«Оптика атмосферы и океана», **34**, № 12 (2021)
DOI: 10.15372/AOO20211211

АДАПТИВНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

УДК 535.36, 535.015

Требования к динамическим характеристикам систем адаптивной оптики

В.П. Лукин*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 2.09.2021 г.

Проанализированы динамические (временные) характеристики систем адаптивной оптики (АО), работающих в турбулентной атмосфере. Использован аналитический расчет параметра Штреля на основе результатов теории распространения оптических волн в случайно-неоднородных средах. При анализе применяется модель активного зеркала-корректора. Традиционная система АО с конечным временем срабатывания описана как динамическая система постоянного запаздывания. В такой системе допустимая временная задержка сравнима со временем переноса турбулентных неоднородностей на расстояние, равное радиусу когерентности, ветром со средней скоростью. Получено выражение, связывающее в одной формуле важнейшие параметры системы: точность и частоту работы датчика волнового фронта, размер апертуры оптической системы, а также параметры атмосферы: параметр Фрида и скорость ветра с достижимым уровнем параметра Штреля. Проанализированы различия между двумя типами контуров слежения в системах АО: открытым и замкнутым. Показаны возможности «прогнозирующего» алгоритма для адаптивной коррекции.

Ключевые слова: атмосфера, адаптивная оптика, турбулентность, параметр Фрида, открытый и замкнутый контуры слежения, ветер, прогноз; atmosphere, adaptive optics, turbulence, Fried parameter, open and closed tracking loops, wind, forecast.

Введение

Достаточно много научных работ посвящено оценке потенциальных возможностей фазосопряженной адаптивной оптической системы [1–5]. В большинстве случаев предполагалось, что адаптивная система не имеет временного запаздывания, т.е. действует практически «мгновенно». Вместе с тем система линейной адаптивной оптики (АО) представляет собой типичную динамическую систему, поэтому она обладает конечным временем срабатывания. Время срабатывания системы состоит из времени получения первичной информации с помощью камеры датчика волнового фронта (ДВФ), времени вычисления управляющих воздействий для адаптивного зеркала, времени отработки сигнала зеркалом, включая переходные процессы механической конструкции используемого зеркала. Кроме того, для излучающих оптико-электронных систем необходимо добавить время, равное $2L/c$, – так называемый времяпролетный фактор. Здесь L – дистанция распространения оптического излучения; c – скорость света.

Цель настоящей работы – анализ требований к динамическим характеристикам фазовых систем АО, создаваемых для устранения влияния турбулентности атмосферы на флуктуации оптических волн. Рассмотрены вопросы, связанные с расчетом требований к ДВФ, используемому в системах АО, а именно к точности фазовых измерений, динамическому диапазону и частоте работы камеры датчика. Поставленная цель будет достигнута путем последовательного решения ряда задач, формирующих эти требования. В связи с этим настоящая работа состоит из четырех частей. В первой части исследованы возможности систем АО как динамических систем с точки зрения влияния временного запаздывания на качество коррекции искажений волнового фронта, обусловленных действием атмосферной турбулентности. При этом анализируются соотношения между точностью и частотой работы ДВФ, параметром Фрида для оптической волны и скоростью ветра на оптической трассе распространения волны. Во второй части при анализе эффективности работы системы АО рассмотрена модель корректирующего активного зеркала, учитывающая запаздывание при отработке этим зеркалом возникающих искажений. Третья часть посвящена сравнительному анализу двух типов построения систем АО: с открытым и замкнутым контурами слежения. Наконец, в заключительной части работы изучены вопросы применения прогнозирующей системы АО, использующей «прогноз» фазовых искажений в оптической волне на основе учета поперечного ветрового сноса турбулентных неоднородностей.

1. Временная эволюция фазового фронта

Корректирующая поверхность зеркала в системе АО формируется как волновой фронт,

* Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

присутствующий на входной апертуре системы, заведомо с некоторой временной задержкой. Поэтому традиционную систему АО можно рассматривать как систему с фиксированным временем запаздывания. В результате возникает проблема оценки допустимой временной задержки, обеспечивающей заданный уровень коррекции, или соответствующей полосы частот для всей адаптивной оптической системы.

Допустимая временная задержка зависит от того, какую задачу решает сама оптическая система, оснащенная адаптивным контуром. Будем характеризовать качество коррекции искажений оптического излучения в терминах изменения параметра Штреля для системы. При этом оптическая задача формулируется как коррекция турбулентных искажений оптической волны по алгоритму фазового сопряжения [1–3]. Заметим, что при фазовом сопряжении коррекция применяется только к флуктуациям фазы опорной волны в пределах передающей апертуры.

Рассмотрим задачу формирования оптического излучения в турбулентной атмосфере с применением системы АО [2, 3]. Предположим для определенности, что в качестве опорного источника используется сферическая волна, фазу которой мы измеряем и используем для управления. Далее исходим из того, что полный цикл работы системы АО представляет собой сумму из нескольких времен (измерение – расчеты – коррекция):

$$T = \tau_{\text{кам}} + \tau_{\text{комп}} + \tau_{\text{з}}. \qquad (1)$$

где $\tau_{\text{кам}}$ – время работы камеры; $\tau_{\text{комп}}$ – время работы компьютера; $\tau_{\text{з}}$ – время работы зеркала.

Далее будем считать, что основное время – $\tau_{\text{з}}$. Также будем исходить из условия, что мы работаем при «постоянном запаздывании», т.е. измеряем фазовые флуктуации в момент времени t, а заканчиваем цикл управления в момент времени $t+T$. Турбулентность будем рассматривать как процесс со стационарными первыми приращениями [6], поэтому эволюцию самой турбулентности, а также обусловленных ею искажений опишем как урезанный ряд Тейлора вида

$$S(\rho, t+T) = S(\rho, t) + \frac{\partial S}{\partial t}T. \qquad (2)$$

Согласно гипотезе Тейлора [6] временную производную флуктуаций фазы $\frac{\partial S}{\partial t}$ можно записать как скалярное произведение вектора скорости ветра $\mathbf{V}$ и пространственного градиента фазы $\nabla\rho S$, т.е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \nabla\rho S\mathbf{V}. \qquad (3)$$

Следует отметить, что при работе оптической системы в атмосфере уровень временных изменений фазовых искажений, обусловленных турбулентностью, определяется величиной дисперсии фазовых флуктуаций, рассчитанной на приемной апертуре. Эта величина [2, 3] равна половине структурной функции фазы на приемной апертуре диаметром D, т.е. для колмогоровской турбулентности $\sigma_S^2 = 3{,}44\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}$, где r_0 – параметр Фрида. Чтобы перейти к временной структурной функции от пространственной, сделаем замену $D = v\tau$, тогда среднеквадратическое отклонение флуктуаций фазы

$$\text{СКО} = 1{,}85\left(\frac{V\tau}{r_0}\right)^{5/6}, \qquad (4)$$

где V – модуль поперечной скорости ветра; τ – временная задержка.

Разделив это значение на 2π, получаем амплитуду фазовых отклонений, выраженную в долях длины волны излучения. Таким образом, за время τ в оптической волне формируются искажения за счет действия турбулентных неоднородностей, обусловленных движением воздуха (ветер). Предварительно оценим величину такого временного интервала, возникающие за который изменения фазовых искажений можно было бы считать не влияющими на качество формируемой оптической волны.

Качество формируемого излучения зависит от уровня остаточных искажений. Эти искажения должны соответствовать определенным требованиям – так называемым критериям, один из которых – *критерий Рэлея* [7]. Соответствие критерию Рэлея означает, что остаточные аберрации не превосходят четверти от длины волны, при этом число Штреля формируемого излучения превосходит 0,8. Согласно критерию Релея [7] считается, что оптическая система практически свободна от искажений, если амплитуда случайных флуктуаций разности хода волны $\frac{\text{СКО}}{2\pi}$, выраженная в долях длины волны, не превышает $1/4$ длины волны. Именно эта временная задержка и определяет длительность такой временной экспозиции, при которой обусловленные атмосферной турбулентностью изменения фазовых флуктуаций не влияют на качество работы оптико-электронной системы. Получаем, что допустимая временная задержка $\tau_{\text{Р}}$ определяющая предельное время экспозиции (или предельный интервал временного промежутка), при которой фазовые искажения оказываются незначительными, должна удовлетворять условию

$$\tau < \tau_{\text{Р}} = \left(\frac{2\pi}{7{,}4}\right)^{6/5} \cdot \left(\frac{r_0}{V}\right). \qquad (5)$$

Однако более точные расчеты показывают, что не для всех типов аберраций это справедливо, и для более строгого анализа необходимо знать число Штреля для больших или меньших значений волновой аберрации.

Существует более строгий критерий, так называемый *допуск Марешаля* [7], согласно которому величина амплитуды случайных флуктуаций разности хода $\frac{\text{СКО}}{2\pi}$ не должна превышать 1/14 от длины волны. Исходя из этого допустимая временная экспозиция, которая может считаться «короткой»:

$$\tau < \tau_\text{М} = \left(\frac{2\pi}{25{,}9}\right)^{6/5} \cdot \left(\frac{r_0}{V}\right). \tag{6}$$

Ранее в [2, 3, 8] была рассчитана зависимость динамических характеристик систем АО, работающих по алгоритму фазового сопряжения. При этом предполагалось, что имеет место задержка между моментом времени получения данных и моментом времени окончания управления в системе. Используя результаты расчетов выражения для средней интенсивности $<I(0)>_\text{турб}$ для сфокусированого лазерного пучка излучения [2, 6], запишем параметр Штреля

$$\text{St} = \frac{<I(0)>_\text{турб}}{I(0)_\text{вакуум}} = \frac{1}{\left[1 + 0{,}88\dfrac{\tau^2 V^2}{r_0^{5/3} R^{1/3}}\right]} \tag{7}$$

при условии $kR^2/F >> 1$. Здесь R – радиус апертуры; F – дистанция работы системы при фокусировке пучка, или длина фокуса оптической системы при формировании изображения; k – волновое число излучения; $I(0)_\text{вакуум}$ – среднее значение осевой интенсивности в вакууме.

Заметим, что формула (7) была получена в приближении использования «длинной» временной экспозиции, которая предполагает, что усреднение наблюдаемого (измеряемого) распределения интенсивности происходит по всем флуктуациям, в том числе и по таким, которые в целом смещают изображения (лазерный пучок).

При оценке эффективности применения системы АО будем исходить из достаточной малости величины дисперсии остаточных искажений $\sigma_\text{ос}^2$, которые имеют место в результате применения адаптивной коррекции:

$$\sigma_\text{ос}^2 = 1{,}76\frac{V^2\tau^2}{r_0^{5/3} R^{1/3}}. \tag{8}$$

Если использовать (7), тогда

$$\frac{\text{СКО}}{2\pi} = 0{,}15\frac{V\tau}{r_0^{5/6} R^{1/6}}. \tag{9}$$

Применив критерий Релея, получаем, что для обеспечения эффективной коррекции допустимая временная задержка между измерениями фазовых искажений и их коррекцией

$$\tau_\text{кР} \approx 1{,}18\left(\frac{r_0}{V}\right) \cdot \left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/6}, \tag{10}$$

т.е. она должна быть равна отношению радиуса когерентности к средней скорости ветра.

Если применить критерий (допуск) Марешаля к уровню остаточных искажений, тогда допустимое время задержки при коррекции

$$\tau_\text{кМ} \approx 0{,}34\left(\frac{r_0}{V}\right) \cdot \left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/6}. \tag{11}$$

Интересно отметить, что допустимые времена задержки в системах АО оказываются несколько больше, чем время «короткой экспозиции», согласно формулам (10) и (11). Это связано с тем, что время «короткой экспозиции» рассчитывалось для произвольной отдельно взятой точки на приемной апертуре, а при коррекции мы имеем дело с пространственным распределением фазовых флуктуаций, которые в различных точках на апертуре могут иметь различные значения. Этим обусловлено либо увеличение флуктуаций, либо их уменьшение, что в среднем уменьшает скорость нарастания остаточных искажений.

Следует отметить, что в приведенных формулах величина D зависит от того, какая оптическая задача решается с применением адаптивной системы. Если задача формирования изображения, тогда $D = 2R$ – диаметр приемной апертуры, строящей изображение. Если имеет место формирование лазерного пучка излучения, тогда D определяется как размер лазерного пучка или формирующей его передающей апертуры. Ранее в [3, 8] уже была сделана оценка требуемой полосы частот для фазосопряженных адаптивных систем. Существенное отличие приведенных здесь формул (8), (9) только в том, что в них удается сохранить зависимость допустимой временной задержки от размера приемной апертуры $2R$, что может являться доказательством ее большей физической обоснованности. Хочется отметить, что в [4, 5] не была конкретизирована динамическая модель системы АО; оценивалось только влияние временного запаздывания на качество коррекции. При этом временная задержка при управлении была параметром адаптивной системы.

2. Модель корректирующего активного зеркала

Как известно, фазовые системы АО могут быть построены в виде контуров двух типов: открытые и закрытые (замкнутые). Прежде всего, рассмотрим работу по схеме коррекции открытого типа, т.е. когда корректор стоит после датчика и ДВФ измеряет текущее значение фазовых искажений волнового фронта. Также будем считать, что при всех временных задержках остается верной гипотеза «замороженности» для фазовых флуктуаций, смещающая всю картину фазовых флуктуаций, обусловленных действием турбулентности, без эволюции, т.е.

$$S(\rho,\ t+T) = S(\rho + \mathbf{V}T,\ t), \tag{12}$$

где $\mathbf{V}(V_x, V_y)$ – вектор поперечной скорости ветра.

Следует отметить, что для выполнения расчетов по применению систем АО для коррекции турбулентных искажений нужна правдоподобная модель активного зеркала-корректора. Для определенности введем в рассмотрение функцию реакции зеркала вида

$$f(t) = 1 - \exp(-t/\tau_з). \tag{13}$$

Зеркало с функцией реакции вида (13) в начальный момент времени t находится в состоянии равновесия, когда $f(0) = 0$, а затем с ростом времени f стремится к 1. Предположим, что вся система АО работает с периодом времени T, причем будем считать, что основная временная задержка в системе АО связана именно с работой зеркала. Тогда за время одного периода T состояние зеркала изменится от нулевого до $f(T) = 1 - \exp(-T/\tau_з)$. Предположим также, что за время периода T корректирующее действие зеркала на фазовый фронт в оптической системе $S_к(\rho,\ t+T)$ можно заменить на коррекцию средним (за период времени T), т.е. сигналом вида

$$S_к(t+T) = \frac{S(t)}{T}\int_0^T \left[1 - \exp(-z/\tau_з)\right]dz. \tag{14}$$

Следовательно, в результате коррекции в первый период времени имеем остаточные искажения на зеркале вида

$$\delta S(\rho,\ t+T) = \left[S(\rho,\ t+T) - S(\rho,\ t)\right] + \frac{S(\rho,\ t)}{T}\int_0^T \exp(-z/\tau_з)dz. \tag{15}$$

При вычислении интеграла (15) воспользуемся определением нижней неполной гамма-функции вида

$$\Gamma(m,\ x) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^x \exp(-t)t^{m-1}dt, \tag{16}$$

где m – параметр; x – аргумент неполной гамма-функции (16).

При $m = 1$ формула (16) записывается как

$$\Gamma(1,\ x) = \int_0^x \exp(-t)dt.$$

В итоге

$$\int_0^T \exp(-z/\tau_з)dz = \tau_з \int_0^{T/\tau_з} \exp(-y)dy = \tau_з\Gamma(1,\ T/\tau_з). \tag{17}$$

Используя связь [9] между гамма-функцией и вырожденной гипергеометрической функцией Гаусса, получаем

$$\Gamma(1,\ T/\tau_з) = \Gamma(1) - \gamma(1,\ T/\tau_з),$$

$$\gamma(1,\ T/\tau_з) = \left(\frac{T}{\tau_з}\right){}_1F_1(1,\ 2;\ -T/\tau_з).$$

Далее воспользуемся одним из свойств вырожденной гипергеометрической функции Гаусса [9]:

$${}_1F_1(1,\ 2;\ z) = \frac{\exp(z) - 1}{z},$$

тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T \exp(-z/\tau_з)dz = \left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1 - \exp(-T/\tau_з)\right]. \tag{18}$$

Суммируя все расчеты, приходим к следующему выражению для остаточных фазовых искажений (на первом интервале работы системы АО) после применения коррекции (14) в условиях реализации алгоритма «постоянного запаздывания»:

$$\Delta S = S(\rho, t+T) - S(\rho, t)\left\{1 - \left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1 - \exp(-T/\tau_з)\right] = \right.$$
$$\left. = \left[S(\rho, t+T) - S(\rho, t)\right] + \left(\frac{\tau_з}{T}\right)S(\rho, t)\left[1 - \exp(-T/\tau_з)\right]\right\}. \tag{19}$$

Если положить $\tau_з = 0$, т.е. если предположить, что зеркало «мгновенно» отрабатывает сигнал коррекции, получаем из (19) случай коррекции по типу «постоянного запаздывания» [3, 8], при этом остаточные искажения выражаются как

$$\Delta S = S(\rho,\ t+T) - S(\rho,\ t). \tag{20}$$

В противоположность этому случаю для больших величин времени $\tau_з$ качество коррекции, согласно (19), падает. Какое-либо улучшение за счет коррекции будет реализовываться только когда имеет место малое время срабатывания зеркала по сравнению с периодом обновления информации, т.е. по сравнению с T.

Из (19) получаем, что:

если $\tau_з = T$, то

$$\delta S(T) \approx \left[S(\rho,\ t+T) - S(\rho,\ T)\right] + 0{,}64S(\rho, T);$$

если $\tau_з = T/2$, то

$$\delta S(T) \approx \left[S(\rho,\ t+T) - S(\rho,\ T)\right] + 0{,}43S(\rho, T);$$

если $\tau_з = T/10$, то

$$\delta S(T) \approx \left[S(\rho,\ t+T) - S(\rho, T)\right] + 0{,}1S(\rho,\ T).$$

Получаем, что с увеличением быстродействия работы зеркала дополнительная ошибка, обусловленная реактивностью действия корректирующего зеркала, которая «сохраняется» на зеркале, будет уменьшаться.

3. Открытый и закрытый (замкнутый) контуры в системах АО

3.1. Открытый контур

Рассмотрим далее последовательность состояний фазы в системе АО открытого типа как результат работы и ДВФ, и корректирующего зеркала:

в конце первого временного периода остаточные искажения за счет реактивности зеркала из (19)

$$\Delta S(T)=S(\rho,t)\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з); \qquad (21)$$

в начале второго периода датчик измеряет временное приращение фазы, на зеркале имеются остаточные искажения вида (21), в итоге на зеркало будет подан новый сигнал коррекции вида

$$S_к(\rho,\ t+2T)=\delta S(\rho,t+T)\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[1-\exp(-z/\tau_з)\right]dz=$$

$$=\delta S(2T)+\delta S(T)\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з). \qquad (22)$$

Таким образом, можно считать, что за время одного цикла T работы системы АО корректирующая фаза $S_к(\rho,\ t+T)$ «в среднем» отрабатывается активным оптическим элементом (зеркалом) как

$$S_к(\rho,\ t+T)=\frac{S(\rho,\ t)}{T}\int\limits_0^T\left[1-\exp(-z/\tau_з)\right]dz. \qquad (23)$$

Формула (23) представляет собой среднее значение корректирующей фазы, сформированное в течение одного временного цикла, в предположении, что используется «прогнозирующий» алгоритм коррекции [8]. Зеркало в итоге все недоработки «собирает» на себя, поэтому оно постоянно находится в неравновесном состоянии. Но поскольку погрешности отработки зеркала имеют разные знаки, то при большом динамическом диапазоне зеркала этот процесс остается устойчивым. Далее, используя формулы (21)–(23), запишем выражение для структурной функции $D_{\Delta S}(\rho_1,\rho_2)$ остаточных фазовых искажений после коррекции:

$$D_{\Delta S}(\rho_1,\ \rho_2)=\left\langle\left\{\left[S(\rho_1-\mathbf{V}T,\ t)-S(\rho_2-\mathbf{V}T,\ t)\right]-\right.\right.$$

$$-\left[S(\rho_1,\ t)-S(\rho_2,\ t)\right]+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]\times$$

$$\left.\left.\times\left[S(\rho_1,\ t)-S(\rho_2,\ t)\right]\right\}^2\right\rangle. \qquad (24)$$

Здесь скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по ансамблю случайных флуктуаций поля показателя преломления.

В результате вычислений (усреднений) в (24) получаем

$$D_{\Delta S}(\rho_1,\ \rho_2)=2D_S(\rho_1-\rho_2)+2D_S(\mathbf{V}T)+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\times$$

$$\times\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2D_S(\rho_1-\rho_2)-D_S(\rho_1-\rho_2+\mathbf{V}T)-$$

$$-D_S(\rho_1-\rho_2-\mathbf{V}T)+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[D_S(\rho_1-\rho_2+\mathbf{V}T)+\right.$$

$$\left.+D_S(\rho_1-\rho_2-\mathbf{V}T)-2D_S(\mathbf{V}T)-2D_S(\rho_1-\rho_2)\right]. \qquad (25)$$

В результате преобразований в (25) величина остаточных искажений

$$D_{\Delta S}(\rho_1,\ \rho_2)\approx\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2D_S(\rho_1-\rho_2)+$$

$$+2D_S(\mathbf{V}T)-2\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]D_S(\mathbf{V}T). \qquad (26)$$

Нетрудно показать из (26), что, если использовать «быстрое» зеркало, у которого $\left(\frac{\tau_з}{T}\right)<<1$, ошибка коррекции будет минимальна и равна $2D_S(\mathbf{V}T)$. В других случаях, например когда $\tau_з = T$, дисперсия остаточных искажений оказывается примерно равной $0{,}4D_S(D)$. Таким образом, если зеркало будет очень медленным, то оно практически не корректирует искажения: выражение (26) сводится к $D_{\Delta S}(\rho_1,\ \rho_2)\approx 0{,}4D_S(\rho_1-\rho_2)$.

Требуемая частота работы ДВФ определяется скоростью изменения фазового распределения, т.е. соотношением радиуса Фрида и скорости ветра, тогда как качество коррекции будет зависеть от того, насколько быстро управляемое зеркало успевает отработать сигнал коррекции между двумя соседними измерениями фазового фронта с помощью ДВФ. При работе системы АО в открытом контуре естественным требованием является то, что зеркало должно успевать отрабатывать сигнал коррекции за время между соседними циклами работы ДВФ. Поэтому при работе в открытом контуре необходимо:

1) согласовать уровень точности измерения фазы с помощью ДВФ с допустимым уровнем остаточных искажений, а это (при известной величине r_0) определяет требуемое число мод при коррекции;

2) обеспечить скорость отработки (частоту работы) зеркала выше частоты работы ДВФ;

3) согласовать саму частоту работы ДВФ с погрешностью измерений в ДВФ.

Отметим, что открытый контур имеет абсолютную устойчивость с точки зрения ДВФ, поскольку в нем нет накопления остаточных искажений, влияющих на датчик, по мере работы системы. А вот замкнутый контур накапливает ошибки при работе, и в нем растет энтропия. Поэтому такой режим работы может быть неустойчивым и в таком контуре ДВФ должен работать на частоте, согласованной с точностью измерений.

Итак, остаточные искажения фазы в системе АО будут складываться из атмосферной части, которая будет постоянно обновляться, и из остатков от работы зеркала. В итоге за N периодов работы текущее остаточное искажение представляет собой сумму

$$S_{ост}=\delta S(0)+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]\sum_{j=1}^{N}\delta S(jT), \qquad (27)$$

где $\delta S(0)$ – начальная разность фаз; $\delta S(jT)$ – текущие разности фаз, обусловленные действием атмосферы на j-м временном цикле работы.

Из (27) получаем, что дисперсия такого сигнала равна сумме дисперсий отдельных слагаемых:

$$<S_{\text{ост}}^2> = <(\nabla S\mathbf{V}T)^2> + \left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2 \left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2 \times$$
$$\times \sum_{i-1}^{N}\sum_{j=1}^{N} <\delta S(iT)\delta S(jT)>. \qquad (28)$$

Во втором слагаемом (28) можно суммирование заменить на усреднение по ансамблю реализаций остаточных искажений:

$$<S_{\text{ост}}^2> = <(\nabla S\mathbf{V}T)^2> \left\{1+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2 \left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2\right\}. \qquad (29)$$

Множитель, стоящий перед фигурной скобкой в (29), ранее уже был рассчитан в работе [8] в предположении, что зеркало работает мгновенно.

Далее рассчитаем для сигнала (27) структурную функцию остаточной фазы при работе в открытом контуре. При расчетах будем считать, что апертура системы АО много больше, чем величина $|\mathbf{V}T|$, тогда

$$D_{\Delta S}(\rho_1, \rho_2) \approx \left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2 \left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2 D_S(\rho_1-\rho_2) +$$
$$+ 2D_S(\mathbf{V}T) - 2\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right] D_S(\mathbf{V}T). \qquad (30)$$

Рассмотрим сначала работу «медленного» зеркала. Пусть $\tau_з = T$, тогда из (30) получаем

$$D_{\Delta S}(\rho_1, \rho_2) = \left[1-\exp(-1)\right]^2 D_S(\rho_1-\rho_2) +$$
$$+ 2D_S(\mathbf{V}T) - 2\left[1-\exp(-1)\right] D_S(\mathbf{V}T) \approx$$
$$\approx 0{,}4 D_S(\rho_1-\rho_2) + \frac{2}{e} D_S(\mathbf{V}T). \qquad (31)$$

Далее рассмотрим «быстрое» зеркало, у которого, например, $\tau_з = T/3$; получаем

$$D_{\Delta S}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{9}[1-\exp(-3)]^2 D_S(\rho_1-\rho_2) +$$
$$+ 2D_S(\mathbf{V}T) - \frac{2}{3}[1-\exp(-3)] D_S(\mathbf{V}T) \approx$$
$$\approx \frac{1}{9} D_S(\rho_1-\rho_2) + \frac{4}{3} D_S(\mathbf{V}T). \qquad (32)$$

В открытом контуре частота работы ДВФ определяется соотношением радиуса Фрида и скорости ветра, однако высокое качество коррекции можно получить только для быстрых зеркал. Кроме того, динамический диапазон работы такого зеркала должен быть большим. При определении требуемой частоты измерений в системах АО необходимо руководствоваться оценкой изменений во времени, происходящих в любой точке волнового фронта. Это было рассчитано на основе формул (25) и (26). В открытом контуре при периоде работы системы, равном T, остаточный уровень искажений определяется как при работе на одном шаге. Поэтому такая система должна «стартовать» при уровне минимально возможных искажений. В открытом контуре ДВФ постоянно измеряет изменения фазового фронта, а зеркало корректирует их частично ввиду своей инерционности.

3.2. Замкнутый контур

Далее сравним работу систем АО в замкнутом и в открытом контурах работы. Открытый контур обладает абсолютной устойчивостью, поскольку в нем нет повторного измерения остаточных фазовых искажений. А вот замкнутый контур накапливает ошибки, и их измеряет ДВФ, поэтому в такой системе растет энтропия и режим работы системы может быть неустойчивым. Если система работает в замкнутом контуре, то при работе ДВФ на частоте выше, чем частота Гринвуда, этот датчик будет практически измерять разность между отработанным сигналом и данными предыдущих измерений, поскольку за это время в атмосфере еще не накопился достаточный разностный сигнал. Это косвенно может служить основой для повышения частоты работы ДВФ.

Следует констатировать, что существуют различия между работой системы АО в открытом и в закрытом контурах коррекции. Так, открытый контур требует старта системы АО с уровня минимально возможных искажений в системе. В противоположность ему замкнутый контур — это многошаговая коррекция. При этом мы предполагаем, что зеркало как корректор работает постоянно, а датчик работает периодически с интервалом времени T. Время работы датчика и компьютера на каждом шаге будем считать много меньшим, чем время работы зеркала. Мы не будем здесь описывать действие корректора. На любом шаге уровень остаточных искажений представим как затухание искажений, измеренных на предыдущем шаге:

$$\Delta S((N+1)T) = \Delta S(NT)\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з). \qquad (33)$$

Самая большая неопределенность возникает на первом шаге коррекции, который с точки зрения измерений будем называть «нулевым», когда определяется начальное состояние фазового фронта, далее включается коррекция, и к моменту следующего измерения имеем некоторую недокомпенсацию первого измерения ΔS. На «первом» шаге требуется уже компенсировать и неполную компенсацию, и изменение фазового фронта для времени T, т.е.

$$S(T) = \Delta S(T) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_T T. \qquad (34)$$

На «втором» шаге также есть компенсация и дополнительное изменение фазового фронта:

$$S(2T) = \Delta S(T) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{2T} T \qquad (35)$$

и так далее. Запишем подобным образом действие системы, например, к началу четвертого шага, при этом текущий профиль фазового фронта представляется в виде

$$\left\{\left[\left(\Delta S(T)\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з)+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_T T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{2T} T\right]\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з)+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{3T} T\right\}\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-T/\tau_з)=$$

$$=\Delta S(T)\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\exp(-4T/\tau_з)+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_T T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\exp(-3T/\tau_з)+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{2T} T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^3\exp(-2T/\tau_з)+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{3T} T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^4\exp(-T/\tau_з). \quad (36)$$

В последнем выражении для анализа взято только 4 шага работы системы. Чем больше шагов (итераций) будет взято в учет, тем сильнее будет погашена начальная ошибка $\Delta S(T)$.

После определенного времени работы в замкнутом контуре имеет место установившийся режим остаточных искажений. По мере работы системы главную роль в остаточных искажениях будут играть самые «свежие» данные измерений. Перепишем выражение (36), описывающее работу зеркала, но сделаем это начиная с «хвоста» его работы, тогда остаточные искажения можно записать как

$$\delta S=\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_N T+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{N-1} T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{N-2} T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{N-3} T\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^3\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^3+\ldots . \quad (37)$$

Далее выразим временную производную фазовых искажений $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)$ через градиент фазы, используя следствие гипотезы «замороженной турбулентности»:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\nabla S\mathbf{V}=\frac{\partial S}{\partial x}V_x+\frac{\partial S}{\partial y}V_y. \quad (38)$$

Будем считать, что $V_y=0$, т.е. пренебрежем переносом под действием вертикальной компоненты ветра, оставим для анализа только поперечный ветровой вынос V_x. Тогда выражение (37) перепишется в виде

$$\delta S=\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_N V_xT+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{N-1} V_xT\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{N-2} V_xT\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{N-3} V_xT\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^3\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^3+\ldots . \quad (39)$$

Используя последнее выражение для остаточных фазовых искажений, можно рассчитать дисперсию этих фазовых искажений как функцию периода T, размера апертуры, радиуса Фрида и средней скорости ветра:

$$<(\delta S)^2>=<\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2>\cdot<V_x^2>T^2\left\{1+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)[1-\exp(-T/\tau_з)]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2+\ldots\right\}. \quad (40)$$

Выражение (40) как функция отношения $\frac{\tau_з}{T}$ для $\left(\frac{\tau_з}{T}\right)<1$ представляет собой ряд затухающих составляющих. Отметим здесь ее некоторую особенность: в замкнутом контуре должны быть согласованы величины T и $\tau_з$. Если, например, зафиксировать величину $\tau_з$, а затем слишком сильно уменьшить T, то может начаться даже рост дисперсии остаточных фазовых флуктуаций.

При расчете величины $<\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2>$ допустимо использовать различную точность расчета, учитывая в разложении фазовых флуктуаций только ограниченный набор модовых составляющих. Самый простейший расчет при учете первых шести модовых составляющих флуктуаций фазы [8] дает выражение для градиента фазы

$$<\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2>=\frac{4}{R^2}<a_2^2>+\frac{48}{R^2}<a_4^2>+\frac{24}{R^2}<a_6^2>, \quad (41)$$

где $<a_2^2>$ — дисперсия наклона волнового фронта по оси X; $<a_4^2>$ — дисперсия флуктуаций дефокусировки; $<a_6^2>$ — дисперсия флуктуаций астигматизма.

Согласно [10, 11] дисперсию отдельных модовых составляющих можно рассчитать через отношение R/r_0:

$$<a_2^2>\approx 0{,}448\left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3},\ <a_4^2>\approx 0{,}023\left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3},$$

$$<a_6^2>\approx 0{,}0432\left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3}. \quad (42)$$

В итоге, суммируя (39) и (40), получаем, что дисперсия случайного наклона по оси X

$$<\delta S^2>\approx 3{,}94<V_x^2>r_0^{-5/3}R^{-1/3}T^2\left\{1+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]+\left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2\left[1-\exp(-T/\tau_з)\right]^2+\ldots\right\}; \quad (43)$$

СКО, выраженное в длинах волны,

$$\frac{\text{СКО}}{2\pi}\approx 0{,}96T\sqrt{<V_x^2>}r_0^{-5/6}R^{-1/6}. \quad (44)$$

Если взять следующие параметры оптического эксперимента: $\tau_з = T$, $r_0 = 5$ см, $D/r_0 = 8$, среднеквадратическое значение скорости ветра $\sqrt{<V_x^2>} = 5$ м/с, то оказывается, что по критерию Рэлея допустимая временная задержка для зеркала должна быть не более 3,7 мс, т.е. частота работы ДВФ и зеркала должны быть не ниже 270 Гц при работе в замкнутом контуре.

Отметим, что, увеличивая быстродействие работы зеркала по сравнению со временем цикла T, можно добиться более высокого уровня коррекции в системе, не повышая частоту работы датчика.

4. Коррекция на основе прогноза «ветрового сноса»

Можно сравнить достигнутый результат с результатами применения «прогнозирующей» коррекции на основе использования только среднего значения скорости ветра. При этом остаточный уровень коррекции для системы с открытым контуром будет выражаться как

$$\delta S(\rho,\, t+T) = S(\rho + \mathbf{V}T,\, t) - S(\rho + \mathbf{V}_0 T,\, t) + \frac{S(\rho + \mathbf{V}_0 T,\, t)}{T}\int_0^T \exp(-z/\tau_з)dz, \qquad (45)$$

причем эта коррекция использует при «прогнозе» только среднее значение скорости ветра $\mathbf{V}_0$. Легко показать, что остаточные искажения будут определяться величиной флуктуаций скорости ветра $\delta\mathbf{V}$:

$$D_{\Delta S}(\rho_1,\, \rho_2) = 2D_S(\rho_1 - \rho_2) + 2D_S(\delta\mathbf{V}T) + \left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2 \times \left[1 - \exp(-T/\tau_з)\right]^2 D_S(\rho_1 - \rho_2) - D_S(\rho_1 - \rho_2 + \delta\mathbf{V}T) - D_S(\rho_1 - \rho_2 - \delta\mathbf{V}T) + \left(\frac{\tau_з}{T}\right)\left[D_S(\rho_1 - \rho_2 + \delta\mathbf{V}T) + D_S(\rho_1 - \rho_2 - \delta\mathbf{V}T) - 2D_S(\delta\mathbf{V}T) - 2D_S(\rho_1 - \rho_2)\right]. \qquad (46)$$

При условии, что размер апертуры анализа много больше, чем величина $|\delta\mathbf{V}T|$, выражение (46) можно упростить:

$$D_{\Delta S}(\rho_1,\, \rho_2) \cong 2D_S(\delta\mathbf{V}T) + \left(\frac{\tau_з}{T}\right)^2 \left[1 - \exp(-T/\tau_з)\right]^2 D_S(\rho_1 - \rho_2). \qquad (47)$$

Использование «быстрого» зеркала (когда $\tau_з = T/3$) может уменьшить почти на порядок величину второго слагаемого в (47). Тогда уровень остаточных искажений можно контролировать исходя из $D_S(\delta\mathbf{V}T)$, рассчитанной уже по флуктуациям скорости ветра [8].

Следует отметить, что при применении «прогнозирующей» коррекции необходимо проводить измерения волнового фронта в опорной волне в области, большей, чем размер передающей или приемной апертуры, на величину $\mathbf{V}T$, причем всегда эта величина $|\delta\mathbf{V}T|$, которую можно назвать дистанцией «прогноза», не должна быть больше, чем масштаб корреляции для фазовых флуктуаций. Этот масштаб будет зависеть от того, сколько модовых составляющих корректирует зеркало, поскольку с увеличением номера моды уменьшается соответствующий ей масштаб корреляции. Поэтому при коррекции достаточно большого числа модовых составляющих прогноз [12] «ветрового сноса» на расстояние больше, чем радиус когерентности, по-видимому, не будет эффективным.

Заключение

В настоящей работе проведен аналитический расчет параметра Штреля для систем АО как динамических систем. В расчетах применены вычисления флуктуаций оптической волны, прошедшей через слой турбулентной атмосферы, на основе выводов из теории распространения оптических волн в случайно-неоднородных средах [2, 6, 12]. При описании отражающей поверхности активного корректирующего зеркала используется модель временной эволюции, учитывающая запаздывание, связанное с инерцией зеркала.

Показано, что в системе АО с конечной полосой частот (или с конечным временем срабатывания) допустимая временная задержка должна быть сравнима с отношением радиуса когерентности для оптической волны к средней скорости ветра. На основе теоретических вычислений получено выражение, связывающее в одной формуле важнейшие параметры системы: точность измерений и требуемую частоту работы ДВФ, размер апертуры оптической системы, а также параметр Фрида и скорость ветра с достижимым уровнем параметра Штреля. На основе выполненных аналитических расчетов показано принципиальное различие между двумя типами слежения в системах АО: с открытым и с замкнутым контурами. Показана эффективность применения прогнозирующей системы АО, использующей «прогноз» на основе учета ветрового сноса турбулентных неоднородностей.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИОА СО РАН.

1. *Hardy J.W.* Active optics: A new technology for the control of light // Proc. IEEE. 1978. V. 66. P. 651–697.
2. *Лукин В.П.* Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
3. *Лукин В.П., Миронов В.Л.* Динамические характеристики адаптивных оптических систем // Квант. электрон. 1985. Т. 12, № 9. С. 1959–1962.
4. *Greenwood D.P.* Bandwidth specification for adaptive optics systems // J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 390–393.
5. *Greenwood D.P., Fried D.L.* Power spectra requirements for wave-front-compensative systems // J. Opt. Soc. Am. 1976. V. 66, N 3. P. 193–206.

6. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. Москва: Наука, 1976. 277 с.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 720 с.
8. *Lukin V.P.* Dynamics of adaptive optical systems // J. Opt. Soc. Am. A. 2010. V. 27, N 11. P. A216–A222.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
10. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Am. A. 1976. V. 66. P. 207–211.
11. *Kellerer A., Tokovinin A.* Atmospheric coherence time in interferometry: definition and measurement // Astron. Astrophys. 2006. N 10. P. 1–8.
12. *Лукин В.П.* Формирование оптических пучков и изображений на основе применения систем адаптивной оптики // Усп. физ. наук. 2014. Т. 184, вып. 6. С. 599–640.

V.P. Lukin. **Requirements for the dynamic characteristics of adaptive optics systems.**

The dynamic (temporal) characteristics of adaptive optics systems operating through a turbulent atmosphere are analyzed. An analytical calculation of the Strehl parameter is used based on the results of the theory of optical wave propagation in randomly inhomogeneous media. The analysis uses a model of the active correcting mirror. A traditional adaptive optics system with a finite response time is described as a dynamic constant lag system. In such a system, the admissible time delay turns out to be comparable with the time of transport of turbulent inhomogeneities through the radius of coherence by the average wind speed. An expression is derived which connects all the most important parameters of the system: the accuracy and frequency of the wavefront sensor, the size of the aperture of the optical system, the parameters of the atmosphere: the Fried parameter and the wind speed with an achievable level by the Strehl parameter. Differences between open and closed loops in AO systems are analyzed. The possibilities of the "predictive" algorithm for adaptive correction are shown.