

8. Дудников В. Г., Шабалин А. Л. Эволюция распределения ионов по импульсам в электрогидродинамических эмиттерах ионов // ЖТФ.— 1990.— Т. 60, № 4.
9. Chandrasekhar S. // Rev. Mod. Phys.— 1943.— V. 15, N 1.
10. Kamuro M., Kanayama T., Hiroshima H., Tanoue H. Measurement of virtual crossover in liquid gallium ion source // Appl. Phys. Lett.— 1983.— V. 42, N 10.
11. Lewis G. N., Paik H., Mioduszewski J., Siegel B. M. A hydrogen field ion source with focusing optics // J. Vac. Sci. Technol.— 1986.— V. B4, N 1.
12. Lewis G. N., Mioduszewski J., Weiner D., Siegel B. M. An ion beam lithography system for nanolithography with a focused  $H_2^+$  ion probe // J. Vac. Sci. Technol.— 1988.— V. B6, N 1.
13. Kamuro M. Ion beam exposure apparatus using a liquid metal source // Thin Solid Films.— 1982.— V. 92, N 1/2.
14. Alton G. D., Read P. M. Emittance measurements of gallium liquid-metal ion sources // NIM.— 1991.— V. B54, N 1—3.
15. Blackwell R. J., Kubby J. A., Lewis G. N., Siegel B. M. Experimental focused ion beam system using a gaseous field ion source // J. Vac. Sci. Technol.— 1985.— V. B3, N 1.
16. Ward J. W., Kubena R. L., Utlaut M. W. Transverse thermal velocity broadening of focused beams from liquid ion sources // J. Vac. Sci. Technol.— 1988.— V. B6, N 6.

г. Новосибирск

Поступила 20/VI 1991 г.

УДК 534.1: 539.3

В. М. Богомольный

### К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННОГО ЭФФЕКТА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СЕГНЕТОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

При действии постоянного сильного электрического поля на сегнетокерамику в неполярной фазе в ней возникает поляризация и существенно меньшее электрическое поле возбуждает гармонические колебания [1]. Применение электрострикционной керамики обеспечивает линейную (без гистерезиса) зависимость механических деформаций от электрического поля, что имеет значение при создании адаптивных оптических систем и устройств микропозиционирования [2]. Интерес к электрострикционной керамике вызван также возможностью создания устойчивых форм параметрических колебаний [3, 4].

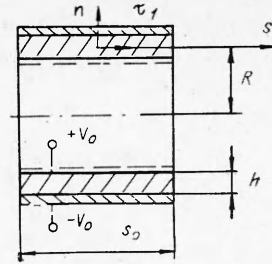
Как следует из эксперимента, сжатие сегнетокерамики в направлении, перпендикулярном вектору поляризации, в 1,8—2 раза увеличивает коэффициент электромеханической связи. Поэтому, а также с целью расширения диапазона рабочих частот и увеличения прочности сегнетокерамику армируют металлом, создавая в ней предварительные напряжения сжатия. При изготовлении пьезопреобразователей создают предварительные механические усилия от одной трети до половины эксплуатационной нагрузки.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку из сегнетокерамики, на которой за счет разности температур снаружи закреплена тонкая металлическая оболочка. При этом между отдельными слоями возникает предварительное нормальное контактное давление  $\bar{q}_n = \text{const}$ . К наружным поверхностям сегнетокерамики с координатами  $z = \pm h/2$  ( $h$  — толщина оболочки) кроме постоянных  $\bar{V}$  приложены переменные электрические потенциалы  $\vec{V} = \vec{V}_0 \exp(i\omega t)$  ( $\bar{V} \gg \vec{V}$ ).

1. Уравнения электрострикционного эффекта относительно периодических по времени механических деформаций и электрических величин имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= s_{11}^E \sigma_1 + s_{12}^E \sigma_2 + s_{13}^E \sigma_3 + 2Q_{12} \bar{E}_3 \vec{E}_3, \\ \varepsilon_2 &= s_{11}^E \sigma_2 + s_{12}^E \sigma_1 + s_{13}^E \sigma_3 + 2Q_{12} \bar{E}_3 \vec{E}_3, \\ \varepsilon_3 &= s_{13}^E (\sigma_1 + \sigma_2) + s_{33}^E \sigma_3 + 2Q_{11} \bar{E}_3 \vec{E}_3, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — деформации в направлениях единичных векторов  $\tau_1, \tau_2, n$  (см. рисунок);  $\sigma_i$  — механические напряжения;  $s_{1i}^E$  — упругие податливости сегнетокерамики;  $E_3 = \bar{E}_3 + \tilde{E}_3$  ( $\bar{E}_3$  и  $\tilde{E}_3$  — постоянная и переменная компоненты напряженности электрического поля,  $\bar{E}_3 \gg \tilde{E}_3$ );  $Q_{11}, Q_{12}$  — электрострикционные константы.



При действии на оболочку из сегнетокерамики постоянного нормального контактного давления  $\bar{q}_n$  в ней возникают начальные напряжения сжатия, радиальные  $\bar{\sigma}_3$  и окружные  $\bar{\sigma}_2$ , определяемые методами плоской теории упругости [5]:

$$(1.2) \quad \bar{\sigma}_2 = -\frac{\bar{q}_n R}{h} \left(1 + \frac{z}{2R}\right), \quad \bar{\sigma}_3 = -\bar{q}_n \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right).$$

Здесь  $R$  — радиус срединной поверхности;  $\bar{\sigma}_2$  — усредненные по толщине напряжения. Механические напряжения  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) состоят из постоянной и переменной компонент  $\sigma_i = \bar{\sigma}_i + \tilde{\sigma}_i$ , где переменные напряжения  $\tilde{\sigma}_i$  зависят от  $E_3, \bar{q}_n, \tilde{q}_n$  и определяются в данной работе (вначале решается электростатическая задача [6], а затем — динамическая). При гармоническом возбуждении на поверхности контакта с металлом возникает дополнительное переменное нормальное давление  $\tilde{q}_n$ , которое зависит от амплитуды радиальных перемещений и жесткости металлической оболочки.

Окружные деформации металлической оболочки запишем в виде [5]  $\tilde{\varepsilon}_2^{(0)} = \tilde{\sigma}_{2M}/E_M = W/R_M (\tilde{\sigma}_{2M}, E_M, W, R_M$  — динамические растягивающие напряжения, модуль упругости, радиальные перемещения и радиус срединной поверхности металлической оболочки). При  $\tilde{\sigma}_{2M} = \tilde{q}_n R_M/h_M$  ( $h_M$  — толщина металла) из приведенных соотношений следует, что  $\tilde{q}_n = E_M h_M W/R_M^2$ .

Из первых двух уравнений (1.1) имеем

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \mu^2)} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 - \tilde{E}_3), \\ \tilde{\sigma}_2 &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \mu^2)} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1 - \tilde{E}_3), \quad \mu = -s_{12}^E/s_{11}^E, \\ \tilde{\sigma}_3 &= -\tilde{q}_n (1/2 + z/h), \quad \tilde{E}_3 = (1 + \mu) (2Q_{12} \bar{E}_3 \tilde{E}_3 + s_{13}^E \tilde{\sigma}_3). \end{aligned}$$

Распределение деформаций по толщине оболочки определяется гипотезами Кирхгофа — Лява [5]

$$(1.4) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + z\kappa_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)} + z\kappa_2$$

( $\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}$  — деформации срединной поверхности оболочки,  $\kappa_1, \kappa_2$  — изменения ее главных кривизн).

Для напряженности электрического поля в сегнетокерамике можно принять аналогичные (1.4) соотношения [7, 8]

$$(1.5) \quad \bar{E}_3 = \bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)}, \quad \tilde{E}_3 = \tilde{E}_3^{(0)} + z\tilde{E}_3^{(1)}, \quad \bar{E}_3 = -2\bar{V}_0/h, \quad \tilde{E}_3 = -2\tilde{V}_0/h.$$

В случае электростатического возбуждения формулы для вычисления постоянной компоненты  $\bar{E}_3^{(1)}$  даны в [6], в этой работе находится  $\tilde{E}_3^{(1)}$ .

Электрическая индукция  $D_3$  определяется с учетом (1.4)—(1.5) через тензор механических деформаций из выражения для производной от внутренней энергии, в котором на независимую переменную принята напря-

женность электрического поля [1, 9]:

$$(1.6) \quad D_3 = \{ \varepsilon_{33}^T - 4Q_{12}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)}) [2Q_{12}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})(c_{11}^E + c_{12}^E) + \\ + 2Q_{11}c_{13}^E(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})] - 2Q_{11}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)}) [4Q_{12}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})c_{13}^E + \\ + 2Q_{11}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})c_{33}^E] \} (\tilde{E}_3^{(0)} + z\tilde{E}_3^{(1)}) + [2Q_{12}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})(c_{11}^E + c_{12}^E) + \\ + 2Q_{11}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})c_{13}^E] [\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} + z(\kappa_1 + \kappa_2)] + \\ + [4Q_{12}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})c_{13}^E + 2Q_{11}c_{33}^E(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})] \times \\ \times \left\{ \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\mu^2)} [(1+\mu)(\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)}) + (1+\mu)z(\kappa_1 + \kappa_2) - 2\hat{\varepsilon}_{31}^E] - \right. \\ \left. - s_{33}^E \tilde{q}_n \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) + 2Q_{11}(\bar{E}_3^{(0)} + z\bar{E}_3^{(1)})(\tilde{E}_3 + z\tilde{E}_3^{(1)}) \right\}.$$

Распределение индукции  $D_3$  вблизи электродов носит характер скин-эффекта, в остальной части оболочки  $D_3$  практически не изменяется по ее толщине [8, 10].

Приравнявая нулю в (1.6) члены, содержащие  $z$ , получим

$$(1.7) \quad \tilde{E}_3^{(1)} = (\bar{E}_3 B_1 + \bar{E}_3^{(0)} B_2 + \bar{E}_3^{(1)} B_3) / A_1;$$

$$(1.8) \quad A_1 = \varepsilon_{33}^T - B_1(\bar{E}_3^{(0)})^2 / 2, \quad \bar{E}_3 = \bar{E}_3^{(0)} \bar{E}_3^{(1)} \tilde{E}_3^{(0)},$$

$$B_1 = 16Q_{12} [Q_{12}(c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11}c_{13}^E + (1+\mu)\beta\gamma],$$

$$B_2 = -2(\kappa_1 + \kappa_2)[\alpha + \beta\gamma(1+\mu)] + 2\varepsilon_2^{(0)} \frac{E_M h_M}{h R_M} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E),$$

$$B_3 = 2(\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)})[\alpha + \beta\gamma(1+\mu)] - \varepsilon_2^{(0)} \frac{E_M h_M}{R_M} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E);$$

$$(1.9) \quad \alpha = Q_{11}(c_{11}^E + c_{12}^E), \quad \beta = 2Q_{12}c_{13}^E + Q_{11}c_{33}^E, \quad \gamma = \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\mu)}.$$

Величина  $\bar{E}_3^{(1)}$  определяется по формулам [6]

$$(1.10) \quad \bar{E}_3^{(1)} = \frac{E_3^{(0)} [h\bar{A}(\bar{\kappa}_1) + (\bar{E}_3^{(0)})^2 \bar{q}_n s_{33}^E Q_{11} (2Q_{12}c_{13}^E + Q_{11}c_{33}^E)]}{h [\bar{B}(\bar{\varepsilon}_1^{(0)}, \bar{\varepsilon}_2^{(0)}) + (\bar{E}_3^{(0)})^2 \bar{C}(\bar{q}_n)]},$$

$$\bar{A} = \bar{\kappa}_1 \left[ Q_{12}(c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11}c_{13}^E + \frac{s_{13}^E (2Q_{12}c_{13}^E + Q_{11}c_{33}^E)}{s_{11}^E(1-\mu)} \right],$$

$$\bar{B}(\bar{\varepsilon}_1^{(0)}, \bar{\varepsilon}_2^{(0)}) = \varepsilon_{33}^T + (\bar{\varepsilon}_1^{(0)} + \bar{\varepsilon}_2^{(0)}) [Q_{12}(c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11}c_{13}^E] + \\ + \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\mu)} (2Q_{12}c_{13}^E + Q_{11}c_{33}^E) (\bar{\varepsilon}_1^{(0)} + \bar{\varepsilon}_2^{(0)} + \bar{q}_n s_{13}^E),$$

$$\bar{C}(\bar{q}_n) = -6Q_{12}^2 (c_{11}^E + c_{12}^E) - 8Q_{11}Q_{12}c_{13}^E - 3Q_{11}c_{33}^E - 4Q_{12}c_{13}^E - \\ - \frac{6s_{13}^E Q_{12}}{s_{11}^E(1-\mu)} (2Q_{12}c_{13}^E + Q_{11}c_{33}^E) + s_{33}^E \bar{q}_n \left( 3Q_{11}Q_{12}c_{13}^E + \frac{3}{2} Q_{11}c_{33}^E \right).$$

В (1.10)  $\bar{\kappa}_1$ ,  $\bar{\varepsilon}_1^{(0)}$  и  $\bar{\varepsilon}_2^{(0)}$  находятся известным электростатическим решением [6].

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.3) и выражая усилия  $T_1$ ,  $T_2$  в моменты  $M_1$  и  $M_2$  через интегралы от  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  [5], получим следующие соотношения электроупругости:

$$(1.11) \quad T_1 = D_T(\varepsilon_1^{(0)} + \mu\varepsilon_2^{(0)} - \bar{E}_3^{(0)}), \quad T_2 = D_T(\varepsilon_2^{(0)} + \mu\varepsilon_1^{(0)} - \bar{E}_3^{(0)});$$

$$(1.12) \quad M_1 = D_M(\kappa_1 + \mu\kappa_2) + M_0, \quad M_2 = D_M(\kappa_2 + \mu\kappa_1) + M_0,$$

$$D_T = \frac{h}{s_{11}^E (1 - \mu^2)}, \quad D_M = \frac{h^3}{12s_{11}^E (1 - \mu^2)}, \quad \bar{E}_3^{(0)} = (1 + \mu) \left( 2Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \tilde{E}_3^{(0)} - \frac{s_{13}^E \tilde{q}_n}{2} \right),$$

$$M_0 = h^2 (s_{13}^E \tilde{q}_n - 2Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \tilde{E}_3^{(1)} h) / 12s_{11}^E (1 - \mu).$$

2. Уравнения движения цилиндрической оболочки из сегнетокерамики с учетом предварительного сжатия имеют вид [11]

$$(2.1) \quad dT_1^H/d\tilde{s} - \bar{T}_2^H dW^H/d\tilde{s} = -\lambda U, \quad dN_1^H/d\tilde{s} - T_2^H - q = -\lambda W^H;$$

$$(2.2) \quad dM_1^H/d\tilde{s} - \bar{T}_{2(1)}^H dW^H/d\tilde{s} = N_1, \quad \tilde{s} = s/R,$$

$$T_i^H = T_i/D_T \quad (i = 1, 2), \quad M_1^H = M_1/RD_T, \quad \bar{T}_2^H =$$

$$= \bar{q}_n(2R + h)/(-2D_T), \quad \bar{T}_{2(1)}^H = \bar{T}_2^H h/2R,$$

$$U^H = U/R, \quad W^H = W/R, \quad q = \tilde{q}_n R/D_T = E_M h_M W^H/D_T, \quad \lambda = h\rho \omega^2 R^2/D_T,$$

где  $s$  — линейная координата в осевом направлении;  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки;  $U, W$  — компоненты вектора перемещений срединной поверхности в направлении единичных векторов  $\tau_1, \mathbf{n}$  (см. рисунок);  $N_1^H = N_1/D_T$  — поперечные перерезывающие усилия;  $\rho$  — плотность;  $\bar{T}_2^H$  — предварительные усилия сжатия.

Деформации срединной поверхности выразим через перемещения [5]

$$(2.3) \quad \varepsilon_1^{(0)} = dU/ds, \quad \varepsilon_2^{(0)} = W/R, \quad \kappa_1 = -d^2W/ds^2 \quad (\kappa_2 = 0).$$

Система уравнений (1.11), (1.12), (2.1)–(2.3) приводится к основному уравнению

$$(2.4) \quad d^6 W^H/d\tilde{s}^6 + a_1 d^4 W^H/d\tilde{s}^4 + a_2 d^2 W^H/d\tilde{s}^2 + a_3 W^H = f,$$

$$a_1 k = d(\bar{T}_2^H - \mu_1 + 1) - \lambda RD_T - \bar{T}_{2(1)}^H RD_T - a + c - e,$$

$$a_2 k = d[\lambda + \mu_1(\lambda - 1) + \bar{T}_2^H(\lambda + 1)] +$$

$$+ RD_T[\lambda(\bar{T}_{2(1)}^H - 1) + (1 - \mu)(1 + \mu_1) + \mu \bar{T}_2^H] +$$

$$+ E_M h_M R - \lambda(a - c + e), \quad k = D_M/R + b,$$

$$a_3 k = \lambda RD_T E_3(Q_{12}), \quad E_3(Q_{12}) = 2(1 + \mu) Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \tilde{E}_3^{(0)},$$

$$a = h^3 s_{13}^E E_M h_M / (12s_{11}^E (1 - \mu) R), \quad b = h^3 Q_{12} (\bar{E}_3^{(0)})^2 \times$$

$$\times [\alpha + \beta \gamma (1 + \mu)] / (3A_1 R s_{11}^E (1 - \mu)),$$

$$c = \frac{h^2 Q_{12} (\bar{E}_3^{(0)})^2 E_M h_M \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E)}{3R_M A_1 s_{11}^E (1 - \mu)}, \quad d = \frac{h^3 Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \bar{E}_3^{(1)}}{3A_1 s_{11}^E (1 - \mu)} [\alpha + \beta \gamma (1 + \mu)],$$

$$e = \frac{h^3 Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \bar{E}_3^{(1)} E_M h_M \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E)}{6A_1 s_{11}^E (1 - \mu) R_M}, \quad fk = \lambda RD_T E_3(Q_{12}),$$

$$\mu_1 = \mu + \frac{s_{13}^E E_M h_M}{2R_M} (1 + \mu).$$

Постоянные  $\alpha, \beta, \gamma, A_1$  определены выражениями (1.8)–(1.10). При осесимметричных свободных колебаниях оболочки принимаем краевые условия

$$(2.5) \quad M_1^H|_{\tilde{s}=\tilde{s}_c/2} = N_1^H|_{\tilde{s}=\tilde{s}_c/2} = T_1^H|_{\tilde{s}=\tilde{s}_c/2} = 0.$$

Первым двум условиям (2.5) соответствуют уравнения

$$-\frac{D_M}{R} \frac{d^2 W^H}{d\tilde{s}^2} + \frac{h^2 s_{13}^E E_M h_M W^H}{12R_M s_{11}^E (1 - \mu)} = \frac{h^3 Q_{12} \bar{E}_3^{(0)} \tilde{E}_3^{(1)}}{6s_{11}^E (1 - \mu)},$$

$$-\frac{D_M}{R} \frac{d^3 W^H}{d\tilde{s}^3} \left[ \frac{h^3 s_{13}^E E_M h_M}{12R_M s_{11}^E (1 - \mu)} - \bar{T}_{2(1)}^H \right] = \frac{h^3 Q_{12} \bar{E}_3^{(0)}}{6s_{11}^E (1 - \mu)} \frac{d\tilde{E}_3^{(1)}}{d\tilde{s}}.$$

Изменения кривизны  $\kappa$ , и деформации  $\varepsilon_1^{(0)}$  и  $\varepsilon_2^{(0)}$  в случае электростатического нагружения практически постоянны по длине цилиндрической оболочки, поэтому в выражении (1.7) для  $\tilde{E}_3^{(1)}$  принимаем величину  $\bar{E}_3^{(1)}$  постоянной, при этом функция  $d\tilde{E}_3^{(1)}/d\tilde{s}$  из (1.7) определяется выражением

$$(2.6) \quad A_1 \frac{d\tilde{E}_3^{(1)}}{d\tilde{s}} = \bar{E}_3^{(0)} \left\{ -2 \frac{d\tilde{\kappa}}{d\tilde{s}} [\alpha + \beta\gamma(1 + \mu)] + \right. \\ \left. + 2 \frac{d\tilde{\varepsilon}_2^{(0)}}{d\tilde{s}} \frac{E_M h_M}{R_M \tilde{h}} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E) \right\} + \bar{E}_3^{(1)} \left\{ 2 \left( \frac{d\tilde{\varepsilon}_1^{(0)}}{d\tilde{s}} + \frac{d\tilde{\varepsilon}_2^{(0)}}{d\tilde{s}} \right) [\alpha + \beta\gamma(1 + \mu)] - \right. \\ \left. - \frac{d\tilde{\varepsilon}_2^{(0)}}{d\tilde{s}} \frac{E_M h_M}{R_M} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E) \right\}.$$

Здесь постоянная  $A_1$  находится из (1.8). Из (1.11) с учетом (2.3) выразим  $T_1^H$  через перемещения

$$(2.7) \quad T_1^H = dU^H/d\tilde{s} + \mu_1 W^H - E_3(Q_{12}), \quad E_3(Q_{12}) = \\ = 2Q_{12}(1 + \mu) \bar{E}_3^{(0)} \tilde{E}_3^{(0)}.$$

Из краевого условия  $T_1^H(\tilde{s} = \tilde{s}_0/2) = 0$  с учетом (2.3), (2.7) следует, что при  $\tilde{s} = \tilde{s}_0/2$   $d^2U^H/d\tilde{s}^2 = -\mu_1 dW^H/d\tilde{s}$ , при этом (2.6) примет вид

$$A_1 \frac{d\tilde{E}_3^{(1)}}{d\tilde{s}} = 2\bar{E}_3^{(0)} \left\{ \frac{1}{R} \frac{d^3W^H}{d\tilde{s}^3} [\alpha + \beta\gamma(1 + \mu)] + \frac{dW^H}{d\tilde{s}} \frac{E_M h_M}{R_M \tilde{h}} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E) \right\} + \\ + \bar{E}_3^{(1)} \frac{dW^H}{d\tilde{s}} \left\{ 2(1 - \mu_1) [\alpha + \beta\gamma(1 + \mu)] - \frac{E_M h_M}{R_M} \beta (\gamma s_{13}^E + s_{33}^E) \right\}.$$

Последнее краевое условие (2.5) дает третье уравнение для определения постоянных интегрирования:

$$-\frac{(D_M + bR)}{R} \frac{d^4W^H}{d\tilde{s}^4} + [a - c - d + e - \bar{T}_{2(1)}^H R D_T - d(\bar{T}_2^H - \mu_1)] \frac{d^2W^H}{d\tilde{s}^2} + \\ + \{2RD_T(\lambda - 1 + \mu\mu_1) - E_M h_M [s_{13}^E D_T(1 + \mu) - 2R] - 2\lambda d\mu_1\} W^H = \\ = [(\mu - 1) RD_T - \lambda d] E_3(Q_{12}).$$

Решение (2.4) получим из анализа корней его характеристического уравнения

$$(2.8) \quad x^6 + a_1 x^4 + a_2 x^2 + a_3 = 0.$$

Последовательными заменами  $x = y_1^{1/2}$ ,  $y_1 = y - a_1/3$  из (2.8) находим кубическое уравнение  $y^3 + py + \bar{q} = 0$ ,  $p = a_2 - a_1^2/3$ ,  $\bar{q} = a_3 - a_1 a_2/3 + 2a_1^3/27$ .

С учетом четности и симметричности  $W^H$  относительно начала координат  $\tilde{s} = 0$ , расположенного в центре цилиндрической оболочки (см. рисунок), одно из решений (2.4) при определенных соотношениях коэффициентов  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеет вид [12]

$$(2.9) \quad W^H = C_1 \text{ch}(x_1 \tilde{s}) + C_2 \text{ch} \bar{\alpha} \tilde{s} \cos \bar{\beta} \tilde{s} + C_3 \text{sh} \bar{\alpha} \tilde{s} \sin \bar{\beta} \tilde{s} + \frac{f}{a_3}, \\ \bar{\alpha} = \frac{\bar{b}}{2\bar{\beta}}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2} \sqrt{3}, \quad \bar{b} = \left( -\frac{\bar{a}}{2} + \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}}{2} \right)^{1/2}, \\ \bar{a} = -(\bar{A} + \bar{B})/2, \quad \bar{A} = (-\bar{q}/2 + \sqrt{D})^{1/3}, \quad \bar{B} = (-\bar{q}/2 - \sqrt{D})^{1/3}, \\ D = (p/3)^3 + (\bar{q}/2)^2,$$

где  $x_1$  — первый корень характеристического уравнения (в случае отрицательного подкоренного выражения  $x = (y - a_1/3)^{1/2}$  вместо функции

Номер варианта	Частота возбуждения, Гц	$\bar{q}_n$ , Н/м <sup>2</sup>	Коэффициенты уравнения (2.4)		Прогиб $W^H _{\tilde{s}=0}$	Правая часть уравнения (2.4)
			$a_1$	$a_2$		
1	0	10 <sup>6</sup>	0,269 · 10 <sup>5</sup>	0,29 · 10 <sup>4</sup>	-0,156 · 10 <sup>-5</sup>	0
2	50	10 <sup>7</sup>	0,161 · 10 <sup>4</sup>	0,29 · 10 <sup>4</sup>	-0,195 · 10 <sup>-4</sup>	-0,17 · 10 <sup>-6</sup>
3	30 · 10 <sup>3</sup>	0	0,907	0,11 · 10 <sup>4</sup>	-0,308 · 10 <sup>-3</sup>	-0,61 · 10 <sup>-1</sup>
4	$f_p = 31,0 \cdot 10^3$	0	0,954	0,10 · 10 <sup>4</sup>	-0,258 · 10 <sup>-2</sup>	-0,65 · 10 <sup>-1</sup>
5	30,0 · 10 <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup>	0,269 · 10 <sup>5</sup>	0,196 · 10 <sup>5</sup>	-0,310 · 10 <sup>-4</sup>	-0,611 · 10 <sup>-1</sup>
6	$f_p = 31,5 \cdot 10^3$	10 <sup>6</sup>	0,269 · 10 <sup>5</sup>	0,213 · 10 <sup>5</sup>	-0,192 · 10 <sup>-3</sup>	-0,67 · 10 <sup>-1</sup>
7	30,0 · 10 <sup>3</sup>	10 <sup>7</sup>	0,161 · 10 <sup>4</sup>	0,23 · 10 <sup>4</sup>	-0,106 · 10 <sup>-3</sup>	-0,61 · 10 <sup>-1</sup>
8	$f_p = 32,0 \cdot 10^3$	10 <sup>7</sup>	0,161 · 10 <sup>4</sup>	0,216 · 10 <sup>4</sup>	-0,15 · 10 <sup>-3</sup>	-0,70 · 10 <sup>-1</sup>

$\operatorname{ch} x_1 \tilde{s}$  используется  $\cos |x_1 \tilde{s}|$ , а при других значениях  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  вместо тригонометрических функций решение (2.9) выражается через гиперболические функции).

Для оболочки из керамики типа ЦТСЛ, армированной металлическим слоем толщиной  $h_m = 0,2$  м, с модулем упругости  $E_m = 2,1 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, с геометрическими параметрами:  $\bar{h} = 16$  мм,  $h = 3$  мм,  $s_0 = 32$  мм и  $Q_{12} = -1,3 \cdot 10^{-16}$  м<sup>2</sup>/В<sup>2</sup> при  $\bar{V} = 1,5$  кВ и  $\tilde{V} = 300$  В результаты расчетов при различных частотах и значениях  $\bar{q}_n$  приведены в таблице, откуда видно, что предварительное сжатие  $\bar{q}_n$  несущественно увеличивает резонансную частоту металлокерамической обложки и в рассмотренном случае на порядок уменьшает ее перемещения  $W^H$  (варианты 4, 6 и 8). Для варианта 2 (на частоте 50 Гц) производные функции  $W^H$  равны:  $d^2 W^H / d\tilde{s}^2 = 3,95 \cdot 10^{-6}$ ,  $d^4 W^H / d\tilde{s}^4 = -5,51 \cdot 10^{-13}$ ,  $d^6 W^H / d\tilde{s}^6 = -4,72 \cdot 10^{-11}$ . Из сравнения производных, коэффициентов и правой части уравнения (2.4) следует, что на низких частотах четвертую и шестую производные можно не учитывать.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке.— М.: ИЛ, 1952.
2. Leung K. M., Liu S. T., Kyonka J. Large electrostrictive effect in Ba: PZT and its applications // *Ferroelectrics*.— 1980.— V. 27, N 1/4.
3. Klotinsh E., Kotleris J. Parametric instability of acoustic waves in ferroelectric ceramics excited by an electric field // *Ferroelectrics*.— 1986.— V. 69, N 1/2.
4. Взятых В. Ф., Добромислов В. С., Калинин В. Н., Куимов В. И. Экранированные диэлектрические резонаторы с азимутальными колебаниями // *Изв. вузов. Радиофизика*.— 1987.— Т. 30, № 1.
5. Ляв А. Математическая теория упругости.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.
6. Богомольный В. М. К расчету электрострикционного эффекта в предварительно напряженных сегнетокерамических оболочках // *Изв. АН АрмССР. Механика*.— 1988.— № 5.
7. Drummeller D. S., Kalnins A. Dynamic shell theory for ferroelectric ceramics // *JASA*.— 1970.— V. 47, N 5.
8. Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения // *ПМ*.— 1976.— Т. 12, № 2.
9. Nelson D. F. Electric, optic, and acoustic interactions in dielectrics.— N. Y.: Wiley, 1979.
10. Ченский Е. В. О монодоменной поляризации сегнетоэлектриков с фазовым переходом первого рода // *ФТТ*.— 1970.— Т. 12, № 2.
11. Арменакас А. Е. Влияние начальных напряжений на колебания свободно опертых круговых цилиндрических оболочек // *РТК*.— 1964.— Т. 2, № 9.
12. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании.— М.: Физматгиз, 1960.

г. Москва

Поступила 18/V 1990 г.,  
в окончательном варианте — 21/I 1991 г.