

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ**

С. Н. Багир-заде, Г. П. Гусейнов

(Баку)

Исследованию движения однородной жидкости в трещиновато-пористом пласте при нестационарной фильтрации посвящены работы [1-4].

В [3] исследовано движение однородной жидкости к центральной скважине из кругового трещиновато-пористого пласта бесконечной протяженности и сделан вывод о том, что кривая восстановления (понижения) забойного давления после остановки (пуска) скважины имеет «двухслойный» характер. Обоснованию такого изменения восстановления (понижения) забойного давления посвящена работа [4]. Однако как в [3], так и в [4] получены лишь приближенные формулы, описывающие этот процесс.

В данной работе даются точные решения задач о нестационарной фильтрации однородной жидкости к центральной скважине из круговых трещиновато-пористых пластов в двух характерных случаях: когда среда имеет непроницаемую внешнюю границу и когда среда является неограниченной по протяженности. Произведены численные расчеты, которые подтверждают вывод о том, что кривая восстановления (понижения) забойного давления имеет «двухслойный» характер изменения в случае, когда трещиновато-пористый пласт является неограниченным по протяженности. В случае замкнутого трещиновато-пористого пласта кривая понижения во времени забойного давления скважины всегда больше таковой для гранулярной среды.

При решении задач предполагается, что дебит скважины, совершенной по характеру и степени вскрытия, является постоянным в течение всего процесса разработки.

В соответствии с теорией движения однородной жидкости в трещиновато-пористой среде, предложенной в работах [1-3], решение поставленных задач сводится к интегрированию систем уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \xi} - (1 - \omega) \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \tau} = \omega \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \tau} = \lambda (\psi_2^{(i)} - \psi_1^{(i)}) \quad (i = 1, 2)$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$\psi_1^{(i)}(\xi, 0) = \psi_2^{(i)}(\xi, 0) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

$$\left(\xi \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -1 \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=R} = 0 \quad (4)$$

$$\psi_2^{(1)}(\infty, \tau) = 0 \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\psi_j^{(i)}(\xi, \tau) = 2\pi \frac{k_2 h}{q\mu} [p_0 - p_j^i(\xi, \tau)] \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\omega = \frac{m_2 \beta_2}{m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2}, \quad \tau = \frac{k_2 t}{\mu r_c^2 (m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2)} \quad (6)$$

$$\lambda = \alpha r_c^2 \frac{k_1}{k_2}, \quad \xi = \frac{r}{r_c}, \quad R = \frac{r_k}{r_c}$$

где α — параметр трещиновато-пористой среды, характеризующий обмен жидкостью между низкопроницаемыми блоками и трещинами, p_0 и $p(\xi, \tau)$ — начальное и текущее давления соответственно, q — постоянный дебит скважины, h — мощность пласта, m — пористость, k и β — коэффициенты проницаемости и упругоёмкости, μ — вязкость, t — время, r , r_c и r_k — текущий радиус, радиус скважины и радиус непроницаемой внешней границы пласта. Верхние индексы 1 и 2 в функциях давления соответствуют неограниченной по протяженности и замкнутой средам, а нижние — системам блоков и трещин среды.

Подвергая системы (1) и граничные условия (3) — (5) преобразованию Лапласа по времени, исключая затем из полученной системы функцию понижения давления в системе блоков, можно написать

$$\frac{d^2 \Psi_2^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_2^{(i)}}{d\xi} - S_* \Psi_2^{(i)}(\xi, s) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

где

$$S_* = s[\omega(1-\omega)s + \lambda][(1-\omega)s + \lambda]^{-1} \quad (8)$$

s — параметр преобразования Лапласа, а $\Psi(\xi, s)$ — лапласово изображение функции $\psi(\xi, \tau)$.

Общее решение уравнений (7) имеет вид [5, 6]

$$\Psi_2^{(i)}(\xi, s) = AI_0(\xi \sqrt{S_*}) + BK_0(\xi \sqrt{S_*}) \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

Здесь $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента первого и второго рода соответственно.

Найдя постоянные интегрирования A и B из предварительно подвергнутых преобразованию Лапласа граничных условий (3) и (5) для бесконечного пласта и (3), (4) для замкнутого пласта, решения задач можно представить в виде

$$\Psi_2^{(1)}(\xi, s) = K_0(\xi \sqrt{S_*}) [s \sqrt{S_*} K_1(\sqrt{S_*})]^{-1} \quad (10)$$

$$\Psi_2^{(2)}(\xi, s) = \frac{1}{s \sqrt{S_*}} \frac{I_0(\xi \sqrt{S_*}) K_1(R \sqrt{S_*}) + I_1(R \sqrt{S_*}) K_0(\xi \sqrt{S_*})}{I_1(R \sqrt{S_*}) K_1(\sqrt{S_*}) - I_1(\sqrt{S_*}) K_1(R \sqrt{S_*})} \quad (11)$$

Пользуясь соотношением из [5]

$$s[\Psi_2^{(2)}(\xi, s)]_{s=s} = \frac{2}{R^2 - 1} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n U_n(\xi, R) \exp(-\beta_n^2 \tau) \quad (12)$$

где

$$U_n(\xi, R) = J_1(\beta_n R) \frac{J_1(\beta_n \xi) Y_0(\beta_n \xi) - J_0(\beta_n \xi) Y_1(\beta_n \xi)}{J_1^2(\beta_n R) - J_1^2(\beta_n \xi)} \quad (13)$$

оригинал изображения (11), с использованием обобщенной теоремы умножения Эфроса [7], можно найти в виде

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)}(\xi, \tau) = & \frac{2\tau}{\omega(R^2 - 1)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(\xi, R)}{\beta_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_n^2 \tau}{\omega}\right) \right] - \\ & - \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[\frac{2}{R^2 - 1} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n U_n(\xi, R) \exp(-\beta_n^2 \theta) \right] d\theta \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$g(\tau, \theta) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda \frac{\tau - \omega\theta}{1 - \omega}\right) \int_0^{\theta} e^{-\lambda z} I_0\left[2\lambda \left(z \frac{\tau - \omega\theta}{1 - \omega}\right)^{1/2}\right] dz & \text{при } \theta < \frac{\tau}{\omega} \\ 0 & \text{при } \theta > \tau/\omega \end{cases} \quad (15)$$

β_n — корни уравнения

$$J_1(\beta_n R) Y_1(\beta_n) - J_1(\beta_n) Y_1(\beta_n R) = 0 \quad (16)$$

$J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1$) — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода порядка ν .

При $\xi = 1$, используя рекуррентную формулу [8]

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = 2/\pi x \quad (17)$$

выражение для понижения давления на стенке скважины, разрабатывающей трещиновато-пористый пласт при постоянном отборе жидкости, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{2\tau}{\omega(R^2 - 1)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(1, R)}{\beta_n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_n^2 \tau}{\omega}\right)\right] - \\ & - 2 \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[(R^2 - 1)^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \theta)\right] d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$U_n(1, R) = J_1(\beta_n R) [J_1^2(\beta_n R) - J_1^2(\beta_n)]^{-1} \quad (19)$$

Формуле (18) можно придать удобный для расчетов вид, если воспользоваться соответствующей формулой для гранулярной среды [5, 6]

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{0.5 + 2\tau}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{4(R^2 - 1)^2} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

Ввиду того что в начальный момент времени ($\tau = 0$) понижение давления на забое скважины должно равняться нулю, из (20) можно составить равенство,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) = \frac{0.25}{1 - R^2} - \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{8(R^2 - 1)^2} \quad (21)$$

С учетом соотношения (21) формула (18) переписется в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{0.25 + 2\tau/\omega}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{8(R^2 - 1)^2} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \tau/\omega) - \\ & - 2 \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[\frac{1}{R^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \theta)\right] d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

Полученная формула (22), являясь точным решением задачи для замкнутого пласта, позволяет для любого момента времени вычислить величину

ну понижения забойного давления скважины, эксплуатирующей месторождение с трещиновато-пористым типом коллекторов при постоянном отборе жидкости.

Можно показать, что при $\omega = 1$ слагаемое, содержащее $g(\tau, \theta)$, обращается в нуль и формула (22) приобретает вид (20). Объяснением этому служит тот факт, что при этом значении параметра трещинной емкости ω исходная система уравнений (1) также переходит в уравнение пьезопроводности для гранулярной среды.

Переходя как и прежде от изображения к оригиналу, точное решение задачи для бесконечного трещиновато-пористого пласта можно найти в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1)}(1, \tau) = & \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp(-u^2\tau/\omega)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u^3} - \\ & - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp(-u^2\theta)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u} \end{aligned} \quad (23)$$

Если в (10) считать параметр преобразования s достаточно большим, то можно пренебречь величиной λ в выражении для S_{*1} и формула понижения забойного давления при малых значениях времени примет вид

$$\psi_2^{(1)}(1, \tau) \approx \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp(-u^2\tau/\omega)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u^3} \quad (24)$$

Выражение (24) отличается от точной формулы для гранулярной среды лишь множителем ω^{-1} при показателе экспоненты.

Следует отметить, что в работе [3] получены асимптотические решения рассматриваемых задач, пригодные при достаточно больших значениях времени. При этом в формулах (10) и (11) авторами были использованы приближенные выражения функций Бесселя от мнимого аргумента, что облегчило переход к оригиналу. Эти решения имеют вид [3]

$$\psi_2^{(1)}(1, \tau) \approx 0.5 \left\{ \ln \tau + 0.809 + Ei \left[\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)} \right] - Ei \left(\frac{-\lambda\tau}{1-\omega} \right) \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) \approx & \frac{2}{R^2 - 1} \left\{ \frac{1}{4} + \tau + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left[1 - \exp \left(\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)} \right) \right] \right\} + \\ & + 0.25(R^2 - 1)^{-2} [(4 \ln R - 3)R^4 + 2R^2 + 1] \end{aligned} \quad (26)$$

$Ei(-x)$ — интегрально-показательная функция [9].

При $\omega = 1$ или же $\lambda \rightarrow \infty$ эти решения переходят к соответствующим формулам для гранулярных сред [5, 6]

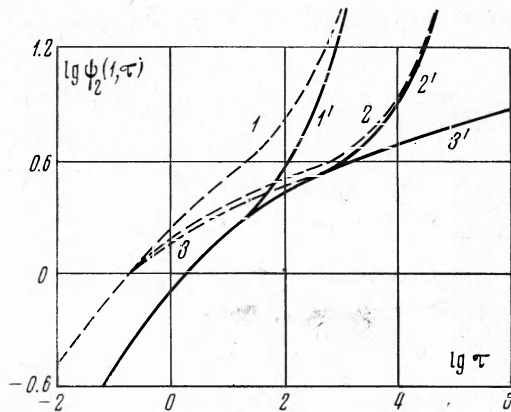
$$\psi_2^{(1)}(1, \tau)|_{\omega=1} \approx 0.5 \ln \tau + 0.4045 \quad (27)$$

$$\psi_2^{(2)}(1, \tau)|_{\omega=1} \approx \frac{0.5 + 2\tau}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3)R^4 + 2R^2 + 1}{4(R^2 - 1)^2} \quad (28)$$

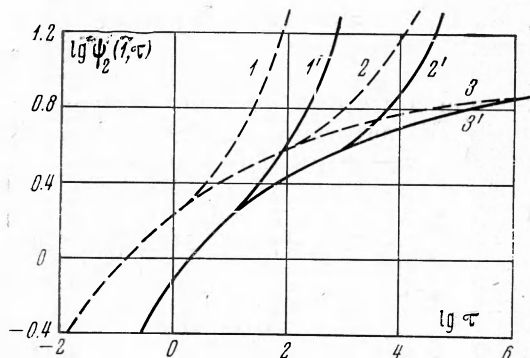
Формулы (20), (24), (27) и (28), выражающие зависимость понижения забойного давления от времени для гранулярных сред, широко известны в нефтяной подземной гидродинамике и протабулированы в достаточно большом диапазоне изменения времени [5, 6]. Такие зависимости построены сплошными линиями 1' и 2' на фиг. 1 и 2 для различных месторождений, непроницаемые внешние контуры которых равны 10 и 50 единицам безразмерного радиуса R . Пунктирные линии 1 и 2 этих фигур соответствуют месторождениям с трещиновато-пористыми типами коллекторов при

тех же значениях радиуса R . Расчеты произведены по формулам (22) и (26) при $\omega = 0.1$ для обеих фигур и $\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-6}$ соответственно для фиг. 1 и 2.

Кривые 3 и $3'$, являясь огибающими вышеуказанных кривых, описывают временное изменение понижения забойного давления для скважин в неограниченных по протяженности месторождениях соответственно с трещиновато-пористыми и гранулярными типами коллекторов. Участки этих кривых после ответвления рассчитывались по формулам (23) и (25),



Фиг. 1



Фиг. 2

причем до начала ответвления точные формулы (22) и (23), соответствующие замкнутому и бесконечному пластам, хорошо согласуются между собой.

Результаты вычислений при различных значениях параметров ω и λ для бесконечного пласта в полулогарифмических координатах приведены на фиг. 3 и 4. Кривые $3'$ этих фигур соответствуют таковым на фиг. 1 и 2. Кривые 4 и 5 отличаются принятым значением параметра ω , равного 0.1 и 0.01 соответственно. Различие же фиг. 3 и 4 заключается в значении параметра λ , равного $5 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-6}$ соответственно.

Кривые 4 и 5 (фиг. 3 и 4) подтверждают двухслойность характера изменения кривых понижения забойных давлений в скважинах в трещиновато-пористом пласте при фиксированных значениях параметров ω и λ .

Заметим, что на начальном прямолинейном участке кривых 4 и 5 (фиг. 3 и 4) наблюдается согласованность точной и асимптотической формул (23) и (25).

Из анализа кривых всех приведенных фигур можно сделать

следующие выводы относительно движения жидкости к центральной скважине в трещиновато-пористых пластах при нестационарной фильтрации:

1) понижение забойного давления скважины в трещиновато-пористом пласте больше или равно таковому для гранулярного при одинаковом значении времени;

2) уменьшение параметра трещинной емкости ω понижает забойное давление, и по мере роста времени эксплуатации это понижение становится равным понижению давления в случае гранулярной среды, когда обе среды являются не ограниченными по протяженности. При этом на время выравнивания существенное влияние оказывает величина параметра λ , характеризующего степень затрудненности обмена жидкости между системами блоков и трещин среды (кривые 3, 4 и 5);

3) зависимость от времени понижения забойного давления скважины в бесконечном пласте отличается от таковой для гранулярной на вели-

