прямыми $t > t_0 - (x - x_0)/a$ и $x - x^* + a(t - t^*) = 0$, где $x^* = x_0 + a\psi(t^* - t_0)$. Согласно (17) скорость на фронте упругой волны $x = at + 0$ в момент $t = t^*$ равна скорости окружающей среды v_0. При этом с учетом условия (21) напряжение и скорость непрерывны в точке $(x^*, t^*) \subset \Gamma_0$. Далее полагается, что при $t > t^*$ эти условия непрерывности выполняются на некоторой линии Γ_* — подлежащей определению правой границе области упругого деформирования:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_*} = v_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Gamma_*} = 0, \qquad t > t^*, \quad \Gamma_*\colon x - x^* = a\psi_1(t - t^*), \quad \psi_1(0) = 0. \tag{32}$$

Решение для $t > t^* - (x - x^*)/a$, удовлетворяющее условиям (32), будем искать в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{\tau}{\rho a^2}\,\varphi_1(\zeta_1), \quad \zeta_1 = x - x^* + a\psi_1(t - t^*),$$
$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \qquad \psi_1(0) = 0, \tag{33}$$

где $u_0(x,t)$ — решение (22) рассмотренной выше задачи; $\varphi_1(\zeta_1)$, $\psi_1(t - t^*)$ — подлежащие определению функции. Таким образом, для того чтобы найти решение (33), нужно определить функции $\varphi_1(\zeta_1)$ и $\psi_1(t - t^*)$. Из (21), (32), (33) следуют равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_*} - a\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Gamma_*} = v_0, \quad \frac{\partial u(x^*,t^*)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(x^*,t^*)}{\partial t}, \quad u_0(x,t) = u^0(x,t) + \frac{\tau}{\rho a^2}\,\varphi(\zeta),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(x^*,t^*) = \frac{\partial u^0}{\partial t}\,(x^*,t^*) + \frac{\tau}{\rho a}\,\varphi'(\zeta^*) = v_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x^*,t^*) = \frac{\partial u^0}{\partial x}\,(x^*,t^*) + \frac{\tau}{\rho a^2}\,\varphi'(\zeta^*) = 0,$$
$$\zeta^* = x^* - x_0 + a\psi(t^* - t_0).$$

Используя эти равенства, с учетом (33) получаем уравнение

$$\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big|_{\Gamma_*} - \frac{\partial u^0(x^*,t^*)}{\partial t} = a\,\frac{\partial u^0}{\partial x}\Big|_{\Gamma_*} - a\,\frac{\partial u^0(x^*,t^*)}{\partial x},$$
$$\Gamma_*\colon x - x^* = a\psi_1(t - t^*), \qquad \psi_1(0) = 0.$$

Следовательно, для определения функции ψ_1 получаем задачу, аналогичную задаче (25):

$$\psi_1(t - t^*) = \frac{\beta_2}{\beta_1}\,(t - t^*), \qquad t > t^*, \quad \beta_1 = \frac{3 + \mu^2}{2(1 - \mu^2)}, \quad \beta_2 = \frac{1 + 3\mu^2}{2(1 - \mu^2)}. \tag{34}$$

В отличие от решения (25) функция ψ_1 является линейной, поэтому функция $\varphi_1(\zeta_1)$ находится аналогично (31). Таким образом, при $t > t^* - (x - x^*)/a$ правой границей зоны упругого деформирования, где скорость стержня равна скорости внешней среды, является полупрямая $\Gamma_*\colon x - x^* = a(\beta_2/\beta_1)(t - t^*)$, $t > t^*$.

В случае выполнения неравенства (19) решение уравнения (5) имеет вид (10) во всей области II вплоть до характеристики X_* $(x - x^* + a(t - t^*) = 0)$ с отрицательным углом наклона (рис. 5). В момент $t = t^* < t_0$ скорость на фронте упругой волны $x = at + 0$ согласно (17) равна скорости окружающей среды. Однако скорость частиц стержня на фронте

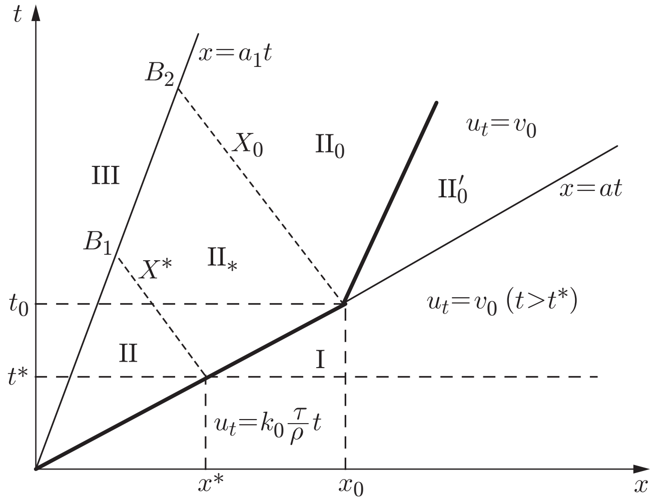

Рис. 5. Области с различными значениями коэффициента трения в случае $t^* < t_0$: I — область недеформированного состояния, II — область упругопластического деформирования, III — область деформированного состояния после прохождения фронтов упругой и пластической волн

упругой волны больше скорости внешней среды, вследствие чего условие (7) принимает вид

$$(u_t + au_x)\big|_{x=at} = v_0, \qquad t^* < t \leqslant t_0. \tag{35}$$

Решение уравнения (5) в области II_* (см. рис. 5), удовлетворяющее на фронте упругой волны условию динамической непрерывности (35), будем искать в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{\sigma_s}{E}\,(at - x) + \frac{\tau}{\rho a^2}\Big(\frac{(x - a_1t)^2}{2(1-\mu^2)} - \frac{a}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,xt + \frac{k_0}{8}\,(x + at)^2 + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\,A_2(x - x^* + a(t - t^*))^2\Big), \qquad t > t^* - \frac{x - x^*}{a}. \tag{36}$$

Если в условии (35) использовать тождество

$$(u_t + au_x)\big|_{x=at} = (u_t + au_x)\big|_{x=at^*} + \big[(u_t + au_x)\big|_{x=at} - (u_t + au_x)\big|_{x=at^*}\big],$$

то с учетом равенства $(u_t + au_x)\big|_{x=at^*} = v_0$ оно принимает вид

$$(u_t + au_x)\big|_{x=at} - (u_t + au_x)\big|_{x=at^*} = 0.$$

Нетрудно показать, что это равенство имеет место, если $A_2 = -A_1 = -k_0/4$.

Из (36) следует, что скорость на фронте упругой волны ($x = at - 0$) определяется по формуле

$$u_t\big|_{x=at-0} = \frac{\sigma_s a}{E} - \frac{\tau}{2\rho}\,(1 - k_0)t - \frac{k_0}{4}\,(2at - (x^* + at^*))\,\frac{\tau}{\rho a}$$

и достигает скорости окружающей среды v_0 при $t = t_0$:

$$t_0 = \frac{2\rho}{\tau}\Big(\frac{\sigma_s a}{E} - v_0\Big) + k_0 t^*. \tag{37}$$

В точке (at_0, t_0) на фронте упругой волны скорость и напряжение непрерывны. При этом с учетом (36) имеем

$$\sigma\big|_{x=a_1t-0} = \sigma\big|_{x=a_1t+0} > 0, \qquad \frac{d\sigma_\tau}{dt}(a_1t, t) = -a\tau\,\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}\,t < 0, \qquad t > t_1, \qquad t_1 = 2t^*/(1+\mu). \tag{38}$$

Первое неравенство (38) следует из (11) и условия (13). Согласно второму неравенству $\sigma_\tau(a_1t, t)$ — функция, убывающая при $t > t_1$. Однако при $0 < t \leqslant t_1$ из (10), (13) получаем

$$\frac{1}{a\tau}\,\frac{d\sigma_\tau(a_1t,t)}{dt} = (1+\mu)[A_1 - F(\mu)] > 0, \qquad 0 < t < t_1.$$

Следовательно, $\sigma_\tau(a_1t, t)$ достигает максимального значения при $t = t_1$, т. е. в точке пересечения характеристики X^* с отрицательным углом наклона и характеристики $x = a_1t$. Из (36) с учетом (17), (37) находим

$$\sigma_\tau\big|_{x=a_1t_2} = \frac{1}{2}\,a\tau t^*\Big(k_0 - \frac{1-\mu}{1+\mu}\,\frac{t_2}{t^*}\Big) = \frac{V_0}{2}\,\sigma_s\Big(1 - \frac{2(1-\mu)(1-V_0)}{v_0(1+\mu)^2}\Big), \tag{39}$$

где

$$V_0 = \frac{Ev_0}{\sigma_s a} < \frac{2k_0}{1+k_0}, \qquad \frac{t_2}{t^*} = \frac{2k_0(1-V_0)}{(1+\mu)V_0},$$

$t_2 = 2t_0/(1+\mu)$ — момент времени, в который характеристика X_0 с отрицательным углом наклона пересекается с характеристикой $x = a_1t$.

Таким образом, возможны случаи

$$\sigma_\tau\big|_{x=a_1t_2} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad V_0 \leqslant \frac{4F(\mu)}{1+4F(\mu)}; \tag{40}$$

$$0 < \sigma_\tau\big|_{x=a_1t_2} < \sigma_s \quad \text{при} \quad \frac{4F(\mu)}{1+4F(\mu)} < V_0 < \frac{2k_0}{1+k_0}, \tag{41}$$

где последнее неравенство записано с учетом (19).

При выполнении неравенства (40) нарушаются условия (13), (18), поэтому данный случай не рассматривается.

В случае неравенства (41) упругая деформация имеет место во всей области II_* вплоть до характеристики X_0 с отрицательным углом наклона и далее в области II_0 (см. рис. 5), по крайней мере, вблизи характеристики X_0.

Как отмечено выше, скорость и напряжение непрерывны в точке (at_0, t_0) на фронте упругой волны. Полагается, что эти условия непрерывности выполняются на некоторой линии Γ_0, уравнение которой имеет вид $x - x_0 = a_0(t - t_0)$. При $t > t_0 - (x - x_0)/a$ область II_* делится на две подобласти: II_0 и II_0' (см. рис. 5). Решения в этих областях имеют следующий вид:

— в области II_0

$$u_0 = u(x,t) + \frac{\tau}{2\rho a^2}\,A_3[x - x_0 + a(t - t_0)]^2; \tag{42}$$

— в области II_0'

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = v_0. \tag{43}$$

Зависимость функции $F(\mu)$ и A_3 от параметра μ

μ	$F(\mu)$	A_3
0,2362	0,2484	0,1118
0,2500	0,2400	0,1103
0,3000	0,2060	0,1043
0,4000	0,1531	0,0905

В (42), (43) $u(x,t)$ определяется формулой (36). Неизвестные параметры A_3, a_0 находятся из условий непрерывности скоростей и напряжений на Γ_0:

$$A_3 = \frac{1+\mu^2-2\alpha_0}{2(1+\alpha_0)(1-\mu^2)}, \qquad a_0 = \alpha_0 a, \qquad \alpha_0 = \frac{1+3\mu^2}{3+\mu^2}. \tag{44}$$

При этом на фронте $(x = a_1 t + 0)$ пластической волны имеем

$$\frac{d\sigma_\tau}{dt}\,(a_1 t, t) = a\tau(1+\mu)[A_3 - F(\mu)] < 0, \qquad t > t_2, \qquad t_2 = \frac{2t_0}{1+\mu}.$$

Нетрудно показать, что это неравенство справедливо во всем диапазоне значений параметров k_0 и μ, поскольку $F(\mu) > A_3$ (см. таблицу). Следовательно, $\sigma_\tau(a_1 t, t)$ является функцией, убывающей при $t > t_2$, и при некотором $t = t_s > t_2$ имеет место равенство $\sigma(a_1 t_s, t_s) = -\sigma_s$. Корень этого уравнения — момент времени, в который достигается предел упругости в точках $x = a_1 t + 0$, — имеет вид

$$t_s = \frac{(1+\mu)(k_0 t^* - 4A_3 t_0)}{1-\mu-2(1+\mu)^2 A_3},$$

где t^*, t_0 вычисляются по формулам (17), (37).

Уравнение линии текучести будем искать в виде

$$x = x_s(t) = a_1 t_s + a_s(t - t_s), \qquad t > t_s, \qquad a_s = a\alpha_s.$$

При этом из условия $\sigma(x_s(t), t) = -\sigma_s$, $t > t_s$ получаем $\alpha_s = \alpha_0$, где α_0 определяется по формуле (44). Таким образом, при $t > t_s > t_2$ зона упругого деформирования представляет собой полуполосу, левой границей которой является линия текучести, а правой — полупрямая $(x - x_0 = a_0(t - t_0),\ t > t_0)$, где скорость движения сечения стержня равна скорости окружающей среды.

Пусть выполняются неравенство $1 \leqslant k_0 < 2(1+\mu^2)/(1-\mu^2)$ и условие (13). Эти условия справедливы при $0{,}236 \leqslant \mu \leqslant 0{,}400$.

Решение уравнения (5) в области II (см. рис. 5), удовлетворяющее динамическому условию (7), на фронте упругой волны имеет вид (10). Согласно (17) при $t \to t^* - 0$ скорость на фронте волны $x = at + 0$ становится равной скорости окружающей среды v_0. При этом изменяется правая часть (7), вследствие чего уравнение (5) рассматривается в области II_* (см. рис. 5) с учетом того, что в области между характеристиками $x = at$ и $x = a_1 t$ выполняется неравенство $u_t > v_0$. Из сказанного выше следует, что данная задача совпадает с задачей в случае выполнения неравенства (19). Аналогичное совпадение имеет место при $t > t_0 + (x_0 - x)/a$, где t_0 определяется по формуле (37). Таким образом, решение в области II_* $(t > t^* + (x^* - x)/a)$ определяется формулой (36), а решения в областях II_0 и II_0' имеют вид (42), (43). Линии текучести определяются в предположении, что выполняется неравенство (19).

Рассмотрим случай, когда условие (13) не выполняется:

$$F(\mu) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} > A_1.$$

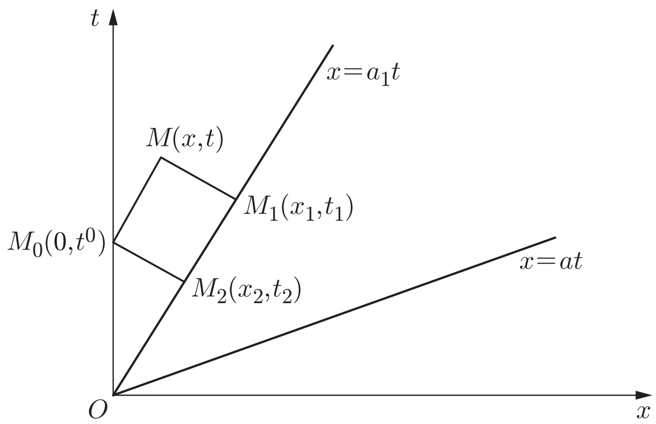

Рис. 6. Решение задачи с использованием метода характеристик в области III пластической деформации

При этом согласно (11), (12) $\sigma_\tau\big|_{x=a_1t} < 0$, $t>0$, но $\sigma_\tau\big|_{x=at} > 0$, $t>0$, поэтому имеет место неравенство $|\sigma| > \sigma_s$, по крайней мере, вблизи фронта пластической волны $x = a_1t$. Следовательно, появляется зона пластического деформирования $a_1t < x < a_st$, примыкающая к фронту пластической волны $x = at + 0$. Правая граница этой зоны $x = a_st$, являющаяся границей раздела зон пластического и упругого деформирования (линия текучести), определяется из равенства (11) при $\sigma\big|_{x=a_st} = -\sigma_s$, $t>0$:

$$x = a_st, \qquad a_s = \frac{2(1+\mu^2) - k_0(1-\mu^2)}{4 + k_0(1-\mu^2)}\,a. \tag{45}$$

Найдем решение в области пластического деформирования. Из приведенной выше постановки задачи (1)–(8) следует, что требуется найти решение уравнения (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{\rho}, \qquad 0 < x < a_1t, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее условиям (2), (8):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{\sigma_0}{E_1}, \qquad (\rho a_1u_t + \rho a_1^2u_x)\big|_{x=a_1t-0} = (\rho a_1u_t + \rho a_1^2u_x)\big|_{x=a_1t+0}.$$

Решение в области III, образованной осью t и фронтом пластической волны $x = a_1t$, будем искать методом характеристик (рис. 6). Выберем в этой области произвольную точку $M(x,t)$ и проведем через нее характеристику с положительным углом наклона, которая пересекается с осью t в точке $M_0(0,t^0)$, и характеристику с отрицательным углом наклона, которая пересекается с характеристикой $x = a_1t$ в точке $M_1(x_1,t_1)$. Если скорость в области III обозначить через $v(x,t)$, то с учетом направления сил трения условия на этих характеристиках имеют вид

$$dv = \pm\frac{1}{\rho a_1}\,d\sigma \mp \frac{\tau}{\rho}\,dt. \tag{46}$$

Используя эти условия, получаем соответственно соотношения вдоль характеристики M_0M с положительным углом наклона и вдоль характеристики MM_1 с отрицательным углом наклона:

$$v(M) - v(M_0) = \frac{\sigma(M) - \sigma(M_0)}{\rho a_1} - \frac{\tau}{\rho}\,(t - t^0); \tag{47}$$

$$v(M) - v(M_1) = -\frac{\sigma(M) - \sigma(M_1)}{\rho a_1} + \frac{\tau}{\rho}\,(t - t_1). \tag{48}$$

Отсюда находим

$$\sigma(M) = [\sigma(M_0) + \sigma(M_1) + \tau a_1(2t - t_1 - t^0) + \rho a_1(v(M_1) - v(M_0))]/2, \tag{49}$$

где $\sigma(M_1)$, $v(M_1)$, $v(M_0)$, t^0, t_1 — величины, которые необходимо определить. Определим эти неизвестные величины.

Аналогично (47) вдоль характеристики OM_1 имеет место соотношение

$$v(M_1) = v(0) + \frac{\sigma(M_1) - \sigma(0)}{\rho a_1} - \frac{\tau}{\rho}\,t_1, \tag{50}$$

где $\sigma(0) = -\sigma_0$, $v(0)$ — нагрузка и скорость на торце стержня соответственно; $\sigma(M_1) = \sigma(M_1 - 0)$, $v(M_1) = v(M_1 - 0)$ — предельные значения σ и v в точке M_1 слева от фронта $x = a_1 t$.

Скорость на торце стержня определяется из выражения (50) с учетом предельных равенств

$$\sigma(M_1 - 0) \to -\sigma_0, \qquad v(M_1 - 0) \to v(0,0) = v(0), \qquad \sigma(M_1 + 0) \to \sigma(0,0) = -\sigma_s$$

в виде

$$v(0) = \frac{\sigma_0 - \sigma_s}{\rho a_1} + u_t\big|_0, \qquad u_t\big|_0 = u_t(0,0). \tag{51}$$

В отличие от (50) здесь и далее скорость перед фронтом пластической волны обозначается через $u_t(x,t)$.

Условие динамической непрерывности (8) в точке M_1

$$\sigma(M_1 + 0) - \sigma(M_1 - 0) = -\rho a_1[v(M_1 + 0) - v(M_1 - 0)]$$

и соотношение (50) с учетом (51) образуют систему двух уравнений, из которых получаем напряжение и скорость в точке M_1:

$$\sigma(M_1) = -\sigma_0 + \frac{\sigma(M_1 + 0) + \sigma_s}{2} + \frac{\rho a_1}{2}\,\big(u_t\big|_{M_1} - u_t\big|_0\big) + \frac{\tau a_1}{2}\,t_1; \tag{52}$$

$$v(M_1) = \frac{\sigma(M_1 + 0) - \sigma_s}{2\rho a_1} + \frac{\sigma_0}{\rho a_1} + \frac{1}{2}\,\big(u_t\big|_{M_1} + u_t\big|_0\big) - \frac{\tau}{2\rho}\,t_1. \tag{53}$$

Определим скорость $v(M_0)$ в точке M_0. Проведем через точку M_0 характеристику с отрицательным углом наклона, которая пересекается с характеристикой $x = a_1 t$ в точке M_2. Используя условия (46) и (8), находим

$$v(M_0) = \frac{\sigma_0}{\rho a_1} + \frac{\sigma(M_2 + 0)}{\rho a_1} + u_t\big|_{M_2} + \frac{\tau}{\rho}\,(t^0 - t_2), \tag{54}$$

где учтено, что $\sigma(M_0) = -\sigma_0$. Неизвестные t^0, t_1, t_2 определяются из уравнений характеристик M_0M, M_0M_2, MM_1 соответственно:

$$t^0 = t - \frac{x}{a_1}, \qquad t_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{a_1} + t\Big), \qquad t_2 = \frac{t^0}{2}. \tag{55}$$

Наконец, подставляя (52)–(55) в (49) и затем (49) в (47) или (48), получаем выражения, определяющие напряжение и скорость движения сечений стержня в произвольной точке $M(x,t)$ области III:

$$\sigma(M) = -\sigma_0 + \Big(\frac{\sigma(M_1 + 0) - \sigma(M_2 + 0)}{2} + \frac{\rho a_1}{2}\,\big(u_t\big|_{M_1} - u_t\big|_{M_2}\big) + \frac{1}{2}\,\tau x\Big); \tag{56}$$

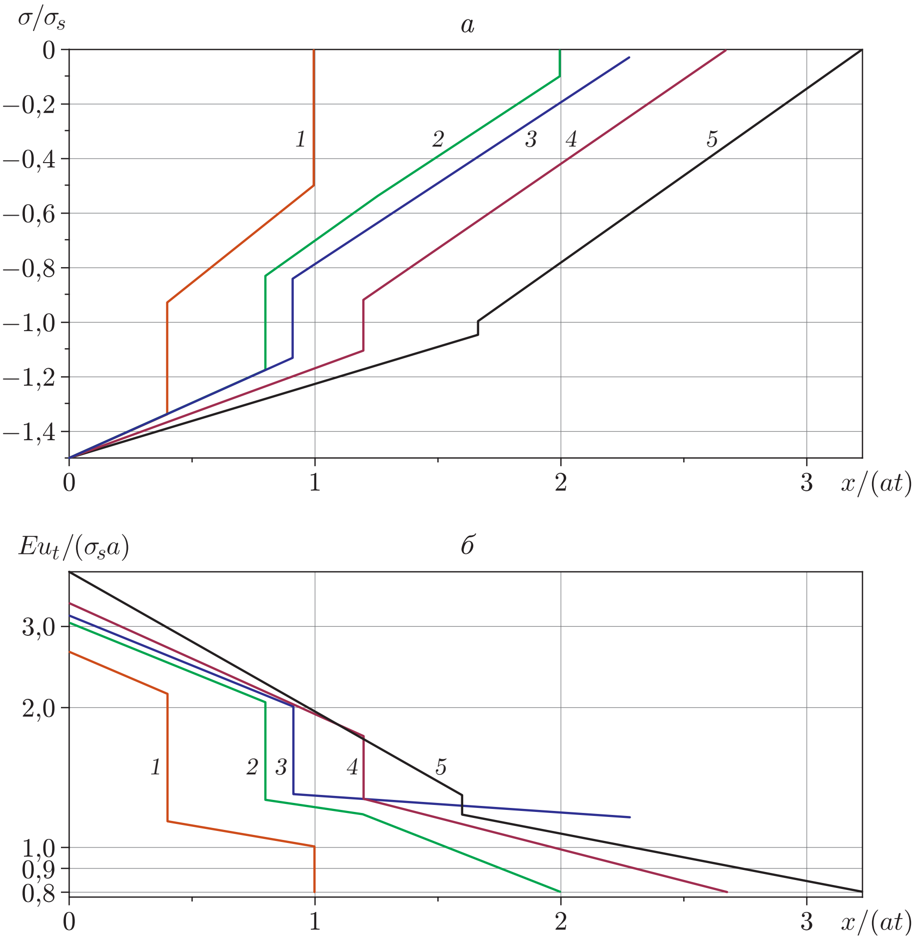

Рис. 7. Распределения напряжений (*а*) и скорости движения сечений стержня (*б*) в областях пластического и упругого деформирования:
1 — $t/T = 1$, *2* — $t/T = 2$, *3* — $t/T = 2{,}28$, *4* — $t/T = 3$, *5* — $t/T = 4{,}173$

$$v(M) = \frac{\sigma_0}{\rho a_1} + \frac{\sigma(M_1+0)+\sigma(M_2+0)}{2\rho a_1} + \frac{1}{2}\left(u_t\big|_{M_1} + u_t\big|_{M_2}\right) + \frac{\tau}{2\rho}\Big(t - 2\,\frac{x}{a_1}\Big). \qquad (57)$$

3. Результаты численных расчетов. На рис. 7 приведены результаты расчетов (случай 2) по формулам (17), (36), (37), (42)–(44), (56), (57) при следующих значениях безразмерных параметров: $\sigma_0/\sigma_s = -1{,}5$, $k_0 = 1$, $Ev_0/(\sigma_s a) = 0{,}8$, $\mu = 0{,}4$, $\tau a T/\sigma_s = 0{,}5$.

На основе полученных выше решений и рис. 7 можно сделать следующие выводы. Сжимающее усилие и скорость уменьшаются по мере удаления от конца ($x = 0$) стержня до фронта пластической волны, где претерпевают скачок. Далее сжимающее усилие и скорость продолжают уменьшаться в области упругого деформирования до момента достижения правой границы. На правой границе скорость и напряжение вновь претерпевают скачок: в случае выполнения неравенства (18) — на интервале $0 < t < t^*$, в случае выполнения неравенства (19) — на интервале $0 < t < t_0$, а также в случае 2, при этом t_0 определяется по формуле (37). Далее скорость и напряжение на правой границе зоны упругого деформирования становятся непрерывными: скорость частиц стержня равна скорости окружающей среды, а напряжение равно нулю.

Предел упругости достигается на фронте пластической волны $x = at + 0$. В случае выполнения неравенства (18) напряжение трения $\sigma_\tau(a_1 t{+}0, t)$ $(t > 0)$ монотонно возрастает до значения, соответствующего точке пересечения характеристики X^* с отрицательным углом наклона (X_0 в случае выполнения неравенства (19) и в случае 2) с характеристикой $x = a_1 t$, где достигает максимума, а затем монотонно убывает до нуля.

Следует отметить, что можно получить условия, при выполнении которых можно пренебрегать отличием коэффициента трения в области невозмущенного движения ($k_0 \neq 1$) от коэффициентов трения в зонах упругого и пластического деформирования ($k_0 = 1$). Например, в случаях выполнения неравенств (18) и (19) таким условием является условие

$$\frac{\tau a t}{4\sigma_s}\,(1+\mu)k^* \ll 1, \qquad k^* = \max\Big(|k_0 - 1|, \frac{k_0}{4} - F(\mu)\Big),$$

где $t = t_0$ в случае выполнения неравенства (18) и $t = t^*$ в случае выполнения неравенства (19). Это утверждение следует из оценок

$$\Big|\frac{\sigma(a_1t,t) - \sigma(a_1t,t)|_{k_0=1}}{\sigma(a_1t,t)}\Big| = \Big|\frac{u_t(a_1t,t) - u_t(a_1t,t)|_{k_0=1}}{u_t(a_1t,t)}\Big| \leqslant \frac{\tau a t}{4\sigma_s}\,(1+\mu)k^*$$

для относительной погрешности скорости и напряжения, поскольку максимальные значения скорости и модуля напряжения достигаются в каждый момент времени на фронте пластической волны $x = at + 0$. Нетрудно получить аналогичные оценки для других случаев.

Заключение. В работе исследовано влияние трения Кулона на напряженно-деформированное состояние стержня при внезапном нагружении. Учитывается зависимость коэффициента трения от скорости проскальзывания в зонах упругого, пластического деформирования и в области невозмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
2. **Рахматулин Х. А.** Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983.
3. **Никитин Л. В.** Статика и динамика твердых тел с внешним трением. М.: Моск. лицей, 1998.
4. **Филиппов А. Н.** Динамическое воздействие на трубопровод с учетом сухого трения на его поверхности // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 20–29.
5. **Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.** Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 32–43.
6. **Юнин Е. К.** Загадки и парадоксы сухого трения. М.: Либроком, 2012.
7. **Сумбатов А. С.** Очерки о трении / А. С. Сумбатов, Е. К. Юнин. М.: Вычисл. центр РАН, 2000.

Поступила в редакцию 20/VII 2020 г.,
после доработки — 21/X 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.