

УДК 539.3, 534.6

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ДИСКЕ

А. О. Ватульян<sup>\*,\*\*</sup>, В. В. Дударев<sup>\*,\*\*</sup>, Р. М. Мнухин<sup>\*</sup>

\* Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия

\*\* Южный математический институт — филиал Федерального научного центра "Владикавказский научный центр РАН", 362027 Владикавказ, Россия  
E-mails: vatulyan@math.rsu.ru, dudarev\_vv@mail.ru, romamnuhin@yandex.ru

Решена задача об установившихся радиальных колебаниях тонкого электроупругого полого диска при наличии плоского неоднородного предварительного напряженно-деформированного состояния. Колебания возникают вследствие создания разности потенциалов на электродах, размещенных на торцевых поверхностях диска. Сформулированы уравнения колебаний и граничные условия. Исследовано предварительное напряженное состояние, соответствующее решению задачи Ламе. С помощью метода пристрелки численно решена прямая задача определения функции смещения. Сформулирована и решена обратная задача определения параметра предварительных напряжений по изменению собственной частоты колебаний диска. Проведен анализ точности восстановления предварительного напряженного состояния при входных данных, заданных с погрешностью.

Ключевые слова: пьезоэлектрический диск, неоднородные предварительные напряжения, колебания, акустический метод, обратная коэффициентная задача, собственные частоты.

DOI: 10.15372/PMTF20180319

**Введение.** Современные пьезоматериалы широко применяются в машиностроении (датчики давления и вибраций, ультразвуковые преобразователи, акселерометры и т. д.), акустике (пьезопреобразователи, микрофоны и т. д.), оптике (механизмы настройки положения линз), робототехнике, медицине (ультразвуковая диагностика тканей и органов), при разработке космических аппаратов и т. д. При этом, как правило, используются пьезоэлементы в форме пластины, диска, кольца, стержня или цилиндра.

Исследование резонансных частот и других механических характеристик объектов из пьезокерамики начато во второй половине XX в. В работе [1] получены значения резонансных и антирезонансных частот для тонкого диска и бесконечного цилиндра, изготовленных из керамики PZT-4 и стали. С использованием этих результатов проводятся расчеты для композитных преобразователей, применяемых в качестве полосовых фильтров.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00354 А) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-3179.2017.1).

© Ватульян А. О., Дударев В. В., Мнухин Р. М., 2018

Следует отметить также исследования задач о колебаниях пьезокерамических объектов с использованием лазерных методов. В частности, в работе [2] рассматриваются вынужденные изгибные колебания пьезокерамического (изготовленного из материала PZT) диска с электродированными торцевыми поверхностями, расположенного на металлической пластине. Результаты тестовых испытаний свидетельствуют о том, что погрешность измерения полученных с использованием направленного лазера значений резонансных частот в диапазоне от 0 до 40 кГц составляет 1 Гц.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию цилиндрических пьезоэлементов при наличии предварительных напряжений (ПН). В работе [3] изучается влияние продольных ПН цилиндрического пьезокерамического пьезопреобразователя на резонансные и антирезонансные частоты. Отмечается, что полученные результаты могут быть использованы при разработке новых электроакустических преобразователей.

Для адекватного описания динамического поведения предварительно напряженных объектов используется теория малых возмущений, наложенных на конечные деформации [4]. В ряде работ используется гипотеза об однородности ПН, однако обычно они являются существенно неоднородными, поскольку могут возникать в результате действия скрытых нагрузок или в процессе производства.

Существует несколько моделей, описывающих поведение упругих и электроупругих тел при наличии ПН [5–7]. Исследование динамических характеристик предварительно напряженного электроупругого тела зависит от выбора модели. На первом этапе выполняются теоретические расчеты основных характеристик объекта, оценивается возможность их экспериментального измерения с учетом характеристик используемого оборудования. На втором этапе проводятся соответствующие эксперименты и сравнение полученных результатов.

Одним из наиболее эффективных методов исследования свойств неоднородных электроупругих тел является акустический метод [8]. В работе [8] на основе теории интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода построен итерационный процесс для восстановления переменных упругих и пьезоэлектрических модулей по выбранному начальному приближению.

В настоящей работе в тензорном виде представлена общая линейризованная постановка задачи о движении электроупругого тела при наличии предварительного напряженно-деформированного состояния (ПНДС). С использованием этой постановки сформулирована прямая задача об установившихся радиальных колебаниях предварительно напряженного пьезоэлектрического цилиндрического диска малой толщины. Сформулирована и решена обратная коэффициентная задача определения параметра, характеризующего ПНДС, по дополнительной информации о первой собственной частоте.

**1. Постановка прямой задачи.** На основе результатов, изложенных в работе [7], можно сформулировать линейризованную краевую задачу о колебаниях электроупругого тела с учетом предварительных напряжений и деформаций в метрике конфигурации возмущенного состояния:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \mathbf{T} &= \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}, & \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \odot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \odot \mathbf{E}, & \mathbf{D} &= \mathbf{e} \odot \boldsymbol{\varepsilon} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \odot \mathbf{E}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{0T})/2, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{S_\sigma} &= \mathbf{P}, & \mathbf{u}|_{S_u} &= 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_{S_D} &= 0, & \varphi|_{S_\pm} &= \pm V_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\nabla$  — набла-оператор в метрике естественной недеформированной конфигурации в декартовой системе координат;  $\mathbf{T}$  — несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы;  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  — вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической

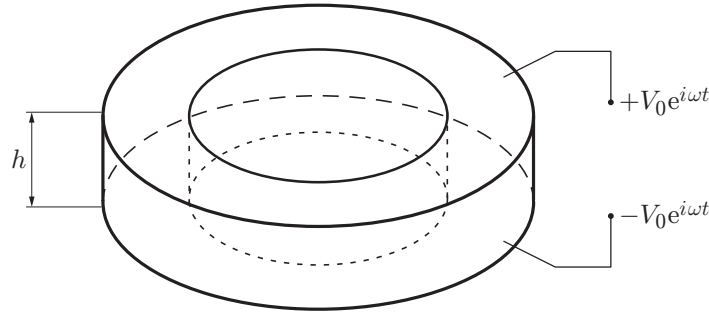


Рис. 1. Схема тонкого электроупругого диска с электродированными торцевыми поверхностями

индукции;  $\sigma$  — добавочный тензор объективных напряжений;  $\sigma^0$  — тензор ПН;  $C$  — тензор упругих постоянных;  $e$  — тензор пьезоэлектрических постоянных;  $\varepsilon$  — добавочный тензор деформаций;  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрических проницаемостей;  $\mathbf{u}$  — добавочный вектор малых перемещений;  $\mathbf{u}^0$  — вектор предварительных перемещений (ПП);  $\rho$  — плотность материала тела;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе тела  $S$ ;  $\mathbf{P}$  — вектор активной механической нагрузки, приложенной к телу;  $\Delta\varphi = \varphi|_{S_+} - \varphi|_{S_-} = 2V_0$  — подведенная к электродам разность потенциалов. В рамках сформулированной модели не учитываются массовые силы и плотность свободных электрических зарядов в текущей конфигурации, а также нелинейные и электрострикционные коэффициенты в определяющих соотношениях.

С использованием задачи (1) можно исследовать поведение предварительно напряженного пьезоэлектрического объекта с неоднородными свойствами, задавая законы изменения упругих и электрических модулей.

Рассмотрим задачу об установившихся радиальных колебаниях предварительно напряженного электроупругого диска малой толщины  $h$  в цилиндрической системе координат (рис. 1). Торцевые поверхности диска  $z = \pm h/2$  электродированы. Колебания возникают вследствие создания разности потенциалов  $\pm V_0 e^{i\omega t}$ .

Рассмотрим плоское неоднородное ПНДС, описываемое двумя компонентами тензора  $\sigma^0$  ( $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{rr}^0(r) \neq 0$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0(r) \neq 0$ ), удовлетворяющими уравнению равновесия, и одной компонентой вектора  $\mathbf{u}^0$  ( $u_r^0 = u_r^0(r)$ ). Будем считать, что в силу осевой симметрии компонента радиального смещения является функцией  $r$ :  $u_r = u_r(r)$ . Диск изготовлен из пьезокерамики PZT-4 с гексагональной симметрией 6mm. В этом случае матрицы компонент тензоров  $C$ ,  $e$  имеют вид [9]

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе (1) запишем уравнения и краевые условия задачи для диска после отделения временного множителя:

$$T_{rr,r} + (T_{rr} - T_{\varphi\varphi})/r + T_{zr,z} + \rho\omega^2 u_r = 0; \tag{2}$$

$$T_{rz,r} + T_{rz}/r + T_{zz,z} + \rho\omega^2 u_z = 0; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
D_{r,r} + D_r/r + D_{z,z} &= 0, \\
T_{rr} &= \sigma_{rr}(1 + u_{r,r}^0) + u_{r,r}\sigma_{rr}^0, & T_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi}(1 + u_r^0/r) + u_r\sigma_{\varphi\varphi}^0/r, \\
T_{rz} &= \sigma_{rz} + u_{z,r}\sigma_{rr}^0, & T_{zr} &= \sigma_{rz}(1 + u_{r,r}^0), & T_{zz} &= \sigma_{zz}, \\
\sigma_{rr} &= c_{11}(1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + c_{12}(1 + u_r^0/r)u_r/r + c_{13}u_{z,z} + e_{31}\varphi_{,z}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12}(1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + c_{11}(1 + u_r^0/r)u_r/r + c_{13}u_{z,z} + e_{31}\varphi_{,z}, \\
\sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = c_{44}(u_{r,z} + u_{z,r}) + e_{15}\varphi_{,r} = (c_{44}u_z + e_{15}\varphi)_{,r}, \\
\sigma_{zz} &= c_{13}(1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + c_{13}(1 + u_r^0/r)u_r/r + c_{33}u_{z,z} + e_{33}\varphi_{,z}, \\
D_r &= -\hat{\varepsilon}_{11}\varphi_{,r} + e_{15}(u_{r,z} + u_{z,r}), \\
D_z &= -\hat{\varepsilon}_{33}\varphi_{,z} + e_{31}((1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + (1 + u_r^0/r)u_r/r) + e_{33}u_{z,z}, \\
T_{rr}|_{r=r_1,r_2} &= 0, & \varphi|_{z=\pm h/2} &= \pm V_0, & D_r|_{r=r_1,r_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку для рассматриваемого диска выполнены условия обобщенного плоского напряженного состояния, примем  $T_{zz} = \sigma_{zz} \approx 0$ . Тогда из (4) получаем выражение для компоненты вектора смещений

$$u_z = -\frac{c_{13}}{c_{33}} z \left( (1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right) - \frac{e_{33}}{c_{33}} \varphi.$$

С учетом этого представления запишем выражения для компонент тензора  $\sigma$  и вектора  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c_{11}^*(1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + c_{12}^*(1 + u_r^0/r)u_r/r + e_{31}^*\varphi_{,z}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12}^*(1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + c_{11}^*(1 + u_r^0/r)u_r/r + e_{31}^*\varphi_{,z}, \\
\sigma_{rz} = \sigma_{zr} &= -z \frac{c_{44}c_{13}}{c_{33}} \left[ (1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right]_{,r} + e_{15}^*\varphi_{,r}, \\
D_r &= -\hat{\varepsilon}_{11}^*\varphi_{,r} - z \frac{e_{15}c_{13}}{c_{33}} \left[ (1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right]_{,r}, \\
D_z &= -\hat{\varepsilon}_{33}^*\varphi_{,z} + e_{31}^* \left[ (1 + u_{r,r}^0)u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11}^* &= c_{11}(1 - c_{13}^2/(c_{11}c_{33})), & c_{12}^* &= c_{12}(1 - c_{13}^2/(c_{12}c_{33})), \\
e_{31}^* &= e_{31}(1 - c_{13}e_{33}/(c_{33}e_{31})), & e_{15}^* &= e_{15}(1 - c_{44}e_{33}/(c_{33}e_{15})), \\
\hat{\varepsilon}_{11}^* &= \hat{\varepsilon}_{11}(1 + e_{33}e_{15}/(c_{33}\hat{\varepsilon}_{11})), & \hat{\varepsilon}_{33}^* &= \hat{\varepsilon}_{33}(1 + e_{33}^2/(c_{33}\hat{\varepsilon}_{33})).
\end{aligned}$$

В соответствии с теорией обобщенного напряженного состояния проведено осреднение по толщине диска по правилу

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} Q dz.$$

Уравнение движения (2) для осредненных компонент тензора  $T$  принимает вид

$$\langle T_{rr,r} \rangle + \frac{1}{r} (\langle T_{rr} \rangle - \langle T_{\varphi\varphi} \rangle) + \rho\omega^2 u_r = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \langle T_{rr} \rangle &= u_{r,r} (c_{11}^* (1 + u_{r,r}^0)^2 + \sigma_{rr}^0) + c_{12}^* \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) (1 + u_{r,r}^0) \frac{u_r}{r} + \frac{2V_0 e_{31}^*}{h} (1 + u_{r,r}^0), \\ \langle T_{\varphi\varphi} \rangle &= u_{r,r} c_{12}^* \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) (1 + u_{r,r}^0) + \frac{u_r}{r} \left(c_{11}^* \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^0\right) + \frac{2V_0 e_{31}^*}{h} \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right). \end{aligned}$$

Здесь учтено граничное условие для потенциала  $\varphi|_{z=\pm h/2} = \pm V_0$ . Поскольку функции  $u_z$  и  $\varphi$  нечетные по координате  $z$ , уравнение (3) после осреднения выполняется тождественно.

Таким образом, уравнения и краевые условия задачи для рассматриваемого тонкого диска для функции радиального смещения и потенциала принимают вид

$$u_{r,rr} P_2 + u_{r,r} P_1 + u_r (\rho\omega^2 + P_0) + \frac{2V_0 e_{31}^*}{h} F_0 = 0, \tag{5}$$

$$u_{r,r} P_2 + \left[ u_r \frac{c_{12}^*}{r} \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) + \frac{2V_0 e_{31}^*}{h} \right] (1 + u_{r,r}^0) \Big|_{r=r_1, r_2} = 0;$$

$$\varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r} + \nu^2 \varphi_{,zz} = -\frac{z\mu}{r} (rF_1)_{,r}, \tag{6}$$

$$\varphi|_{z=\pm h/2} = \pm V_0, \quad -\hat{\varepsilon}_{11}^* \varphi_{,r} - z \frac{e_{15} c_{13}}{c_{33}} F_1 \Big|_{r=r_1, r_2} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} P_2 &= c_{11}^* (1 + u_{r,r}^0)^2 + \sigma_{rr}^0, & P_1 &= c_{11}^* (1 + u_{r,r}^0) \left(2u_{r,rr}^0 + \frac{1 + u_{r,r}^0}{r}\right) + \sigma_{rr,r}^0 + \frac{\sigma_{rr}^0}{r}, \\ P_0 &= \frac{c_{12}^*}{r} \left(u_{r,rr}^0 \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) + (1 + u_{r,r}^0) \left(\frac{u_{r,r}^0}{r} - \frac{u_r^0}{r^2}\right)\right) - \frac{c_{11}^*}{r^2} \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right)^2 - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^0}{r^2}, \\ F_0 &= u_{r,rr}^0 + \frac{u_{r,r}^0}{r} - \frac{u_r^0}{r^2}, & F_1 &= \left( (1 + u_{r,r}^0) u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right)_{,r}, & \nu^2 &= \frac{\hat{\varepsilon}_{33}^*}{\hat{\varepsilon}_{11}^*}, & \mu &= \frac{c_{13} e_{15}}{c_{33} \hat{\varepsilon}_{11}^*}. \end{aligned}$$

Решение задачи (5), (6) может быть получено в два этапа. Сначала рассматривается задача (5) относительно функции  $u_r(r)$ , затем определяется распределение потенциала в решении (6).

Введем следующие безразмерные параметры и функции для упругого поля:

$$\begin{aligned} u_r(r) &= U(\xi) r_2, & \xi &= \frac{r}{r_2}, & \xi_0 &= \frac{r_1}{r_2}, & u_r^0(r) &= \tau\psi(\xi) r_2, & c &= \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*}, & k &= -\frac{2e_{31}^* V_0}{h c_{11}^*}, \\ \varkappa^2 &= \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{c_{11}^*}, & \frac{\sigma_{rr}^0(r)}{c_{11}^*} &= \tau\phi(\xi), & \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^0(r)}{c_{11}^*} &= \tau\phi'(\xi)\xi + \tau\phi(\xi), & \tau &= \frac{P}{c_{11}^*}. \end{aligned}$$

В пренебрежении слагаемыми второго порядка малости задача для функции  $U(\xi)$  принимает вид

$$\begin{aligned} &U''(1 + 2\tau\psi' + \tau\phi) + U' \left( (1 + 2\tau\psi' + \tau\phi)' + \frac{1 + 2\tau\psi' + \tau\phi}{\xi} \right) + \\ &+ U \left[ c \left(1 + \frac{\tau\psi}{\xi} + \tau\psi'\right)' \frac{1}{\xi} - \left(1 + \frac{2\tau\psi}{\xi} + \xi\tau\phi' + \tau\phi\right) \frac{1}{\xi^2} + \varkappa^2 \right] = k \left( \tau\psi'' + \frac{\tau\psi'}{\xi} - \frac{\tau\psi}{\xi^2} \right), \\ &(1 + 2\tau\psi' + \tau\phi)U' + c \left(1 + \tau\psi' + \frac{\tau\psi}{\xi}\right) \frac{U}{\xi} - k(1 + \tau\psi') \Big|_{\xi=\xi_0, 1} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Задача (7) сводится к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций  $U$  и  $Y = (1 + 2\tau\psi' + \tau\phi)U' + c(1 + \tau\psi' + \tau\psi/\xi)U/\xi - k(1 + \tau\psi')$ . Решение этой системы при заданных функциях  $\psi$ ,  $\phi$  и параметре  $\tau$  получено численно с помощью метода пристрелки в пакете Maple.

**2. Обратная задача о восстановлении предварительного напряженного состояния по данным об изменении собственных частот.** Поскольку пьезоэлементы широко применяются в различных приборах, необходимо знать их электроупругие свойства и напряженно-деформированное состояние. Разрешающая способность современных измерительных приборов постоянно увеличивается, вследствие чего становятся доступными для оценки даже незначительные изменения акустических характеристик объекта [10, 11].

В настоящей работе рассматривается обратная коэффициентная задача о восстановлении параметра, характеризующего ПНДС в электроупругом диске, по данным о его собственных частотах колебаний.

На основе задачи (7) рассмотрим свободные колебания диска при использовании короткозамкнутых электродов ( $V_0 = 0$ ,  $k = 0$ ).

Для линеаризации задачи введем формальный параметр  $\varepsilon$ :

$$\psi = \varepsilon\psi_1, \quad \phi = \varepsilon\phi_1, \quad U = U_0 + \varepsilon U_1, \quad \varkappa^2 = \varkappa_0^2 + \varepsilon \Delta\varkappa.$$

Запишем краевые задачи, соответствующие нулевой и первой степеням параметра  $\varepsilon$ :

1)  $\varepsilon^0$ :

$$\left(U_0' + \frac{U_0}{\xi}\right)' + \varkappa_0^2 U_0 = 0; \quad (8)$$

$$U_0' + c \frac{U_0}{\xi} \Big|_{\xi=\xi_{0,1}} = 0; \quad (9)$$

2)  $\varepsilon^1$ :

$$\left(U_1' + \frac{U_1}{\xi}\right)' + \varkappa_0^2 U_1 + (GU_0')' + G \frac{U_0'}{\xi} + \left(\frac{cM'}{\xi} - \frac{B}{\xi^2} + \Delta\varkappa\right) U_0 = 0; \quad (10)$$

$$GU_0' + cM \frac{U_0}{\xi} + U_1' + c \frac{U_1}{\xi} \Big|_{\xi=\xi_{0,1}} = 0. \quad (11)$$

Здесь  $G(\xi) = 2\tau\psi_1'(\xi) + \tau\phi_1(\xi)$ ;  $M(\xi) = \tau\psi_1'(\xi) + \tau\psi_1(\xi)/\xi$ ,  $B(\xi) = 2\tau\psi_1(\xi)/\xi + \xi\tau\phi_1'(\xi) + \tau\phi_1(\xi)$ .

Однородная краевая задача (8), (9) описывает свободные колебания пьезокерамического диска при отсутствии ПНДС, а задача (10), (11) — при его наличии. Заметим, что решение задачи (8), (9) известно и может быть выражено аналитически через функции Бесселя:

$$U_0(\xi) = C_1 J_1(\varkappa_0 \xi) + C_2 Y_1(\varkappa_0 \xi).$$

Здесь  $C_1$ ,  $C_2$  — константы;  $J_1(\varkappa_0 \xi)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка;  $Y_1(\varkappa_0 \xi)$  — функция Бесселя второго рода первого порядка (функция Неймана). Используя граничные условия (9), построим частотное уравнение для определения значения параметра  $\varkappa_0$ , пропорционального собственной частоте колебаний:

$$\Delta(\varkappa_0) = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta = & \left( \varkappa_0 J_0(\varkappa_0 \xi_0) + \frac{c-1}{\xi_0} J_1(\varkappa_0 \xi_0) \right) (\varkappa_0 Y_0(\varkappa_0) + (c-1) Y_1(\varkappa_0)) - \\ & - (\varkappa_0 J_0(\varkappa_0) + (c-1) J_1(\varkappa_0)) \left( \varkappa_0 Y_0(\varkappa_0 \xi_0) + \frac{c-1}{\xi_0} Y_1(\varkappa_0 \xi_0) \right). \end{aligned}$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  связаны соотношением

$$C_2 = -C_1 \frac{\varkappa_0 J_0(\varkappa_0) + (c-1)J_1(\varkappa_0)}{\varkappa_0 Y_0(\varkappa_0) + (c-1)Y_1(\varkappa_0)}.$$

Таким образом, собственная форма колебаний  $U_0(\xi)$  определяется с точностью до постоянного множителя  $C_1$  и имеет вид

$$U_0(\xi) = C_1 \left( J_1(\varkappa_0 \xi) - \frac{\varkappa_0 J_0(\varkappa_0) + (c-1)J_1(\varkappa_0)}{\varkappa_0 Y_0(\varkappa_0) + (c-1)Y_1(\varkappa_0)} Y_1(\varkappa_0 \xi) \right).$$

Для определения поправки  $\Delta \varkappa$  умножим уравнения движения (8) и (10) на величины  $\xi U_1(\xi)$  и  $\xi U_0(\xi)$  соответственно, вычтем и проинтегрируем полученное выражение по отрезку  $[\xi_0, 1]$ . После ряда преобразований имеем формулу

$$\Delta \varkappa = \varkappa^2 - \varkappa_0^2 = \left[ c M U_0^2 \Big|_{\xi_0}^1 + \int_{\xi_0}^1 G U_0^2 \xi d\xi - \int_{\xi_0}^1 \left( c M' U_0^2 - \frac{B}{\xi} U_0^2 \right) d\xi \right] / \int_{\xi_0}^1 \xi U_0^2 d\xi. \quad (13)$$

Это соотношение связывает изменение собственной частоты радиальных колебаний пьезокерамического диска с функциями  $M$ ,  $G$ ,  $B$ , характеризующими изменение ПН и ПП, и формой свободных колебаний  $U_0$ .

Формула (13) позволяет оценивать изменение собственной частоты в зависимости от вида и параметра ПНДС.

**3. Результаты численных расчетов.** Рассмотрим диск толщиной  $h = 0,001$  м с внутренним радиусом  $r_1 = 0,03$  м и внешним радиусом  $r_2 = 0,05$  м ( $\xi_0 = 0,6$ ). Плотность материала диска равна  $\rho = 5250$  кг/м<sup>3</sup>. Напряжение на электродах составляет  $V_0 = 250$  В. Материальные константы пьезокерамики PZT-4 имеют следующие значения [9]:  $c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{12} = 7,78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{13} = 7,43 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{44} = 2,56 \cdot 10^{10}$ ,  $e_{15} = 12,7$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{31} = -5,2$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{33} = 15,1$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\hat{\varepsilon}_{11} = 6,45 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\hat{\varepsilon}_{33} = 5,62 \cdot 10^{-9}$  Ф/м.

На рис. 2 представлены графики функций  $\psi(\xi)$  и  $\phi(\xi)$ , характеризующие распределение ПП и ПН в электроупругом диске:

$$\psi(\xi) = \frac{(1-c)\xi + (1+c)/\xi}{(1-c^2)(\xi_0^{-2} - 1)}, \quad \phi(\xi) = \frac{1 - \xi^{-2}}{\xi_0^{-2} - 1}.$$

Для исследования относительного изменения первых двух резонансных частот рассмотрены характеристики  $\varepsilon_j(\tau)$ , определяемые формулой

$$\varepsilon_j(\tau) = \frac{\varkappa_j(\tau) - \varkappa_{j0}}{\varkappa_{j0}},$$

где  $\varkappa_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ) — первые две безразмерные резонансные частоты, являющиеся корнями частотного уравнения (12);  $\varkappa_j(\tau)$  ( $j = 1, 2$ ) — первые две безразмерные резонансные частоты, полученные на основе численного решения прямой задачи.

На рис. 3 представлены графики функций  $\varepsilon_1(\tau)$  и  $\varepsilon_2(\tau)$ . Видно, что при наличии ПНДС первая резонансная частота изменяется более существенно, чем вторая. Поэтому при исследовании обратной задачи следует использовать значения первой резонансной частоты. Зависимость  $\varepsilon_3(\tau)$  аналогична зависимости  $\varepsilon_2(\tau)$ .

В табл. 1 приведены восстановленные по формуле (13) значения параметра ПНДС  $\tau_R$  ( $\tau$  — точное значение параметра ПНДС;  $\varkappa_1$  — соответствующая первая собственная частота, найденная из решения прямой задачи;  $\delta_\tau$  — относительная погрешность восстановления  $\tau_R$ ;  $\delta_\varkappa$  — отклонение значения  $\varkappa_1$  от значения  $\varkappa_{10}$ ;  $\varkappa_{10} = 1,20952$  — первая собственная частота, найденная из решения частотного уравнения (12)). Из табл. 1 следует,

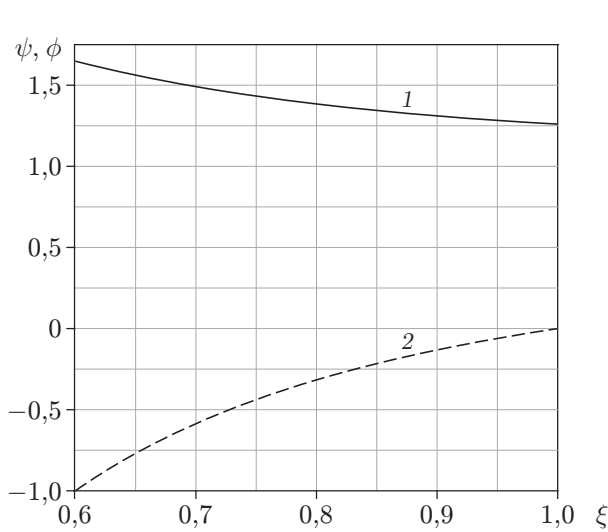


Рис. 2

Рис. 2. Зависимости  $\psi(\xi)$  (1) и  $\phi(\xi)$  (2)

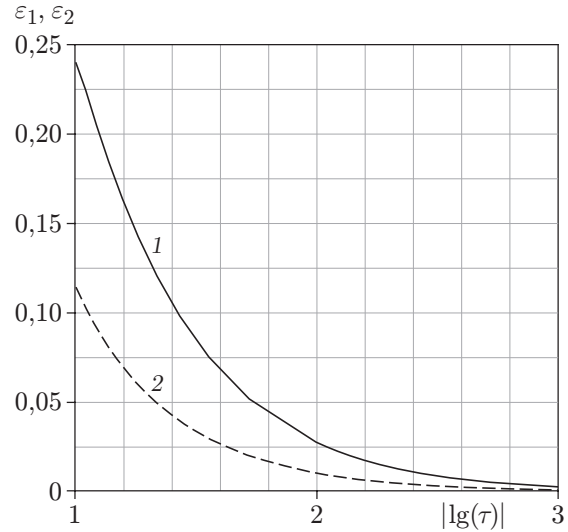


Рис. 3

Рис. 3. Зависимости  $\varepsilon_1(\tau)$  (1) и  $\varepsilon_2(\tau)$  (2)

Таблица 1

Восстановленные значения  $\tau_R$

$\tau$	$\tau_R$	$\delta_\tau, \%$	$\varkappa_1$	$\delta_\varkappa, \%$
$10^{-1}$	0,096 00	4,000 67	1,504 62	24,397 82
$10^{-2}$	0,009 97	0,240 70	1,242 88	2,757 30
$10^{-3}$	0,000 99	0,135 89	1,212 91	0,279 48
$10^{-4}$	0,000 09	0,158 98	1,209 86	0,027 93
$10^{-5}$	0,000 01	0,063 34	1,209 56	0,002 83

что точность восстановления значений  $\tau_R$  по формуле (13) увеличивается с уменьшением параметра  $\tau$ . В то же время при малых значениях  $\tau$  значение  $\delta_\varkappa$ , характеризующее разность первых собственных частот колебаний диска при наличии и отсутствии ПНДС, уменьшается, что следует учитывать при проведении исследований.

Для моделирования натурального эксперимента осуществлена реконструкция параметра ПНДС  $\tau$  при зашумленных значениях первой собственной частоты  $\varkappa_1$ . Зашумление проводилось по формуле

$$\varkappa_1^n = \varkappa_1^e \left( 1 + \frac{d\varepsilon_0}{100} \right),$$

где  $\varkappa_1^e$  — точное значение первой резонансной частоты, полученное из решения прямой задачи при заданных законах изменения функций  $\psi(\xi)$  и  $\phi(\xi)$ ;  $\varkappa_1^n$  — зашумленное значение резонансной частоты;  $\varepsilon_0$  — параметр, характеризующий уровень шума;  $d \in [-100, 100]$  — случайная величина с равномерным законом распределения.

В табл. 2 приведены точные и восстановленные значения параметра  $\tau$  при различном уровне зашумления.

Таким образом, точность измерения частот колебаний должна быть тем больше, чем меньше параметр ПНДС  $\tau$ . При этом для значений параметра  $\tau < 10^{-4}$  точность измерений должна быть очень высокой.



Таблица 2

Точные  $\tau$  и восстановленные  $\tau_R$  значения параметра ПНДС при различном уровне зашумления

$\tau$	$\tau_R$	$\varepsilon_0$	$\varkappa_1^e$	$\varkappa_1^n$	$\delta_\tau, \%$
$10^{-1}$	0,097 600	$10^{-4}$	1,504 623 59	1,504 581 46	2,32
	0,098 000	$10^{-3}$		1,505 586 55	1,95
	0,102 500	$10^{-2}$		1,517 713 82	2,51
	0,102 600	$10^{-1}$		1,518 165 21	2,68
$10^{-2}$	0,009 970	$10^{-5}$	1,242 875 93	1,242 875 56	0,24
	0,009 960	$10^{-4}$		1,242 836 16	0,36
	0,010 060	$10^{-3}$		1,243 174 22	0,66
	0,011 100	$10^{-2}$		1,246 604 56	11,08
$10^{-3}$	0,000 998	$10^{-6}$	1,212 906 54	1,212 905 97	0,13
	0,000 997	$10^{-5}$		1,212 902 42	0,24
	0,001 029	$10^{-4}$		1,213 010 85	2,96
	0,000 873	$10^{-3}$		1,212 482 02	12,67

**Заключение.** В работе представлена общая постановка задачи о движении электроупругого тела при наличии неоднородного предварительного напряженно-деформированного состояния. На ее основе сформулирована задача об установившихся радиальных колебаниях тонкого полого пьезоэлектрического цилиндрического диска. Решение прямой безразмерной задачи определения функции радиального смещения получено численно с помощью метода пристрелки. Проведен анализ влияния уровня и структуры предварительного напряженно-деформированного состояния на значения первых двух резонансных частот.

Для решения обратной задачи определения уровня предварительных напряжений по данным об изменении собственной частоты проведен анализ свободных колебаний электроупругого диска. Получена формула для изменения значения собственной частоты колебаний диска в зависимости от законов распределения предварительных напряжений и остаточных смещений. Результаты численных экспериментов показали возможность использования предложенного решения по этой формуле на практике. Погрешность восстановления ПНДС при малых значениях параметра  $\tau$  не превышает 5 %. Процедуру восстановления рекомендуется проводить для первой собственной частоты.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Adelman N. T., Stavsky Y.** Vibrations of radially polarized composite piezoceramic cylinders and disks // J. Sound Vibrat. 1975. V. 43, N 1. P. 37–44.
2. **Parali L., Perchousek J., Sabikoglu I., et al.** A digital measurement system based on laser displacement sensor for piezoelectric ceramic discs vibration characterization // Optik. 2016. V. 127. P. 84–89.
3. **Arnold F. J., Muhlen S. S.** The resonance frequencies on mechanically pre-stressed ultrasonic piezotransducers // Ultrasonics. 2001. V. 39. P. 1–5.
4. **Sinha A. K., Tanski W. J., Lukaszek T., Ballato A.** Influence of biasing stress on the propagation of surface waves // J. Appl. Phys. 1985. V. 57, N 3. P. 767–776.
5. **Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A.** Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Engng Structures. 2017. V. 151. P. 391–405.
6. **Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M.** Vibration of a prestressed tube in the presence of plastic zone // J. Sound Vibrat. 2016. V. 275. P. 92–101.

7. **Kuang Z. B.** Theory of electroelasticity. Heidelberg; N. Y.: Springer, 2014.
8. **Bogachev I. V., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V.** Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76. P. 506–510.
9. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988.
10. **Loza I. A.** Free vibrations of piezoceramic hollow cylinders with radial polarization // J. Math. Sci. 2011. V. 174, N 3. P. 295–302.
11. **Kharouf N., Heyliger P. R.** Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // J. Sound Vibrat. 1994. V. 174, N 4. P. 539–561.

*Поступила в редакцию 17/VIII 2017 г.*

---