

УДК 539.3

ПРОГРАММА ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТИПА НАЧАЛЬНОЙ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Тульский государственный университет, 300012 Тула, Россия
E-mails: socolova-m-u@yandex.ru, dmitrykhristich@rambler.ru

Предложена программа экспериментов для идентификации типа упругой анизотропии материала. В результате измерения деформаций, возникающих при сжатии кубического образца вдоль трех его граней, определяется положение главных осей анизотропии материала. Для последующей идентификации типа анизотропии используются образцы, ориентированные вдоль определенных главных осей.

Ключевые слова: упругость, анизотропные материалы, эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20150519

1. Деформируемые твердые тела при малых деформациях проявляют свойство упругости. Будем предполагать, что соотношения, связывающие тензоры напряжений и деформаций, при стремлении деформаций к нулю асимптотически приближаются к закону Гука, который выражает линейную зависимость между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon = C \cdot S, \quad (1.1)$$

где ε — тензор деформаций; C — постоянный тензор упругих податливостей четвертого ранга; S — тензор напряжений.

Аналізу структуры и свойств тензора C посвящено большое количество работ (см., например, [1–8]), подробный обзор которых приведен в [3]. Результаты анализа показывают, что тензор C обладает симметрией: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ и поэтому имеет 21 независимую компоненту. Различные кристаллографические системы содержат некоторое количество элементов симметрии, поэтому тензор C имеет меньшее число независимых компонент: от 2 для изотропного и гиротропного материалов до 13 для моноклинного [9].

Актуальной задачей является разработка программы, предусматривающей минимальное число экспериментов по определению компонент тензора C . В работе [1] доказано, что для нахождения 21 компоненты тензора упругости в общем случае требуется провести 15 экспериментов на одномерное нагружение и 6 экспериментов на двумерное нагружение. Различные способы определения констант упругости рассматривались в работах [10–13]. Если известны тип симметрии свойств и ориентация главных осей анизотропии материала, то число экспериментов, необходимых для определения констант упругости, уменьшается. В большинстве известных авторам данной работы исследований идентификация типа анизотропии материала проводилась на основе определения свойств симметрии

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-97501_р-центр_а, 15-01-01875_а) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 467).

матрицы упругих констант, найденных экспериментально [10–14]. В работе [14] задача об определении типа анизотропного материала решена в общем виде с использованием разложения тензора модулей упругости, полученного на основе экспериментов, на изотропную (постоянную) часть и части, содержащие два девятатора и нонор. Целью настоящей работы является составление программы экспериментов, позволяющей выявлять присущую материалу симметрию свойств, проводя минимальное число экспериментов без определения 21 константы упругости материала в произвольной (лабораторной) системе координат, а также находить главные оси анизотропии и определять значения некоторых упругих констант.

Пусть базис $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ ($\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j = \delta^{ij}$) декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ связан с главными осями анизотропии материала [15], причем вектор \mathbf{a}^3 направлен вдоль главной поворотной оси симметрии (перпендикулярно плоскости симметрии). Как и в работах [7, 15], введем канонический базис тензоров второго ранга

$$\begin{aligned} I^0 &= (\mathbf{a}^1\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^3\mathbf{a}^3)/\sqrt{3}, & I^1 &= (2\mathbf{a}^3\mathbf{a}^3 - \mathbf{a}^1\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\mathbf{a}^2)/\sqrt{6}, \\ I^2 &= (\mathbf{a}^1\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\mathbf{a}^2)/\sqrt{2}, & I^3 &= (\mathbf{a}^1\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{a}^1)/\sqrt{2}, \\ I^4 &= (\mathbf{a}^2\mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3\mathbf{a}^2)/\sqrt{2}, & I^5 &= (\mathbf{a}^1\mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3\mathbf{a}^1)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Разложение тензора податливости по этому базису имеет вид

$$C = c_{\alpha\beta} I^\alpha I^\beta, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 5, \quad \beta = 0, 1, \dots, 5, \quad (1.2)$$

причем $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$.

В работах [3, 4] показано, что данный базис является собственным для изотропного и кубического материалов и не является собственным для других анизотропных материалов. С точки зрения симметрии свойств будем классифицировать анизотропные материалы по кристаллографическим системам [3, 5, 7, 15, 16]. В работах [7, 15] показано, что для триклинных материалов в разложении (1.2) имеется 18 ненулевых констант ($c_{03} = c_{04} = c_{05} = 0$), а для моноклинных материалов — 12 ненулевых коэффициентов ($c_{03} = c_{04} = c_{05} = 0, c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = 0$). В случае ромбического (ортотропного) материала отличны от нуля девять коэффициентов ($c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}$), в случае тетрагонального и тригонального материалов — по шесть: $c_{00}, c_{01}, c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44} = c_{55}$ и $c_{00}, c_{01}, c_{11}, c_{22} = c_{33}, c_{44} = c_{55}, c_{24} = c_{35}$ соответственно. Для гексагонального (трансверсально-изотропного) материала отличны от нуля пять коэффициентов ($c_{00}, c_{01}, c_{11}, c_{22} = c_{33}, c_{44} = c_{55}$), для кубического — три ($c_{00}, c_{11} = c_{22}, c_{33} = c_{44} = c_{55}$), для изотропного — два ($c_{00}, c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = c_{55}$).

Одним из возможных подходов к решению проблемы идентификации типа анизотропного материала является разработка программы экспериментов, с помощью которой можно провести классификацию материалов по кристаллографическим системам. В [9, 17] предложена теория, на основе которой разрабатывалась предлагаемая программа экспериментов.

2. Базовым для идентификации анизотропного материала является нагружение гидростатическим давлением, когда выражение для тензора напряжений имеет вид

$$S = -\sqrt{3} \sigma I^0. \quad (2.1)$$

В результате такого воздействия по измеренным деформациям образца определяются главные значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и главные векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ тензора деформаций. Для всех материалов, кроме триклинного, тройка векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ определяет главные оси анизотропии, введенные В. В. Новожиловым [18], как главные векторы тензора напряжений, возникающих в результате объемной деформации $\varepsilon = \sqrt{3} \varepsilon_0 I^0$.

В силу симметрии тензора деформаций возможны три случая: 1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ — произвольный ортогональный триэдр; 2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, вектор \mathbf{a}^3 определен, векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 ортогональны и расположены в плоскости, перпендикулярной \mathbf{a}^3 ; 3) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ — оси эллипсоида деформаций.

В случае изотропного и кубического материалов деформации, вычисленные по соотношениям (1.1), являются объемными: $\varepsilon = -\sqrt{3}c_{00}\sigma I^0$. В материалах, соответствующих гексагональной, тригональной и тетрагональной кристаллографическим системам, при гидростатическом давлении возникают деформации $\varepsilon = -\sqrt{3}c_{00}\sigma I^0 - \sqrt{3}c_{01}\sigma I^1/2$. При приложении гидростатических напряжений в материалах ромбической, моноклинной и триклинной сингоний возникают деформации общего вида $\varepsilon = -\sqrt{3}c_{00}\sigma I^0 - \sqrt{3}c_{01}\sigma I^1/2 - \sqrt{3}c_{02}\sigma I^2/2$.

Таким образом, эксперимент по трехосному деформированию позволил бы не только определить главные оси анизотропии, но и включить материал в одну из трех групп: 1) изотропный или кубический; 2) тетрагональный, тригональный или гексагональный; 3) ромбический, моноклинный или триклинный.

Однако следует отметить существенную сложность проведения трехосного эксперимента. При выполнении такого опыта значительно затруднено измерение размеров образца для определения по ним шести компонент тензора деформаций.

Рассмотрим возможность определения главных осей анизотропии по результатам трех экспериментов на сжатие. Тензор напряжений (2.1) можно представить в виде суммы трех тензоров

$$S = S_I + S_{II} + S_{III} \quad (2.2)$$

($S_I = -\sigma e^1 e^1$; $S_{II} = -\sigma e^2 e^2$; $S_{III} = -\sigma e^3 e^3$), каждый из которых описывает сжатие вдоль одной из осей произвольной декартовой системы координат $Ox'y'z'$ с базисом e^1, e^2, e^3 . Тензорам напряжений S_I, S_{II}, S_{III} соответствуют тензоры деформаций $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$, связанные с ними законом Гука (1.1):

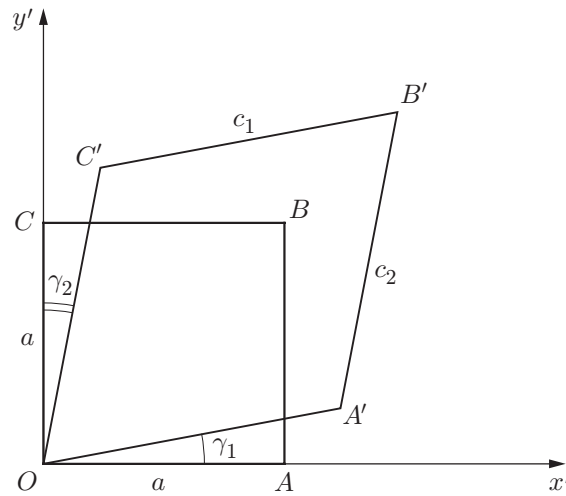
$$\varepsilon_I = C \cdot S_I, \quad \varepsilon_{II} = C \cdot S_{II}, \quad \varepsilon_{III} = C \cdot S_{III}. \quad (2.3)$$

В силу линейности закона Гука с учетом формул (2.2), (2.3) получаем

$$\varepsilon = C \cdot S = C \cdot (S_I + S_{II} + S_{III}) = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}. \quad (2.4)$$

Аддитивность представления (2.4) позволяет заменить эксперимент по всестороннему сжатию тремя экспериментами по одноосному сжатию, в которых проще измерить перемещения точек образца и вычислить по ним деформации. Если выполнить три таких одноосных эксперимента, то главные оси анизотропии материала можно будет определить как главные оси тензора деформаций (2.4), который характеризует поведение образца при всестороннем сжатии.

Рассмотрим процесс одноосного сжатия вдоль произвольной оси Oz' куба $OABCO_1A_1B_1C_1$, занимающего в недеформированном состоянии область $\{0 \leq x' \leq a, 0 \leq y' \leq a, 0 \leq z' \leq a\}$. В деформированном состоянии куб принимает форму косоугольного параллелепипеда $O'A'B'C'O'_1A'_1B'_1C'_1$. Считаем, что нижняя плоскость образца зафиксирована и его ориентация как твердого тела определяется одним параметром — углом поворота образца вокруг нормали к этой плоскости. Поэтому деформация и ориентация образца определяются семью параметрами, измеряемыми в эксперименте (см. рисунок): длинами ребер оснований c_1, c_2 , углами γ_1, γ_2 между сторонами деформированных и исходных нижнего и верхнего оснований, компонентами $\Delta x_{III}, \Delta y_{III}, \Delta z_{III}$ вектора перемещения верхнего основания относительно нижнего.



Нижнее основание куба в исходном и деформированном состояниях при сжатии вдоль оси Oz'

Выражения для компонент тензора деформаций ε_I в системе координат $Ox'y'z'$ имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^I = \begin{pmatrix} \frac{c_1 \cos \gamma_1}{a} - 1 & \frac{c_1 \sin \gamma_1 + c_2 \sin \gamma_2}{2a} & \frac{\Delta x_{III}}{2a} \\ \frac{c_1 \sin \gamma_1 + c_2 \sin \gamma_2}{2a} & \frac{c_2 \cos \gamma_2}{a} - 1 & \frac{\Delta y_{III}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III}}{2a} & \frac{\Delta y_{III}}{2a} & \frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

При сжатии куба вдоль оси Ox' координаты точек задней и передней граней куба выражаются через измеряемые в эксперименте длины ребер в деформированном состоянии a_1, a_2 , углы α_1, α_2 между деформированными и исходными задней и передней гранями, а также через перемещения передней грани относительно задней $\Delta x_I, \Delta y_I, \Delta z_I$. Выражения для компонент тензора деформаций ε_{II} в системе координат $Ox'y'z'$ имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^{II} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{a_1 \cos \alpha_1}{a} - 1 & \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{2a} \\ \frac{\Delta z_I}{2a} & \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{2a} & \frac{a_2 \cos \alpha_2}{a} - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

При сжатии куба вдоль оси Oy' координаты точек левой и правой граней куба выражаются через измеряемые в эксперименте длины ребер в деформированном состоянии b_1, b_2 , углы β_1, β_2 между деформированными и исходными левой и правой гранями, а также через перемещения правой грани относительно левой $\Delta x_{II}, \Delta y_{II}, \Delta z_{II}$. Выражения для

компонент тензора деформаций ε_{III} в системе координат $Ox'y'z'$ имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^{\text{III}} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 \cos \beta_1}{a} - 1 & \frac{\Delta x_{\text{II}}}{2a} & \frac{b_1 \sin \beta_1 + b_2 \sin \beta_2}{2a} \\ \frac{\Delta x_{\text{II}}}{2a} & \frac{\Delta y_{\text{II}}}{a} & \frac{\Delta z_{\text{II}}}{2a} \\ \frac{b_1 \sin \beta_1 + b_2 \sin \beta_2}{2a} & \frac{\Delta z_{\text{II}}}{2a} & \frac{b_2 \cos \beta_2}{a} - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Тензор деформаций (2.4) имеет компоненты $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{I}} + \varepsilon_{ij}^{\text{II}} + \varepsilon_{ij}^{\text{III}}$, выражающиеся через измеряемые компоненты в соответствии с (2.5)–(2.7). Главные оси и главные значения определенного таким образом тензора деформаций нетрудно найти методами линейной алгебры, в результате чего будут определены главные оси анизотропии. Это позволит включить материал в одну из трех групп (по числу различных собственных значений тензора ε).

3. Определив главные оси анизотропии, введем связанный с ними базис \mathbf{a}^i , $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим дополнительные эксперименты, которых достаточно для определения типа анизотропии материала в каждой группе.

Для классификации материалов в первых двух группах требуется провести эксперимент на двухосное растяжение-сжатие по направлениям векторов \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 с тензором напряжений $S_2 = t_2(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2) = \sqrt{2} t_2 I^2$ и эксперимент на сдвиг в этой плоскости с тензором напряжений $S_3 = t_3(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^1) = \sqrt{2} t_3 I^3$.

Для изотропного и кубического материалов в рассматриваемых экспериментах возникают деформации $\varepsilon = \varepsilon_{(2)} I^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_{(3)} I^3$, однако для изотропного материала

$$\varepsilon_{(2)}/t_2 = \varepsilon_{(3)}/t_3 = c_{11}, \quad (3.1)$$

а для кубического

$$\varepsilon_{(2)}/t_2 \neq \varepsilon_{(3)}/t_3, \quad (3.2)$$

так как $c_{11} \neq c_{33}$, т. е. поведение кубического материала, в отличие от изотропного, при двухосном растяжении-сжатии и сдвиге в одной и той же плоскости различается.

Множитель c_{11} , характеризующий поведение изотропного и кубического материалов при растяжении и сжатии, определяется по формуле

$$c_{11} = (\Delta x_{\text{I}} + \Delta a)/(t_2 a) = (\Delta x_{\text{I}} + \Delta a)a/P, \quad (3.3)$$

где Δa — изменение длины ребра куба в направлении, перпендикулярном оси сжатия Ox ; Δx_{I} — абсолютная величина изменения расстояния между гранями куба, перпендикулярными оси Ox (вектору \mathbf{a}^1); P — сила, приложенная к кубическому образцу при сжатии.

Сдвиговые напряжения $S_3 = t_3(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^1)$ в плоскости векторов \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 , предполагаемые программами экспериментов для всех трех групп материалов, можно реализовать в опыте по кручению сплошного цилиндра с приложением крутящего момента, вектор которого направлен по оси \mathbf{a}^1 . Крутящий момент, приложенный к цилиндру из изотропного или кубического материала, вычисляется по формуле $M = G\tau\pi R^4/2$ [19], где $G = 1/(2c_{11})$ или $G = 1/(2c_{33})$ — модуль сдвига материала; τ — постоянная крутка цилиндра, определяемая как разность углов поворота торцов цилиндра, отнесенная к его длине; R — радиус цилиндра. Тогда

$$c_{11} = \pi R^4 \tau / (4M) \quad (3.4)$$

или

$$c_{33} = \pi R^4 \tau / (4M). \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.3)–(3.5) следует, что если

$$(\Delta x_I + \Delta a)a/P = \pi R^4 \tau / (4M),$$

то выполняется условие (3.1) и материал является изотропным, а если

$$(\Delta x_I + \Delta a)a/P \neq \pi R^4 \tau / (4M),$$

то выполняется условие (3.2) и материал является кубическим.

Для тетрагонального и гексагонального материалов при напряжениях $S_2 = t_2(\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^2) = \sqrt{2} t_2 I^2$ возникают деформации $\varepsilon = \varepsilon_{(2)} I^2$, а для тригонального материала — деформации $\varepsilon = \varepsilon_{(2)} I^2 + \varepsilon_{(4)} I^4$. Это позволяет идентифицировать тригональный материал (для него деформации растяжения-сжатия в плоскости $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ сопровождаются деформациями сдвига в плоскости $\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$).

При нагружении в плоскости векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ с тензором напряжений $S_3 = \sqrt{2} t_3 I^3$ в гексагональном и тетрагональном материалах возникают деформации $\varepsilon = \varepsilon_{(3)} I^3$, однако для гексагонального материала

$$\varepsilon_{(2)}/t_2 = \varepsilon_{(3)}/t_3 = c_{22}, \quad (3.6)$$

а для тетрагонального

$$\varepsilon_{(2)}/t_2 \neq \varepsilon_{(3)}/t_3, \quad (3.7)$$

так как $c_{22} \neq c_{33}$, т. е. поведение тетрагонального материала, в отличие от гексагонального, при двухосном растяжении-сжатии и сдвиге в одной и той же плоскости различается.

Множитель c_{22} , характеризующий поведение гексагонального и тетрагонального материалов при растяжении и сжатии, определяется в результате эксперимента на одноосное сжатие в плоскости векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ по формуле, аналогичной (3.3):

$$c_{22} = (\Delta x_I + \Delta a)/(t_2 a) = (\Delta x_I + \Delta a)a/P. \quad (3.8)$$

Величина крутящего момента, приложенного к цилиндру, вычисляется по формулам [19]

$$M_1 = 2\pi R^4 \tau_1 / (c_{22} + c_{44}), \quad M_1 = 2\pi R^4 \tau_1 / (c_{33} + c_{44}) \quad (3.9)$$

для гексагонального и тетрагонального материалов соответственно, где τ_1 — постоянная крутка цилиндра. Для исключения из формул (3.9) константы c_{44} требуется провести еще один аналогичный опыт по кручению другого сплошного цилиндра с крутящим моментом M_3 , направленным вдоль оси \mathbf{a}^3 , совпадающей с осью цилиндра. Величина крутящего момента равна $M_3 = \pi R^4 \tau_3 / c_{44}$ (τ_3 — постоянная крутка цилиндра). Тогда

$$c_{22} = 2\pi R^4 \tau_1 / M_1 - \pi R^4 \tau_3 / M_3, \quad c_{33} = 2\pi R^4 \tau_1 / M_1 - \pi R^4 \tau_3 / M_3. \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.8), (3.10) следует, что если

$$(\Delta x_I + \Delta a)a/P = \pi R^4 (2\tau_1 / M_1 - \tau_3 / M_3),$$

то выполняется условие (3.6) и материал является гексагональным, а если

$$(\Delta x_I + \Delta a)a/P \neq \pi R^4 (2\tau_1 / M_1 - \tau_3 / M_3),$$

то выполняется условие (3.7) и материал является тетрагональным.

4. Идентификация ромбического, моноклинного и триклинного материалов может быть проведена в экспериментах на сдвиги в плоскостях Ox_1x_2, Ox_2x_3 и Ox_1x_3 с тензорами напряжений $S_3 = \sqrt{2} t_3 I^3, S_4 = \sqrt{2} t_4 I^4, S_5 = \sqrt{2} t_5 I^5$. Реализовать такие напряжения

можно в экспериментах по кручению сплошных круговых цилиндров длиной l и радиусом R моментами $\mathbf{M}_1 = M\mathbf{a}^1$, $\mathbf{M}_2 = M\mathbf{a}^2$, $\mathbf{M}_3 = M\mathbf{a}^3$, где M — величина приложенного момента. Известно, что поведение цилиндров из ромбического, моноклинного и триклинного материалов при нагружении указанными крутящими моментами различается [19]. Под действием крутящего момента ось цилиндра изгибается и принимает форму кривой, описываемой следующими уравнениями:

1) при приложении момента \mathbf{M}_1 для ромбического материала

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad (4.1)$$

для моноклинного материала

$$x_2 = \frac{(\sqrt{3}c_{23} - c_{13})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (lx_1 - x_1^2), \quad x_3 = 0, \quad (4.2)$$

для триклинного материала

$$x_2 = \frac{(\sqrt{3}c_{23} - c_{13})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (lx_1 - x_1^2), \quad x_3 = \frac{(\sqrt{3}c_{25} - c_{15})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (lx_1 - x_1^2); \quad (4.3)$$

2) при приложении момента \mathbf{M}_2 для ромбического материала

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad (4.4)$$

для моноклинного материала

$$x_1 = 0, \quad x_3 = \frac{(\sqrt{3}c_{23} + c_{13})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (x_2^2 - lx_2), \quad (4.5)$$

для триклинного материала

$$x_1 = \frac{(\sqrt{3}c_{24} + c_{14})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (x_2^2 - lx_2), \quad x_3 = \frac{(\sqrt{3}c_{23} + c_{13})M}{2\sqrt{3}\pi R^4} (x_2^2 - lx_2); \quad (4.6)$$

3) при приложении момента \mathbf{M}_3 для ромбического материала

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad (4.7)$$

для моноклинного материала

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad (4.8)$$

для триклинного материала

$$x_1 = \frac{c_{14}M}{\sqrt{3}\pi R^4} (lx_3 - x_3^2), \quad x_2 = \frac{c_{15}M}{\sqrt{3}\pi R^4} (lx_3 - x_3^2). \quad (4.9)$$

Из формул (4.1), (4.4), (4.7) следует, что ось цилиндра из ромбического материала, направленная вдоль любой главной оси анизотропии материала, при кручении остается прямой. Из формул (4.2), (4.5), (4.8) следует, что в зависимости от того, вдоль какой из трех главных осей анизотропии направлена ось цилиндра из моноклинного материала, она может оставаться прямой или изгибаться в одной из координатных плоскостей Ox_1x_3 или Ox_2x_3 . Из формул (4.3), (4.6), (4.9) следует, что ось цилиндра из триклинного материала при его закручивании изгибается независимо от того, вдоль какой из трех главных осей анизотропии она направлена, причем изогнутая ось не остается в какой-либо координатной плоскости.

Таким образом, для идентификации триклинного материала требуется провести один эксперимент по кручению цилиндра, ось которого направлена вдоль одной из главных осей анизотропии исследуемого материала, а для идентификации ромбического и моноклинного

материалов — два таких эксперимента с цилиндрами, оси которых совпадают с двумя различными главными осями анизотропии.

Полученные критерии идентификации материалов являются чисто теоретическими, поскольку они основаны на точных равенствах. На практике при проведении экспериментов все величины измеряются с некоторыми погрешностями. Выполнена оценка погрешностей измерений, влияющих на применимость предложенных условий при исследовании реальных материалов. Показано, что при значениях относительных погрешностей измерений, проводимых на современном оборудовании ($\varepsilon_F = 0,005$ для силы и момента, $\varepsilon_l = 0,0001$ для линейных размеров образца, $\varepsilon_x = 0,005$ для относительного перемещения параллельных граней кубического образца, $\varepsilon_\varphi = 0,01$ для угла поворота одного торца цилиндрического образца относительно другого), можно считать, что материал принадлежит к определенной кристаллографической системе, если значения выражений в левой и правой частях равенств (3.1), (3.6) различаются не более чем на 5 %.

Таким образом, на основе экспериментов на гидростатическое сжатие, растяжение-сжатие и кручение с достаточной точностью можно определить тип начальной упругой анизотропии материала. Для различных анизотропных материалов число экспериментов, достаточное для идентификации типа упругой симметрии, не превышает четырех. В этих экспериментах определяются значения некоторых упругих констант исследуемого материала. Для дальнейшей идентификации материала требуется найти только те значения упругих констант, которые для материала с определенным типом симметрии являются ненулевыми. Таким образом, предлагаемая программа предусматривает минимальное число экспериментов, требующихся для идентификации анизотропного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rychlewski Y. K.** On the detectability of constitutive laws in solid mechanics and physics // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симпоз. по проблемам механики деформируемых твердых тел, посвящ. 90-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 22–23 янв. 2001 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 67–73.
2. **Рыхлевский Я. К.** О законе Гука // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.
3. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
4. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 66. С. 113–125.
5. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 71. С. 82–96.
6. **Маркин А. А., Соколова М. Ю.** Вариант определяющих соотношений нелинейной термоупругости для анизотропных тел // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 170–175.
7. **Соколова М. Ю.** Структурные тензоры анизотропии в пространстве А. А. Ильюшина // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 7, вып. 2. Механика. С. 173–178.
8. **Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В.** Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.
9. **Маркин А. А.** Термомеханика упругопластического деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. М.: Физматлит, 2013.

10. **Norris A. N.** On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1989. V. 42, pt 3. P. 413–426.
11. **Hayes M. A.** A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media // *J. Materials Sci.* 1969. V. 4. P. 10–14.
12. **Jaric J. P.** On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material // *Mech. Res. Comm.* 1994. V. 21, iss. 2. P. 153–174.
13. **Цвелодуб И. Ю.** К определению упругих характеристик однородных анизотропных тел // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 3. С. 145–149.
14. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики.* 2002. Вып. 120. С. 149–160.
15. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
16. **Лохин В. В., Седов Л. И.** Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // *Седов Л. И. Механика сплошной среды.* М.: Наука, 1973. Т. 1. С. 473–503.
17. **Маркин А. А., Соколова М. Ю.** Определение типа исходной анизотропии и распространение частного постулата Ильюшина на начально анизотропные материалы // *Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: Сб. науч. тр. Тверь: Твер. гос. техн. ун-т,* 2000. Вып. 2. С. 66–71.
18. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
19. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 20/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 18/VIII 2014 г.*
