

УДК 539.371: 532.546

**ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ, НАСЫЩЕННОЙ ФЛЮИДАМИ**

**О. Б. Бочаров<sup>1</sup>, В. Я. Рудяк<sup>2</sup>, А. В. Серяков<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Новосибирский технологический центр компании Baker Hughes,  
просп. Кутателадзе, 4а, 630128, г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Ленинградская, 113, 630008, г. Новосибирск, Россия*

Анализируется совместная модель двухфазного течения в пористой среде и деформирования порового пространства. Модель включает в себя уравнения переноса компонент среды (флюида и пористого скелета), полученные на основе законов сохранения, условия совместности деформирования и замыкающие уравнения в форме обобщенного закона Гука. Показано, что система определяющих уравнений содержит ряд малых параметров, разложение по которым позволяет построить иерархическую последовательность моделей, соответствующих определенным условиям деформирования среды. В явном виде выписаны модели нулевого и первого приближения. Установлено, что в случае несжимаемости компактных фаз уравнения первого приближения переходят в систему, аналогичную модели Баклея – Леверетта, но с учетом изменения порового пространства. Уравнения нулевого приближения описывают поведение пористой среды при условии сохранения объема. В данном случае уравнение на поровое давление отделяется от системы уравнений для упругого скелета. Для модели нулевого приближения построены аналитические решения в цилиндрических координатах, характеризующиеся наличием сдвиговых напряжений, способных вызвать разрушение.

*Пороупругость, теория смесей, метод масштабов, насыщенная пористая среда, совместная модель, среда с сохранением объема, аналитические решения*

**ВВЕДЕНИЕ**

Насыщенные флюидом пористые среды являются одними из самых распространенных объектов на Земле. С ними сталкиваются при изучении описания разных природных явлений и технологических процессов: например, задачи о движении грунтовых вод, дегазации и расчленения угольных пластов, геотектоники при исследовании проседания земной коры, бурении и эксплуатации продуктивных коллекторов в нефте- и газодобывающей отрасли, о динамике различных пористых покрытий, находящихся в воздушной или жидкостной среде. Этот список можно продолжить. Сложность создания последовательной теории, описывающей механику совместного деформирования пористого скелета и течения в нем различных флюидов (жидкости или газа), определяется наличием двух (или даже нескольких) сред с существенно различающимися механическими свойствами. Такая теория активно развивается начиная с 40-х годов прошлого столетия. Впервые совместная модель деформирования насыщенной флюидом пористой среды предложена Био в 1941 г. [1]. Практически одновременно и независимо близ-

кая теория была развита Френкелем [2]. Модель пороупругой среды Био применялась позднее самим автором для решения задач распространения в насыщенной пористой среде акустических возмущений. В дальнейшем аналогичные задачи в различных постановках рассматривались в публикациях [3, 4]. Здесь существенное продвижение наметилось после появления известной работы [5].

Очевидным шагом обобщения пороупругой теории Био является учет двухфазности течения. В середине прошлого столетия такое обобщение сделал Брутсаерт [6], который предложил уравнения модели в предположении неравного давления жидкости в фазах. В 80-х годах Бэрриман рассмотрел пороупругую модель с единым давлением в фазах [7]. В наиболее общем виде уравнения подобной модели деформирования пористой среды с двумя флюидами представлены в работе [8]. Последняя, при некоторых дополнительных предположениях, сводится к модели Бэрримана, а при условии насыщения одной жидкостью — к модифицированной теории Био [9]. В качестве приложений линеаризованные пороупругие модели [6–8] использовались при изучении различных акустических процессов [10].

Необходимость решения именно акустических задач, описанных в большинстве цитированных работ, предъявляла вполне определенные требования к развиваемым там моделям. В частности, проводились различные процедуры линеаризации получаемых уравнений. Это привело к тому, что в уравнениях, с одной стороны, сохранялись внепорядковые члены, а с другой — отбрасывались достаточно большие члены, учитывать которые не было нужды при решении акустических задач. При анализе напряженно-деформированного состояния вокруг горных выработок или скважин акустического приближения обычно недостаточно — необходимо учитывать нелинейность уравнений и неоднородность свойств среды [11]. Для того чтобы последовательно сделать это, следует провести детальный анализ уравнений пороупругости, описывающих совместное деформирование насыщенной флюидом пористой среды. Это и стало целью данной работы.

Рассматривается модель, которая включает уравнения переноса компонент среды (флюидов и пористого скелета), полученные на основе законов сохранения, условия совместности деформирования и замыкающие уравнения в форме обобщенного закона Гука. Показано, что такая система уравнений содержит ряд малых параметров, разложение по которым позволяет построить иерархическую последовательность моделей, соответствующих определенным условиям деформирования среды. Установлено, что даже в нулевом приближении получается вполне содержательная пороупругая модель, которая в предположении несжимаемости составляющих фаз описывает деформирование с сохранением объема. В данном приближении уравнения фильтрации отделяются от уравнений для определения деформаций скелета, что существенно упрощает систему уравнений и позволяет построить ее аналитическое решение. Так, для системы уравнений, записанной в цилиндрической системе координат, найдены классы решений с двумя ненулевыми компонентами перемещения. Показано, что для данных решений касательные напряжения не равны нулю и потенциально могут вызывать разрушения среды.

#### **МОДЕЛЬ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ**

Система уравнений для описания динамики пороупругой, насыщенной флюидом среды выводится на основе механики многофазных сред многожидкостного континуума [12–15]. Она содержит законы сохранения импульса и массы каждой фазы. В общем случае компоненты среды описываются своим набором макроскопических переменных. В дальнейшем рассматриваются среды без фазовых превращений, но трехкомпонентные: первый компонент — твердый пористый скелет — будет в дальнейшем обозначаться индексом  $s$ , два других компонента яв-

ляются флюидами. В принципе это может быть и жидкость, и газ. Для определенности в данной работе рассматриваются две жидкие фазы, например вода, которой соответствует индекс  $w$ , и нефть — индекс  $o$ . Все среды не имеют внутренних вращений, причем фактически рассматривается изотермический режим, когда все компоненты имеют одинаковую температуру  $T$ . В этом случае закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad i = o, w, s, \quad (1)$$

здесь  $\rho_i$  — плотность компонента  $i$ ,  $\rho_s = \alpha_s \rho_s^c$ ,  $\rho_w = \alpha_w \rho_w^c$ ,  $\rho_o = \alpha_o \rho_o^c$  — парциальные плотности, где  $\rho_i^c$  — плотность чистой фазы;  $\mathbf{v}_i = \partial \xi_i / \partial t$  — ее скорость, где  $\xi_i = \alpha_i^{-1} S^{-1} \int \xi_i' \chi_i dS$  — среднее перемещение соответствующего компонента,  $\xi_i'$  — ее истинные перемещения,  $\chi_i$  — характеристическая функция наличия  $i$ -го компонента в данной точке пространства,  $S$  — площадь двумерного сечения физического пространства,  $\alpha_i = V_i / V$ ,  $V_i$  — объемные концентрации компонента  $i$ , а  $V_i$  — занятый им объем пространства  $V$ .

Законы сохранения импульса жидких фаз и насыщенной пороупругой системы в целом записываются так:

$$\frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) = \operatorname{div}(\alpha_i \boldsymbol{\sigma}^i) - \sum_{k \neq i} r_{ik} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^i) \nabla \alpha_i + \rho_w \mathbf{g}, \quad i = o, w, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=o,w,s} \rho_i \mathbf{v}_i \right) + \nabla \left( \sum_{i=o,w,s} \rho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i \right) = \operatorname{div} \mathbf{G} + \rho \mathbf{g}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho = \sum_i \rho_i$ ,  $r_{ik}$  — коэффициенты межфазного взаимодействия;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\boldsymbol{\sigma}^i$  — тензор напряжений в  $i$ -й фазе, а  $\mathbf{E}$  — единичный тензор. Полный тензор напряжений среды равен суперпозиции парциальных:  $\mathbf{G} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\sigma}^i$ .

Следуя обобщенному закону Дарси [16], коэффициенты межфазного взаимодействия жидких компонентов и скелета можно представить в виде  $r_{is} = \alpha_i^2 \mu_i / (k f_i)$ ,  $\mu_i$  — коэффициент сдвиговой вязкости компонента  $i$ ,  $f_i(\alpha_i)$  — относительные фазовые проницаемости,  $k$  — проницаемость пористой среды. Третий член в правой части уравнения (2) — это сила Жуковского–Рахматулина, моделирующая реакцию скелета и другой жидкой фазы как геометрическую связь.

Уравнения (1)–(3) не замкнуты. Для их замыкания следует ввести еще уравнения состояния и определяющие соотношения. Термодинамические парциальные уравнения состояния компонентов имеют вид

$$\rho_i = \rho_i(p_i, T), \quad (4a)$$

где  $p_i = -(1/3) \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^i$  — парциальные давления. Жидкости предполагаются ньютоновскими, поэтому определяющие уравнения для жидких фаз имеют обычный вид:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = (-p_i + \lambda_i \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i) \mathbf{E} + 2\mu_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^T], \quad (4б)$$

здесь  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$  — тензор скоростей деформации  $i$  фазы;  $\lambda_i$  — коэффициент объемной вязкости. В дальнейшем будем считать парциальные давления одинаковыми и равными  $p$ . Индекс  $T$  означает транспонированный тензор.

Пористый скелет рассматриваем как изотропное линейно-упругое тело, подчиняющееся закону Гука:  $\boldsymbol{\sigma}^s = \lambda_s \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s) \mathbf{E} + 2\mu_s \boldsymbol{\varepsilon}^s$  с константами  $\lambda_s$  и  $\mu_s$ , где  $\boldsymbol{\varepsilon}^s$  — тензор деформаций,  $\boldsymbol{\varepsilon}^s = \frac{1}{2} [\nabla \boldsymbol{\xi}_s + (\nabla \boldsymbol{\xi}_s)^T]$ . В этом случае, используя вариационный подход Био [1] и следуя работам [7, 8], для модели с одним давлением можно записать механическое уравнение состояния системы в виде обобщенного закона Гука [8]:

$$\mathbf{G} = (\lambda_m e - C_m \zeta) \mathbf{E} + 2\mu_m \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (4\text{В})$$

где  $e = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s)$  — объемная деформация;  $\zeta = \zeta_w + \zeta_o$ ,  $\zeta_i = \text{div}[\alpha_i (\boldsymbol{\xi}_s - \boldsymbol{\xi}_i)]$  ( $i = o, w$ ) — параметр сжимаемости фазы относительно скелета. Условие совместного деформирования при этом получается таким:

$$p = M_m \zeta - C_m e. \quad (5)$$

Второе условие совместного деформирования — это условие сплошности  $\sum_i \alpha_i = 1$ .

Параметры  $\mu_m$ ,  $\lambda_m$ ,  $C_m$ ,  $M_m$  не определяются в рамках механики сплошной среды. Обычно их берут из эксперимента [17–19], но их можно определить из первых принципов методами неравновесной статистической механики, как это сделано для дисперсных жидкостей в [13–15]. Таким образом, получаем замкнутую совместную модель упругих деформаций скелета и течения двух вязких жидкостей с одним давлением (1)–(5). Отметим, что хотя давления жидких фаз совпадают, скорости могут быть различными.

Анализ полученной системы уравнений удобно проводить в безразмерных переменных. С этой целью введем следующие характерные для рассматриваемой системы масштабы. Пусть  $L$  — линейный масштаб задачи, а  $d$  — внутренний масштаб порового пространства, в литературе его часто выбирают пропорциональным  $\sqrt{k}$ . Характерное геомеханическое давление  $P_s^0 = \rho_s^0 gH$ , где  $H$  — глубина залегания пласта,  $\rho_s^0$  — плотность породы; характерное давление жидкостей определяется давлением внедряемого флюида (например, бурового раствора)  $P_{w,o}^0 = P_f^0 = \rho_f^0 gH$ ,  $\rho_f^0$  — плотность внедряемого флюида. Характерной скоростью является скорость фильтрации:  $V_0 = (d^2 / \mu_f L) P_0^f$ , характерное время тогда определяется соотношением  $T_0 = L / V_0 = \mu_f L^2 / (P_0^f d^2)$ , здесь  $\mu_f$  — коэффициент вязкости внедряемого флюида. Размерные переменные (с волной) в этом случае связаны с безразмерными соотношениями:  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_s = d \boldsymbol{\xi}_s$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = L \boldsymbol{\xi}_i$ ,  $\tilde{\mu}_i = \mu_f \mu_i$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = P_f^0 \boldsymbol{\sigma}_i$ ,  $\tilde{\rho}_i = \rho_f^0 \rho_i$ ,  $i = w, o$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = L \mathbf{x}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s = P_s^0 \boldsymbol{\sigma}_s$ ,  $\tilde{\rho}_s = \rho_s^0 \rho_s$ . Переходя в уравнениях (1)–(3) к указанным безразмерным переменным, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) &= 0, \quad i = o, w, \quad c_\rho \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + c_\rho \delta \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \\ N_p \delta^4 \frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + N_p \delta^4 \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) &= \text{div}\{\alpha_i [(-p_i + \delta^2 \lambda_i \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^i) \mathbf{E} + \delta^2 \mu_i \boldsymbol{\varepsilon}^i]\} - \\ - \sum_{k \neq i} r_{ik} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^i) \nabla \alpha_i + N_p \delta^4 \rho_i \mathbf{g}, \quad i &= o, w, \quad k = o, w, s, \end{aligned} \quad (6)$$

$$N_p \delta^4 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \mathbf{v}_w + \rho_o \mathbf{v}_o + c_p \delta \rho_s \mathbf{v}_s) + N_p \delta^4 \nabla \left( \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i + c_p \delta^2 \rho_s \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \right) = \operatorname{div} \mathbf{G} + N_p \delta^4 (\rho_w + \rho_o + c_p \rho_s) \mathbf{g}, \quad i = o, w,$$

где введены безразмерные комплексы:  $\delta = d/L$ ,  $c_p = P_s^0/P_f^0$ ,  $c_p = \rho_s^0/\rho_f^0$ ,  $N_p = \rho_f^0 P_f^0 L^2 / \mu_f^2$ . Обобщенный закон Гука и условия совместного деформирования в безразмерных переменных принимают вид

$$\zeta = \operatorname{div}[\alpha_w(\delta \xi_s - \xi_w)] + \operatorname{div}[\alpha_o(\delta \xi_s - \xi_o)], \quad (7)$$

$$\mathbf{G} = \{c_p \lambda_m e \mathbf{E} + c_p 2\mu_m \boldsymbol{\varepsilon}^s + C_m \zeta \mathbf{E}\} \equiv \boldsymbol{\sigma}^f - B \mathbf{E} p, \quad p = \{C_m e + M_m \zeta\}, \quad (8)$$

здесь  $\boldsymbol{\sigma}^f = (c_p \lambda_m - C_m^2) e \mathbf{E} + c_p 2\mu_m \boldsymbol{\varepsilon}^s$ ;  $B = C_m / M_m$  — аналог параметра Био–Виллиса [19].

### МОДЕЛИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЙ

Так как параметр  $\delta$  в общем случае много меньше единицы, то можно выделить последовательность моделей, получаемых сохранением в уравнениях (6) членов нулевого порядка по  $\delta$ , первого и т. д. Рассмотрим последовательно первые две модели в этой иерархии.

Уравнения баланса массы жидких фаз не зависят от  $\delta$ . Из уравнения сохранения массы скелета в нулевом приближении получаем  $\rho_s = \rho_s^0$ . Поскольку данная работа выполняется в рамках линейной теории упругости, изменение плотности пористой среды можно представить через инварианты тензора деформаций:  $\rho_s = \rho_s^0(1 - \varepsilon_1^s)$ , где  $\varepsilon_1^s = \varepsilon_{ii}^s = \operatorname{div} \xi_s$ . Это приводит к сохранению объема твердой фазы:  $\operatorname{div} \xi_s = 0$ . Законы сохранения импульса для жидких фаз в нулевом приближении приводят к обобщенному закону Дарси [16]. Уравнение импульса для системы в целом переходит в уравнение статики. Обобщенный закон Гука и условия совместного деформирования несколько упрощаются. В итоге модель среды нулевого приближения по  $\delta$  принимает вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad i = o, w, \quad \alpha_i \mathbf{v}_i = -\frac{k f_i}{\mu_i} \nabla p, \quad i = o, w, \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = 0, \quad \mathbf{G} = c_p 2\mu_m \boldsymbol{\varepsilon}^s + C_m \zeta \mathbf{E}, \quad p = M_m \zeta, \quad \zeta = -\operatorname{div}(\alpha_w \xi_w) - \operatorname{div}(\alpha_o \xi_o).$$

В первом приближении законы сохранения массы упрощений не претерпевают. Из законов сохранения импульса следует, что движение жидкостей относительно скелета опять подчиняется обобщенным законам Дарси, но уже с учетом деформаций скелета:

$$\alpha_i (\mathbf{v}_i - \delta \mathbf{v}_s) = -\frac{k f_i}{\mu_i} \nabla p, \quad i = o, w.$$

Уравнение импульса для смеси снова переходит в уравнение статики. Определяющие уравнения (7), (8) остаются без изменений. В итоге модель первого приближения по  $\delta$  имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad i = o, w, \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \delta \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0,$$

$$\alpha_i (\mathbf{v}_i - \delta \mathbf{v}_s) = -\frac{k f_i}{\mu_i} \nabla p, \quad i = o, w, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{G} = c_p \lambda_m e \mathbf{E} + c_p 2\mu_m \boldsymbol{\varepsilon}^s - C_m \zeta \mathbf{E}, \quad p = -C_m e + M_m \zeta,$$

$$\zeta = \operatorname{div}[\alpha_w(\delta \xi_s - \xi_w)] + \operatorname{div}[\alpha_o(\delta \xi_s - \xi_o)].$$

### КВАЗИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ВОКРУГ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ФЛЮИДА

Рассмотрим для нулевого приближения случай, когда проницаемость, пористость  $m = V_p / V$  ( $V_p$  — объем пор) и концентрации компонентов не зависят от пространственной переменной  $m_0(x) = m_0^0$ ,  $k = k_0$ ,  $\alpha_i = \text{const}$ ,  $i = o, w$ . В результате уравнение для давления принимает вид  $\Delta p = 0$ . Таким образом, в этом случае уравнения гидродинамики отделяются от уравнений деформирования скелета и могут быть решены независимо. Используя методику представления уравнений равновесия теории упругости в перемещениях через вектор вращений  $\boldsymbol{\omega}$  [20], систему (9) можно записать так:

$$\Delta p = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -A \nabla p, \quad \nabla \times \boldsymbol{\xi}_s = \boldsymbol{\omega}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_s = 0, \quad (11)$$

здесь  $A = B / \mu_m$ . Это переопределенная эллиптическая система. Аналогичные системы возникают в гидродинамике, и их разрешимость изучалась в [21].

Поведение материала в данном приближении характеризуется сохранением объема скелета среды. Подобный режим деформирования упомянут в [22–25] как один из режимов, при котором уравнение на поровое давление отделяется от уравнений на деформирование скелета. Однако при построении решения для несвязанных задач в [22, 25] используется система уравнений пороупругости, в которой остаются члены ненулевого порядка по  $\delta$  и, кроме того, рассматривается одномерное приближение, в котором отсутствуют сдвиговые деформации и напряжения. В общем случае система (11) допускает наличие сдвиговых характеристик деформирования.

Рассмотрим систему (11) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Решение будем искать в виде:  $\xi_r = u(r, \varphi)$ ,  $\xi_\varphi = v(r, \varphi)$ ,  $\xi_z = w(r, \varphi)$ . Назовем это квазиплоской деформацией в отличие от плоской, при которой  $w(r, \varphi) \equiv 0$ , и антиплоской, при которой  $u = v = 0$ ,  $w(r, \varphi) \neq 0$ . Данная задача, по сути, является суперпозицией двух последних. Система уравнений для перемещений с учетом  $e = \text{div} \boldsymbol{\xi}_s = 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = -rA \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = \frac{A}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] = -rA \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (14)$$

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \quad (15)$$

Задача для  $w$  (уравнение (14)) отделилась, и далее мы ее не рассматриваем. Необходимое и достаточное условие разрешимости системы (12), (13) сводится к гармоничности давления по переменным  $r, \varphi$ . Так как давление является гармонической функцией по всем трем переменным, то приходим к гидростатическому распределению давления вдоль оси  $z$ . Выразив из (15) смешанную производную для  $rv$ , получим из (12) эллиптическое уравнение второго порядка для  $u$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2 A \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Из (13) следует, что для  $v$  также получается эллиптическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2(rv)}{\partial \varphi^2} = \frac{A}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

При его выводе использовано соотношение, следующее из уравнения (15):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right).$$

Возьмем гармоническую функцию для давления в общем виде:

$$p = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) + \frac{1}{r^n} (C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi).$$

После несложных, но громоздких вычислений можно получить решения для перемещений в виде суммы частного решения, соответствующего давлению  $u_p$ ,  $v_p$ , и общего решения однородных уравнений  $u_0$ ,  $v_0$ :

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{An}{(1+n)} r^{n+1} (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) - A \frac{n}{(1-n)} \frac{1}{r^{n-1}} (C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi), \\ u_0 &= \frac{C_7}{r} + \frac{1}{r^{k+1}} (D_1 \cos(k\varphi) + D_2 \sin(k\varphi)) + r^{m-1} (D_3 \cos m\varphi + D_4 \sin m\varphi), \\ v_p &= A \frac{(n+2)}{(1+n)} r^{n+1} [C_2 \cos n\varphi - C_1 \sin n\varphi] - A \frac{(n-2)}{(1-n)} \frac{1}{r^{n-1}} [C_3 \sin n\varphi - C_4 \cos n\varphi], \\ v_0 &= \frac{1}{r^{k+1}} (D_1 \sin(k\varphi) - D_2 \cos(k\varphi)) + r^{m-1} (-D_3 \sin m\varphi + D_4 \cos m\varphi) + rC_5 + \frac{C_6}{r}. \end{aligned}$$

Здесь  $C$  и  $D$  с индексами — произвольные постоянные, а  $n$ ,  $m$ ,  $k$  — целые числа. Прямые вычисления показывают, что данное решение удовлетворяет уравнению (15). Нетрудно также подсчитать, что сдвиговые напряжения в этом решении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^f &= \mu_m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right) = \frac{Bn}{2} r^n (-C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) + \frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} (-C_3 \sin n\varphi + C_4 \cos n\varphi) + \\ &+ \frac{2\mu_m(k+1)}{r^{k+2}} (-D_1 \sin(k\varphi) + D_2 \cos(k\varphi)) + 2\mu_m(m-1)r^{m-2} (-D_3 \sin m\varphi + D_4 \cos m\varphi) - \frac{2\mu_m C_6}{r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, касательные напряжения в данном решении ненулевые. Так как ограничений на  $n$  нет, то само решение обладает достаточно большим произволом для его использования в прикладных задачах путем разложения граничных условий в ряд Фурье.

В качестве примера рассмотрим решения для порового давления и напряжений, в которых члены ряда уменьшаются с увеличением радиуса.

Исследуем две задачи, соответствующие разным граничным условиям на контуре скважины ( $r = r_b$ ). Для первой задачи будем предполагать, что нагрузка на твердую составляющую породы на контуре скважины отсутствует, а поровое давление равно давлению бурового раствора. В данном случае деформации скелета будут возникать только вследствие фильтрационного течения в порах. Конечно, подобная ситуация достаточно специфична, поскольку трудно себе представить давление бурового раствора, влияющее только на фильтрацию без нагрузки на скелет. Однако представленный случай дает возможность выделить в общем решении с множеством произвольных констант составляющую, отвечающую только за фильтрацию флюида.

Итак, напряжения на контуре равны нулю:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при } r = r_b.$$

Предположим, что давление бурового раствора представляет собой периодическую функцию, что вполне естественно в реальных условиях вследствие, например, образования неоднородной по углу корки бурового раствора или прецессии буровой колонны. На границе поровое давление и давление бурового раствора равны:

$$p = \frac{1}{r^n} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi) \quad \text{при } r = r_b.$$

Напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr} = -\frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi) - \frac{2GC_2^0}{r^2} - \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}} (D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi) + \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}} (D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi) + \frac{2GC_2^0}{r^2},$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} (-C_{3n} \sin n\varphi + C_{4n} \cos n\varphi) + \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}} (-D_{1n} \sin n\varphi + D_{2n} \cos n\varphi) - \frac{2GC_4^0}{r^2}.$$

Положим  $C_2^0 = C_4^0 = 0$  и удовлетворим граничным условиям. В итоге для коэффициентов  $D_{in}$

$$D_{1n} = -\frac{Bnr_b^2}{4G(n+1)} C_{3n}, \quad D_{2n} = -\frac{Bnr_b^2}{4G(n+1)} C_{4n}.$$

Окончательно напряжения представляются следующими функциями:

$$\sigma_{rr} = -\frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{Bn}{2} \frac{1}{r^n} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_{3n} \sin n\varphi - C_{4n} \cos n\varphi).$$

Для определенности выберем одну гармонику в решении, соответствующую  $n = 3$ , и определим интенсивность напряжений в этом случае:

$$p = \frac{1}{r^3} (C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi),$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{3B}{2} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3B}{2} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi),$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{3B}{2} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) (C_3 \sin 3\varphi - C_4 \cos 3\varphi).$$



Заметив, что  $\sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{rr}$ , вычислим интенсивность сдвиговых напряжений

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{I_2(\sigma^d)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6\sigma_{rz}^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{rz}^2} = \frac{3B}{2} \frac{1}{r^3} \left( 1 - \frac{r_b^2}{r^2} \right) \sqrt{C_3^2 + C_4^2}. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим пористую среду вокруг цилиндра радиусом 0.1 м (это характерный радиус буровой скважины), и пусть коэффициенты  $C_i$  имеют амплитуду 1 МПа, коэффициент  $B$  одного порядка с коэффициентом Био – Виллиса, что для высокопористых песчаников составляет 0.8. Распределение интенсивности напряжений в плоскости  $xу$ , ортогональной оси скважины, представлено на рис. 1.

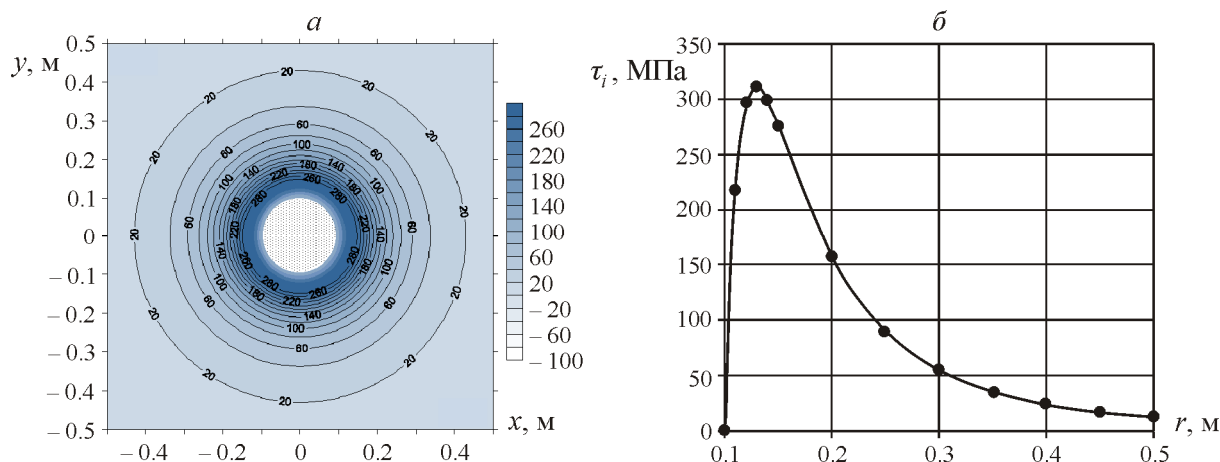


Рис. 1. Распределение функции интенсивности напряжений  $\tau_i$ , для цилиндрического решения при  $n = 3$  в плоскости  $xу$  (а) и зависимость  $\tau_i$  от радиуса  $r$  (б)

Отметим, что функция  $\tau_i$  является немонотонной по  $r$ . Так, максимальная интенсивность напряжений достигается не на стенке скважины, а на некотором расстоянии от нее, в данном примере  $r^* = r_b (5/3)^{0.5}$  (рис 1б).

Сходная немонотонность в поведении напряжений ранее получалась при решении порупругих задач вблизи скважины с помощью численных методов [26].

В качестве второго примера рассмотрим теперь противоположную физическую ситуацию: пусть гармоническое давление в скважине воздействует только на твердую составляющую породы, не продуцируя при этом фильтрацию. При таких условиях поле порового давления в среде остается невозмущенным, поэтому приращение давления  $p = 0$ .

Для эффективных напряжений скелета на контуре скважины получаем задачу

$$\sigma_{rr} = -p_b = -\frac{1}{r_b^n} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi) \quad \text{при } r = r_b.$$

Исходя из того, что при отсутствии изменения порового давления имеем формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2GC_2^0}{r^2} - \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}} (D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}} (D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi) + \frac{2GC_2^0}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{2G(n+1)}{r^{n+2}}(-D_{1n} \sin n\varphi + D_{2n} \cos n\varphi) - \frac{2GC_4^0}{r^2},$$

с учетом граничного условия приходим к уравнению

$$\sigma_{rr}|_{r=r_b} = -\frac{2G(n+1)}{r_b^{n+2}}(D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi) = -\frac{1}{r_b^n}(C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi).$$

Тогда получаем связи  $D_{1n} = \frac{r_b^2}{2G(n+1)}C_{3n}$ ,  $D_{2n} = \frac{r_b^2}{2G(n+1)}C_{4n}$

и окончательный вид решения:

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{r^n} \frac{r_b^2}{r^2} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^n} \frac{r_b^2}{r^2} (C_{3n} \cos n\varphi + C_{4n} \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^n} \frac{r_b^2}{r^2} (-C_{3n} \sin n\varphi + C_{4n} \cos n\varphi).$$

Рассмотрим, как и ранее, частный случай  $n = 3$ , и вычислим интенсивность напряжений

$$\tau_i = \sqrt{J_2(D_\sigma)} = \frac{1}{r^3} \frac{r_b^2}{r^2} \sqrt{C_3^2 + C_4^2}.$$

Сравнение решений двух задач показывает, что влияние фильтрации на напряжения в скелете проявляется, в частности, в немонотонности распределения интенсивности напряжений. Разделив интенсивность напряжений, полученную в первой задаче, на интенсивность напряжений во второй, будем иметь

$$\kappa = \frac{\tau_i^I}{\tau_i^{II}} = \frac{3B}{2} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2}\right) \sqrt{C_3^2 + C_4^2} / \frac{1}{r^3} \frac{r_b^2}{r^2} \sqrt{C_3^2 + C_4^2} = \frac{3B}{2} \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1\right).$$

Согласно данной формуле, при учете фильтрации интенсивность касательных напряжений при удалении от скважины может существенно превысить значения, полученные без учета течения жидкости.

#### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Рассмотрим уравнения (11) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ;  $r^2 = x^2 + y^2$ . Решение будем искать в виде:  $\xi_r = u(r, z)$ ,  $\xi_\varphi = 0$ ,  $\xi_z = w(r, z)$ ,  $p = p(r, z)$  и используем метод разделения переменных. Для давления как гармонической функции вида  $p = R_p(r)Z_p(z)$  получим задачи

$$Z_p'' = \lambda^2 Z_p, \quad R_p'' + \frac{R_p'}{r} + \lambda^2 R_p = 0,$$

где  $\lambda$  — константа разделения переменных,  $Z_p(z) = C_{kp} \exp(\pm \lambda z)$ , а штрих обозначает дифференцирование функции одной переменной по своему аргументу. После замены переменной  $x = \lambda r$  второе уравнение переходит в уравнение Бесселя нулевого порядка. Его общим решением является цилиндрическая функция нулевого порядка, выражаемая через функции Бесселя ну-

левого порядка первого  $J_0$  и второго  $Y_0$  рода:  $R_p(x) = C_{1p}J_0(x) + C_{2p}Y_0(x)$ . Здесь  $C_{1p}$ ,  $C_{2p}$  — произвольные постоянные, поэтому можно положить  $C_{kp} \equiv 1$ . Уравнение несжимаемости среды в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0.$$

Его можно удовлетворить введением “функции тока”  $\psi$ :

$$ru = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad rw = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

В нашей задаче вектор вращения будет иметь только одну ненулевую компоненту

$$\omega_\varphi \equiv \omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (16)$$

В этом случае подсистема уравнений для вихря редуцируется к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \omega = A \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) = -Ar \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (17)$$

Если представить функции  $u$ ,  $w$ ,  $\omega$ ,  $\psi$  в виде  $f(r, z) = R_f(r)Z_f(z)$ , то разделение переменных в системе (16), (17) возможно при выполнении соотношений

$$Z_u = C_u Z_p, \quad Z_w = C_w Z'_p, \quad Z_\omega = C_\omega Z'_p, \quad Z_\psi = C_\psi Z_\omega, \quad R_\omega = R'_p, \quad C_\omega = A/\lambda^2.$$

В этом случае для всех функций  $Z_f(z)$  будет выполнено уравнение  $Z''_f = \lambda^2 Z_f$ , здесь  $C_u$ ,  $C_w$ ,  $C_\psi$  — пока произвольные константы разделения переменных. При этом

$$R_u = \frac{\lambda_u}{r} R_\psi, \quad R_w = \frac{\lambda_w}{r} R_\psi,$$

где  $\lambda_u = \frac{\lambda^2 C_\omega C_\psi}{C_u} = \frac{A C_\psi}{C_u}$ ,  $\lambda_w = -\frac{A C_\psi}{\lambda^2 C_w}$ .

Таким образом, задача сводится к определению функции  $R_\psi(r)$ . Для функции  $V(x) = R_\psi(x)/x$ ,  $x = \lambda r$ , из уравнения (16) получаем неоднородное уравнение Бесселя первого порядка

$$V'' + \frac{1}{x} V' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) V = \frac{R_\omega(r)}{C_\psi \lambda^3} = \frac{R'_p(x)}{C_\psi \lambda^2} \equiv f(x).$$

Правая часть этого уравнения, как производная функций Бесселя (цилиндрической функции) нулевого порядка, является функцией Бесселя первого порядка. Общее решение этого уравнения представляется через функции Бесселя первого и второго рода первого порядка и частное решение неоднородного уравнения в виде [27]

$$V(x) = C_{1v} J_1(x) + C_{2v} Y_1(x) + \frac{\pi}{2} V_p(x),$$

$$V_p(x) = Y_1 \int x J_1 f(x) dx - J_1 \int x Y_1 f(x) dx.$$

Так как имеют место соотношения [28]

$$R'_p(x) = -C_{1p} J_1(x) - C_{2p} Y_1(x), \quad \int x Y_1^2 dx = \frac{x^2}{2} (Y_1^2 - Y_0 Y_2), \quad \int J_1 dx = -J_0, \quad \int Y_1 dx = -Y_0,$$

$$\int x J_1^2 dx = \frac{x^2}{2} \left( J_0 - \frac{J_1}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} (x^2 - 1) J_1^2, \quad \int x J_1 Y_1 dx = \frac{x^2}{4} [2J_1 Y_1 - J_2 Y_0 - J_0 Y_2],$$

то решение записывается через известные табулированные функции Бесселя в виде

$$V_p(x) = \frac{C_{1p}x^2}{4\lambda^2 C_\psi} (Y_0 J_1 J_2 + J_1 Y_2 J_0 - 2Y_1 J_2 J_0) - \frac{C_{2p}x^2}{4\lambda^2 C_\psi} (Y_0 Y_1 J_2 + Y_1 Y_2 J_0 - 2Y_0 Y_2 J_1).$$

Для перемещений получаем:

$$u_\lambda = R_u Z_u = A\lambda C_\psi \exp(\pm\lambda z) V(\lambda r, \bar{C}_v, \bar{C}_p),$$

$$w_\lambda = R_w Z_w = \pm A\lambda C_\psi \exp(\pm\lambda z) V(\lambda r, \bar{C}_v, \bar{C}_p) / \lambda^2.$$

Вырожденный случай ( $\lambda = 0$ ) требует отдельного рассмотрения. В данной ситуации имеем  $p = (a + bz)(c + d \ln r)$ . Тогда из первого уравнения (17) следует, что  $r\omega = A(az + bz^2/2) + f(r)$ , а из второго —  $f(r) = -0.5Abr^2[c + d(\ln r - 0.5)] + e$ . Здесь  $a, b, c, d, e$  — произвольные постоянные. Так как  $r\omega = \varphi_1(z) + \varphi_2(r)$ , то из (16) можно получить и функцию тока в аналогичной форме  $\psi = \psi_1(z) + \psi_2(r)$ , где

$$\psi_1(z) = A(bz^4/24 + az^3/6 + e_1z^2/2 + e_{11}z + e_{12}),$$

$$\psi_2(r) = -0.5Ab[r^4(c - 5d/4 + d \ln r)/8 + 0.5r^2(e_{21} + e_2(\ln r - 0.5)) + e_{22}].$$

Здесь также  $e_i, e_{ij}$  — произвольные постоянные. Тогда для перемещений находим

$$u_0 = Ar^{-1}(bz^3/6 + az^2/2 + e_1z + e_{11}), \quad w_0 = 0.5Ab[r^2(c - d + d \ln r)/2 + e_{21} + e_2 \ln r].$$

Общее решение однородной системы (17), которое соответствует постоянному поровому давлению, имеет вид  $\omega_0 = C_0/r$ . Тогда для  $\psi_0 = Z_0(z)R_0(r)$  из (16) получим  $Z_0(z) = \text{const}$  и, как следствие,  $R_0(r) = C_0r^2(\ln r - 1) + C_{01}r^2 + C_{02}$ , т. е. решение, не связанное с поровым давлением, можно представить так:  $u_{00} = 0$ ,  $w_{00} = C_1 + C_0(2 \ln r - 1)$ . Общее решение системы (11) теперь имеет вид суммы:  $u(r, z) = u_{00} + u_0 + u_\lambda$ ,  $w(r, z) = w_{00} + w_0 + w_\lambda$ .

Напряжения через перемещения выражаются как

$$\sigma_{rr} = 2\mu_m \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu_m \frac{u}{r}, \quad \sigma_{zz} = 2\mu_m \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = \mu_m \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0.$$

Частные производные по  $z$  от перемещений находятся тривиально, а частные производные по радиусу выражаются через функцию  $V'$ :

$$\frac{dV}{dr} = \lambda \frac{dV}{dx} = \lambda \left[ C_{1v} \left( J_0 - \frac{J_1}{x} \right) + C_{2v} \left( Y_0 - \frac{Y_1}{x} \right) + \frac{\pi}{2} V'_p \right].$$

Вычисление производных функций перемещений для получения напряжений ввиду их громоздкости выполнены в системе Mathematica. В качестве примера на рис. 2 приведены распределение порового давления и интенсивности напряжений для члена ряда с  $\lambda = 1$  в функциях  $u_\lambda$ ,  $w_\lambda$  и константы  $B = 0.79$  ( $A = B/\mu_m$ ),  $C_{1p} = 1$ ,  $C_{2p} = 1$ ,  $C_\psi = 1$ ,  $C_{1v} = 1$ ,  $C_{2v} = 1$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_0 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $e_{ij} = 1$ .

Входящие в решение функции Бесселя формируют квазипериодическую по  $r$  структуру для порового давления, перемещений и соответственно напряжений. Данный факт можно наблюдать на распределении в пространстве порового давления и интенсивности напряжений (рис. 2). Графики построены для некоторого нулевого горизонта ( $z = 0$ ), который, вообще говоря, может располагаться и на глубине в несколько километров, т. е. породный массив может находиться под существенной начальной нагрузкой. Увеличивающееся с глубиной распределение порового давления мо-

жет быть интерпретировано как резкое увеличение давления на участке скважины, вызванное, например, закупоркой межтрубного пространства кусками шлама. При этом структура решения предопределяет существование дополнительных периодических областей интенсивности напряжений, формирующихся на некотором расстоянии от источника (рис. 2б). Таким образом, в достаточно хрупких пористых породах разрушение может инициализироваться не только возле источника, но и в глубине породы, образуя “периодические” волны нарушения (деструкции).

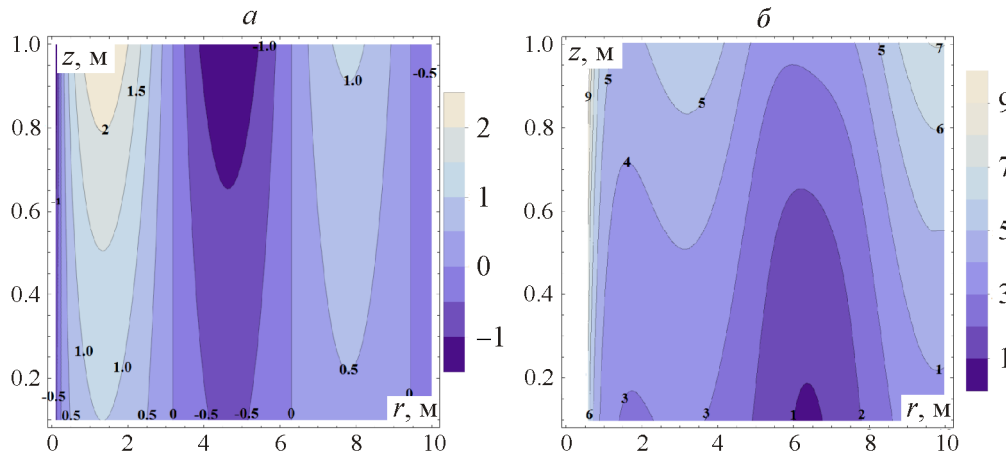


Рис. 2. Распределение порового давления по  $r$  и по  $z$  (а) и интенсивности напряжений (б), МПа

Подобные зоны деструкции отмечаются, в частности, при проходке горных выработок [29]. В пористых нефтегазовых коллекторах формирование таких периодических структур пока не наблюдалось, вероятно потому, что приборы анализа прискважинной зоны имеют малую разрешающую глубину вследствие рассеяния электромагнитных и ядерных излучений.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ вкладов различных членов с помощью теории размерности при построении различных физических моделей является стандартным методом механики. Он не только позволяет построить иерархию таких моделей для описания тех или иных процессов, но и выделяет параметры подобия, использование которых существенно облегчает само моделирование. Тем не менее последовательный анализ влияния различных членов в уравнениях двухфазной фильтрации проведен в настоящей работе впервые. Уравнения (6)–(8) содержат несколько параметров подобия:  $\delta = d/L$ ,  $c_p = P_s^0/P_f^0$ ,  $c_\rho = \rho_s^0/\rho_f^0$ ,  $N_p = \rho_f^0 P_f^0 L^2 / \mu_f^2$ . Второй параметр может существенно отличаться от единицы, например при бурении или нефтедобыче, третий практически всегда больше единицы и особенно велик, если один из флюидов является газом. Наконец, последний всегда входит в комбинации с малым параметром  $\delta$ .

В данной работе в явном виде исследованы уравнения переноса нулевого и первого приближений по  $\delta$ . Содержательными оказываются уже уравнения нулевого приближения. Они реализуют условия сохранения объема пористой среды, в результате чего гидродинамическая часть отделяется от уравнений на деформирование пористого скелета. Полученные в этом случае аналитические уравнения характеризуются двумя ненулевыми компонентами перемещения, при которых тензор напряжений имеет ненулевые внедиагональные компоненты. Данные простые модели описывают сдвиговые деформации среды, при которых могут возникать разрушения.

Уравнения первого приближения являются достаточно общими. Если принять, что  $\rho_i^c = \text{const}$ ,  $i = o, w, s$ ;  $\alpha_s = \text{const}$ , эти уравнения сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{k[\alpha_w(f_w/\mu_w) + \alpha_o(f_o/\mu_o)]\nabla p\} &= \delta \operatorname{div} \mathbf{v}_s = \delta \dot{\varepsilon}_1^s, \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \delta \operatorname{div}(\alpha_s \mathbf{v}_s) &= 0, \quad \frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \operatorname{div}(b_w \mathbf{V} + \alpha_w \delta \mathbf{v}_s) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $b_i = \kappa_i / (\kappa_1 + \kappa_2)$ ,  $\kappa_i = kf_i / \mu_w$ ,  $i = o, w$ ,  $\mathbf{V} = -k(\alpha_w f_w / \mu_w + \alpha_o f_o / \mu_o) \nabla p$ . Система уравнений двухфазной фильтрации (18) в деформируемой пористой среде является обобщением системы Баклея–Левретта [16], описывающей фильтрацию в недеформируемом скелете. Уравнение на поровое давление, а также обобщенный закон Дарси включают в себя скорости деформаций скелета. Совпадение данной системы с уравнениями классической модели Баклея–Левретта гарантируется только в случае  $\delta = 0$  либо  $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0$ ,  $\alpha_s(t = 0) = \text{const}$ , а эти условия отвечают уравнению нулевого приближения (9), где сохраняется объем твердой составляющей среды.

Как уже отмечалось, на практике для описания однофазной пороупругой среды широко используется модель, разработанная Био [1]. Интересно понять, как соотносятся рассмотренные здесь модели с теорией Био. Прежде всего заметим, что определяющие соотношения, связывающие тензор полных напряжений с деформациями и поровым давлением, используются те же, что и в [1]. Однако, чтобы получить уравнение для порового давления, соответствующее модели Био, необходимо сделать ряд дополнительных предположений. Как показано в работе [8], если рассматривать однородную пористую среду с условиями  $\nabla \rho_s^c = 0$ ,  $\nabla \rho_f^c = 0$  и предполагать пористость постоянной, из общей модели можно получить модифицированное уравнение Био на поровое давление. При выполнении указанных условий на пористость и компактные плотности модель первого приближения (10) переходит в однофазную модель [8].

Следующим интересным приближением, которое не имеет аналогов в литературе, является второе по  $\delta$  приближение. В этом случае обобщенный закон Гука имеет снова вид (9), а предпоследнее уравнение системы (6) сводится к следующему:

$$\operatorname{div}\{\alpha_i[(-p_i + \delta^2 \lambda_i \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}^i) \mathbf{E} + \delta^2 \mu_i \dot{\varepsilon}^i]\} - \sum_{k \neq i} r_{ik} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^i) \nabla \alpha_i = 0, \quad i = o, w, \quad k = o, w, s. \quad (19)$$

Исследованию модели этого приближения будет посвящена специальная работа. Эта модель, так же как и модель первого приближения, может использоваться, в частности, при создании численных алгоритмов, которые будут обобщать известные (см., например, [30, 31]).

Авторы признательны д.ф.-м.н. Е. Н. Шеру и д.ф.-м.н., проф. Л. А. Назарову за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Biot M.** General Theory of Three Dimensional Consolidation, J. Appl. Phys., 1941, Vol. 12, No. 2.
2. **Френкель Я. И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. — 1944. — Т. 8. — №. 4.
3. **Николаевский В. Н.** О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах // Инж. журн. — 1963. — Т. 3. — Вып. 2.
4. **Золотарев П. П.** Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом // Инж. журн. — 1964. — Т. 4.
5. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПИММ. — 1956. — Т. 20.
6. **Brutsaert W.** The Propagation of Elastic Waves in Unconsolidated Unsaturated Granular Medium, J. Geophys. Res., 1964, Vol. 69, No. 2.

7. **Berryman J. G. and Thigpen L.** Nonlinear and Semilinear Dynamic Poroelasticity With Microstructure, *J. Mech. Phys. Solids.*, 1985, Vol. 33, No. 2.
8. **Lo Wei-Cheng, Sposito G., and Majer E.** Immiscible Two-phase Fluid Flows in Deformable Porous Media, *Advanced in Water Resources*, 2002, Vol. 25.
9. **Biot M.** Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, Vol. 34.
10. **Городецкая Н. С.** Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // *Акуст. вестн.* — 2007. — Т. 10. — № 2.
11. **Ельцов И. Н., Назаров Л. А., Назарова Л. А., Нестерова Г. В., Эпов М. И.** Интерпретация геофизических измерений в скважинах с учетом гидродинамических процессов в зоне проникновения // *ДАН.* — 2012. — Т. 445. — № 6.
12. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987.
13. **Рудяк В. Я., Белкин А. А.** Уравнения многожидкостной гидродинамики // *Мат. моделирование.* — 1996. — Т. 8. — № 6.
14. **Рудяк В. Я., Белкин А. А.** Уравнения многожидкостной гидродинамики для гетерогенных систем с вращательными степенями свободы // *СибЖИМ.* — 2002. — Т. 5. — № 1(9).
15. **Рудяк В. Я.** Статистическая аэрогидромеханика. Т. 2. Гидроаэромеханика. — Новосибирск: НГАСУ, 2005.
16. **Маскет М.** Течение неоднородных жидкостей в пористых средах. — М.; Л.: Гостоптехиздат, 1949.
17. **King M. S., Marsden J. R., Dennis J. W.** Biot dispersion for P- and S-wave velocities in partially and fully saturated sandstones, *Geophysical Prospecting*, 2000, Vol. 48.
18. **Brown R. J. S., Korringa J.** On the dependence of elastic properties of a porous rock on the compressibility of the pore fluid, *Geophysics*, 1975, Vol. 40, No. 4.
19. **Biot M. A. and Willis D. G.** The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, *J. of Applied Mechanics*, *Trans. ASME*, 1956, Vol. 24.
20. **Рекач В. Г.** Руководство к решению задач по теории упругости. — М.: Высш. шк., 1966.
21. **Солонников В. А.** Переопределенные эллиптические краевые задачи. — Л.: Наука, 1971.
22. **Ашихмин С. Г.** Научные основы методов прогноза напряженно-деформированного состояния горных пород при разработке месторождений нефти и газа: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Пермь, 2008.
23. **Wang H. F.** *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrology* — Princeton: Princeton University Press, 2000.
24. **Coussy O.** *Poromechanics*, John Willey & Sons Ltd., 2004.
25. **Иванова Ю. Е.** Метод возмущений в динамике деформирования несжимаемых упругих сред: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Владивосток, 2007.
26. **Cui L., Kaliakin V. N., Abousleiman Y., and Cheng A. H.-D.** Finite Element Formulation and Application of Poroelastic Generalized Plane Strain Problems, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1997, Vol. 34, No. 6.
27. **Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001.
28. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: в 3 т. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2003.
29. **Шемякин Е. И., Фисенко Г. Л., Курленя М. В., Опарин В. Н. и др.** Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. I // *ФТПРПИ.* — 1986. — № 3.
30. **Манаков А. В., Рудяк В. Я.** Алгоритм совместного моделирования процессов фильтрации и геомеханика в прискважинной зоне // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2012. — Т. 15. — № 1(49).
31. **Рудяк В. Я., Серяков А. В.** Влияние неоднородности корки бурового раствора на напряженное состояние коллектора // *ФТПРПИ.* — 2012. — № 4.

Поступила в редакцию 28/X 2013