

3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.  
 4. Ковалев М. П., Народецкий М. З. Расчет высокоточных шарикоподшипников. — М.: Машиностроение, 1980.

Поступила 1/VII 1987 г.

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Г. М. Куликов  
 (Гамбов)

Теория многослойных оболочек, построенная на основе статических или кинематических гипотез, приобрела наибольшую популярность [1—5], что объясняется физической наглядностью подхода и относительной простотой решения конкретных практических задач. Существующие подходы не позволяют, однако, одновременно описать неоднородное распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета, обеспечить выполнение условий непрерывности для этих напряжений на поверхностях раздела слоев и граничных условий на внешних поверхностях оболочки.

В данной работе на основе независимых кинематических [1] и статических [6] гипотез построен математически обоснованный вариант теории многослойных анизотропных оболочек, в равной мере учитывающий упомянутые выше факторы. В качестве примера рассмотрена задача об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии перекрестно армированной цилиндрической оболочки.

1. Рассмотрим оболочку толщины  $h$ , составленную из  $N$  упругих анизотропных слоев постоянной толщины  $h_{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В качестве поверхности приведения выберем внутреннюю граничную поверхность  $\Omega$ , которую отнесем к системе криволинейных координат  $x^i$ . Здесь и в дальнейшем все индексы, за исключением  $k, m$ , принимают значения 1, 2. Координату  $z$  будем отсчитывать вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности приведения.

Положение произвольной точки в недеформированной оболочке определяем радиусом-вектором  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$ , в деформированной оболочке — радиусом-вектором  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + u_i^{(k)}\mathbf{r}^i + u_3^{(k)}\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор проекции точки на поверхность  $\Omega$ ,  $\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^i$  — векторы основного и взаимного координатных базисов,  $u_i^{(k)}$  — ковариантные компоненты вектора тангенциальных перемещений,  $u_3^{(k)}$  — нормальное перемещение точек  $k$ -го слоя.

На поверхностях раздела слоев  $z = \delta_{(m)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N - 1$ ) должны выполняться условия непрерывности для поперечных компонент тензора напряжений  $\sigma_{(k)}^{i3}, \sigma_{(k)}^{33}$  и компонент вектора перемещений

$$(1.1) \quad \sigma_{(m)}^{i3} = \sigma_{(m+1)}^{i3}, \quad \sigma_{(m)}^{33} = \sigma_{(m+1)}^{33};$$

$$(1.2) \quad u_i^{(m)} = u_i^{(m+1)}, \quad u_3^{(m)} = u_3^{(m+1)}.$$

Граничные условия на внутренней поверхности оболочки  $z = 0$  представим в форме

$$(1.3) \quad \sigma_{(1)}^{i3} = p_0^i, \quad \sigma_{(1)}^{33} = q_0.$$

На внешней поверхности оболочки  $z = h$  граничные условия имеют вид

$$(1.4) \quad \sigma_{(N)}^{i3} = p_1^i, \quad \sigma_{(N)}^{33} = q_1.$$

Воспользуемся далее кинематическими гипотезами, предложенными в [1]. Согласно [1], материал каждого слоя несжимаем в поперечном направлении и компоненты вектора тангенциальных перемещений  $k$ -го слоя оболочки линейны относительно нормальной координаты  $z$ :

$$(1.5) \quad u_i^{(k)} = v_i^{(k)} + (z - \delta_{(k-1)})\beta_i^{(k)}, \quad u_3^{(k)} = w.$$

Здесь  $v_i^{(k)}$  — тангенциальные перемещения точек «нижней» граничной поверхности  $k$ -го слоя;  $\beta_i^{(k)}$  — приращения тангенциальных перемещений в пределах  $k$ -го слоя.

Из непрерывности перемещений при переходе через поверхности раздела слоев и соотношений (1.5) следует

$$(1.6) \quad u_i^{(k)} = u_i + \sum_{m=1}^N \pi_{(km)} \beta_i^{(m)} + z \beta_i^{(k)},$$

где  $v_i^{(1)} = u_i$ ;  $\pi_{(km)}$  — элементы квадратной матрицы размером  $N \times N$ , у которой сумма элементов  $k$ -й строки равна нулю. Определим матрицу в виде

$$\|\pi_{(km)}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{(1)} & -\delta_{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{(1)} & h_{(2)} & -\delta_{(2)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h_{(1)} & h_{(2)} & h_{(3)} & \dots & h_{(N-1)} & -\delta_{(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что второе условие непрерывности (1.2) вследствие гипотезы о несжимаемости слоев оболочки в поперечном направлении выполняется автоматически.

Для поперечных касательных напряжений примем независимую аппроксимацию [6], обобщив ее на случай граничных условий (1.3), (1.4):

$$(1.7) \quad \sigma_{(h)}^{i3} = p_0^i + zh^{-1} (p_1^i - p_0^i) + f_{(0)}(z) \mu_{(0)}^i + f_{(h)}(z) \mu_{(h)}^i,$$

где  $f_{(0)}(z)$ ,  $f_{(h)}(z)$  — непрерывные на промежутке  $[0, h]$  функции, удовлетворяющие условиям

$$(1.8) \quad f_{(0)}(0) = f_{(0)}(h) = 0, \quad f_{(h)}(z) = 0, \quad z \in [0, \delta_{(h-1)}] \cup [\delta_{(h)}, h].$$

Ниже не накладывается никаких ограничений на вид функций  $f_{(0)}(z)$ ,  $f_{(h)}(z)$ , и лишь при решении конкретных задач будем полагать, что они суть квадратные параболы. Из соотношений (1.7), (1.8) видно, что поперечные касательные напряжения являются непрерывными функциями нормальной координаты всюду в области  $[0, h]$ . При этом на граничных поверхностях  $z = 0$ ,  $z = h$  они принимают заданные значения  $p_0^i$ ,  $p_1^i$ .

Таким образом, статическая гипотеза (1.7) позволяет описать эффект неоднородного распределения поперечных касательных напряжений по толщине пакета, не нарушая условий непрерывности (1.1) и граничных условий (1.3), (1.4).

**2.** Тангенциальные компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  и поперечные сдвиги  $\gamma_{i3}^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)}$  в случае простейшего нелинейного варианта теории оболочек в квадратичном приближении определим посредством формул

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= \mathbf{R}_{,i}^* \mathbf{R}_{,j}^* - \mathbf{R}_{,i} \mathbf{R}_{,j} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - 2b_{ij} w + \theta_i \theta_j + \\ &+ \sum_{m=1}^N \pi_{(km)} (\nabla_i \beta_j^{(m)} + \nabla_j \beta_i^{(m)}) + z \left[ \nabla_i \beta_j^{(k)} + \nabla_j \beta_i^{(k)} - b_i^\alpha \nabla_j \mu_\alpha - b_j^\alpha \nabla_i \mu_\alpha + \right. \\ &+ \left. 2b_i^\alpha b_{j\alpha} w - \sum_{m=1}^N \pi_{(km)} (b_i^\alpha \nabla_j \beta_\alpha^{(m)} + b_j^\alpha \nabla_i \beta_\alpha^{(m)}) \right] - z^2 (b_i^\alpha \nabla_j \beta_\alpha^{(k)} + b_j^\alpha \nabla_i \beta_\alpha^{(k)}), \\ \gamma_{i3}^{(k)} &= \mathbf{R}_{,i}^* \mathbf{R}_{,3}^* - \mathbf{R}_{,i} \mathbf{R}_{,3} = \rho_i^{(k)} - \theta_i, \quad \theta_i = -b_i^\alpha u_\alpha - w, i. \end{aligned}$$

Здесь индекс, следующий после запятой, означает дифференцирование по соответствующей координате;  $\nabla_i$  — символ ковариантного дифференцирования на поверхности  $\Omega$ ;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности приведения. Полагая в соотношениях (2.1)  $\beta_i^{(k)} = \theta_i$  и учитывая упомянутое выше свойство матрицы  $\|\pi_{(km)}\|$ ,

приходим к деформационным соотношениям классической теории Кирхгофа — Лява [7]. Если принять  $\hat{\rho}_i^{(h)} = \beta_i$ , то получим деформационные соотношения теории оболочек типа Тимошенко [8].

Уравнения равновесия оболочки выведем из смешанного вариационного принципа Рейсснера

$$(2.2) \quad \delta U = \delta A_1^* + \delta A_2^*,$$

который открывает естественный путь сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек, попутно разрешая известные противоречия, содержащиеся в исходной системе независимых кинематических и статических гипотез (1.6), (1.7). Здесь  $A_1^*$  — работа внешних поверхностных нагрузок;  $A_2^*$  — работа внешних контурных усилий, а вариацию функционала  $U$  представим в форме

$$(2.3) \quad \delta U = \int_{\Omega} \int_{\delta_{(h-1)}}^{\delta_{(h)}} \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\delta_{(h-1)}}^{\delta_{(h)}} (\sigma_{(h)}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(h)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(h)} \delta \sigma_{(h)}^{\alpha\beta} + \sigma_{(h)}^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3}^{(h)} + \gamma_{\alpha 3}^{(h)} \delta \sigma_{(h)}^{\alpha 3} - \delta W_{(h)}) \sqrt{\frac{g}{a}} dz \right] \sqrt{a} dx^1 dx^2,$$

где  $g, a$  — дискриминанты пространственного метрического тензора и метрического тензора поверхности приведения;  $W_{(h)}$  — упругий потенциал  $k$ -го слоя оболочки:

$$(2.4) \quad W_{(h)} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta\omega\gamma}^{(h)} \sigma_{(h)}^{\alpha\beta} \sigma_{(h)}^{\omega\gamma} + c_{\alpha\beta}^{(h)} \sigma_{(h)}^{\alpha 3} \sigma_{(h)}^{\beta 3}); \quad \sqrt{g/a} = 1 - 2Hz + Kz^2;$$

$H, K$  — средняя и гауссова кривизны поверхности  $\Omega$ ;  $a_{\alpha\beta\omega\gamma}^{(h)}, c_{\alpha\beta}^{(h)}$  — тангенциальные и поперечные сдвиговые податливости  $k$ -го слоя. Отметим для справки, что  $c_{\alpha\beta}^{(h)} = 4a_{\alpha 3 \beta 3}^{(h)}$ .

Вводя  $W_{(h)}$  из (2.4) в формулу (2.3), после стандартной вариационной процедуры получим выражение для вариации функционала  $U$ :

$$(2.5) \quad \delta U = \int_{\Omega} \int_{\delta_{(h-1)}}^{\delta_{(h)}} \left\{ (-\nabla_{\alpha} T^{\alpha\omega} + b_{\alpha}^{\omega} N^{\alpha}) \delta u_{\omega} + (-\nabla_{\alpha} N^{\alpha} - b_{\alpha\omega} T^{\alpha\omega}) \delta w + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N (-\nabla_{\alpha} \Phi_{(k)}^{\alpha 3} + Q_{(k)}^3) \delta \beta_{\omega}^{(k)} + \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} (\gamma_{\alpha 3}^{(k)} - c_{\alpha\omega}^{(k)} \sigma_{(k)}^{\omega 3}) [f_{(0)}(z) \delta \mu_{(0)}^{\alpha} + \right. \\ \left. + f_{(k)}(z) \delta \mu_{(k)}^{\alpha}] \sqrt{\frac{g}{a}} dz \right\} \sqrt{a} dx^1 dx^2 + \oint_{\Gamma} \left[ T_{\nu\nu} \delta u_{\nu} + T_{\nu t} \delta u_t + N_{\nu 3} \delta w + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N (\Phi_{\nu\nu}^{(k)} \delta \beta_{\nu}^{(k)} + \Phi_{\nu t}^{(k)} \delta \beta_t^{(k)}) \right] ds_t;$$

$$(2.6) \quad T^{ij} = \sum_{k=1}^N T_{(k)}^{ij}, \quad Q^i = \sum_{k=1}^N Q_{(k)}^i, \quad S^{ij} = \sum_{k=1}^N S_{(k)}^{ij},$$

$$N^i = Q^i - S^{\alpha i} \theta_{\alpha}, \quad \Phi_{(h)}^{ij} = M_{(h)}^{ij} + \sum_{m=1}^N \pi_{(mh)} T_{(m)}^{ij},$$

$$T_{(k)}^{ij} = \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} - z b_{\alpha}^j \sigma_{(k)}^{i\alpha}) \sqrt{\frac{g}{a}} dz, \quad S_{(k)}^{ij} = \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} \sigma_{(k)}^{ij} \sqrt{\frac{g}{a}} dz,$$

$$M_{(k)}^{ij} = \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} - z b_{\alpha}^j \sigma_{(k)}^{i\alpha}) z \sqrt{\frac{g}{a}} dz, \quad Q_{(k)}^i = \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} \sigma_{(k)}^{i3} \sqrt{\frac{g}{a}} dz$$

( $T_{\nu\nu}, \dots, \Phi_{\nu t}^{(h)}, u_{\nu}, \dots, \beta_t^{(h)}$  — физические составляющие соответствующи-

щих тензоров и векторов в системе координат  $s_t, s_v$ , связанной с граничным контуром  $\Gamma$ ).

Вычисляя вариацию работы внешних нагрузок и подставляя найденные значения  $\delta A_1^*$ ,  $\delta A_2^*$  вместе с  $\delta U$  из (2.5) в вариационное уравнение (2.2), после несложных преобразований, согласно [8, 9], получим уравнения равновесия оболочки в удельных усилиях и моментах

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\alpha i} - b_\alpha^i N^\alpha &= p_0^i - p_*^i, \quad \nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\omega} T^{\alpha\omega} = q_0 - q_*, \\ \nabla_\alpha \Phi_{(k)}^{\alpha i} - Q_{(k)}^i &= -h_{(k)} p_*^i \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ p_*^i &= (1 - 2hH + Kh^2) p_1^i, \quad q_* = (1 - 2hH + Kh^2) q_1, \end{aligned}$$

соответствующие им граничные условия

$$\begin{aligned} T_{\nu\nu} &= \bar{T}_{\nu\nu}^* \quad \text{или} \quad u_\nu = \bar{u}_\nu^*, \quad T_{\nu t} = \bar{T}_{\nu t}^* \quad \text{или} \quad u_t = \bar{u}_t^*, \\ N_{\nu 3} &= \bar{Q}_{\nu 3}^* \quad \text{или} \quad w = \bar{w}^*, \\ \Phi_{\nu\nu}^{(k)} &= \bar{\Phi}_{\nu\nu}^{(k)*} \quad \text{или} \quad \beta_\nu^{(k)} = \bar{\beta}_\nu^{(k)*}, \quad \Phi_{\nu t}^{(k)} = \bar{\Phi}_{\nu t}^{(k)*} \quad \text{или} \quad \beta_t^{(k)} = \bar{\beta}_t^{(k)*}, \end{aligned}$$

а также, учитывая (2.4), интегральные соотношения

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} (\gamma_{i3}^{(k)} - c_{i\alpha}^{(k)} \sigma_{(k)}^{\alpha 3}) f_{(0)}(z) (1 - 2zH + Kz^2) dz &= 0, \\ \int_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} (\gamma_{i3}^{(k)} - c_{i\alpha}^{(k)} \sigma_{(k)}^{\alpha 3}) f_{(k)}(z) (1 - 2zH + Kz^2) dz &= 0. \end{aligned}$$

Как видно из формул (2.8), соотношения упругости для поперечных касательных напряжений выполняются интегрально по толщине  $k$ -го слоя и одновременно по толщине пакета, тем самым построен непротиворечивый с точки зрения смешанного вариационного принципа нелинейный вариант теории многослойных анизотропных оболочек, учитывающий неоднородное распределение компонент тензора напряжений по толщине оболочки.

3. Рассмотрим осесимметричную деформацию тонкой многослойной анизотропной оболочки вращения. Поверхность  $\Omega$  отнесем к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1, \alpha_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. В этом случае соотношения (2.1), (2.6)–(2.8) существенно упрощаются. После пренебрежения членами  $k_i z$  по сравнению с единицей, сохранение которых не увеличивает точности окончательных результатов, деформационные соотношения (2.1) запишем в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{(ij)}^{(k)} &= E_{(ij)} + \sum_{m=1}^N \pi_{(km)} K_{(ij)}^{(m)} + z K_{(ij)}^{(k)}, \\ E_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{du_1}{d\alpha_1} + k_1 w + \frac{1}{2} \theta_{(1)}^2, \quad E_{(22)} = k_2 w - \rho u_{(1)} + \frac{1}{2} \theta_{(2)}^2, \\ 2F_{(12)} &= \frac{1}{A_1} \frac{du_{(2)}}{d\alpha_1} + \rho u_{(2)} + \theta_{(1)} \theta_{(2)}, \quad K_{(11)}^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_{(1)}^{(k)}}{d\alpha_1}, \\ K_{(22)}^{(k)} &= -\rho \beta_{(1)}^{(k)}, \quad 2K_{(12)}^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_{(2)}^{(k)}}{d\alpha_1} + \rho \beta_{(2)}^{(k)}, \\ \theta_{(1)} &= k_1 u_{(1)} - \frac{1}{A_1} \frac{dw}{d\alpha_1}, \quad \theta_{(2)} = k_2 u_{(2)}, \quad \rho = -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{dA_2}{d\alpha_1}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{(ij)}^{(k)}, \dots, \theta_{(i)}$  — физические составляющие соответствующих тензоров и векторов;  $k_i$  — кривизны координатных линий;  $A_i$  — параметры Ламэ. Аналогичные упрощения следует провести с уравнениями равновесия (2.7), удельными усилиями и моментами (2.6) и интегральными соотношениями упругости (2.8).

Структура исходных уравнений нелинейной теории многослойных анизотропных оболочек довольно сложна. Точные решения удается получить в редких случаях, поэтому будем ориентироваться на их численное решение на ЭВМ. С этой целью введем вектор решений размерности  $4N + 6$ :

$$(3.2) \quad \mathbf{Y} = [T_{(11)}, N_{(1)}, \Phi_{(11)}^{(1)}, \dots, \Phi_{(11)}^{(N)}, T_{(12)}, \Phi_{(12)}^{(1)}, \dots, \Phi_{(12)}^{(N)}, \\ u_{(1)}, w, \beta_{(1)}^{(1)}, \dots, \beta_{(1)}^{(N)}, u_{(2)}, \beta_{(2)}^{(1)}, \dots, \beta_{(2)}^{(N)}]^T.$$

Ввод вектора решений, согласно формуле (3.2), дает возможность представить разрешающие уравнения задачи в матричной форме. Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

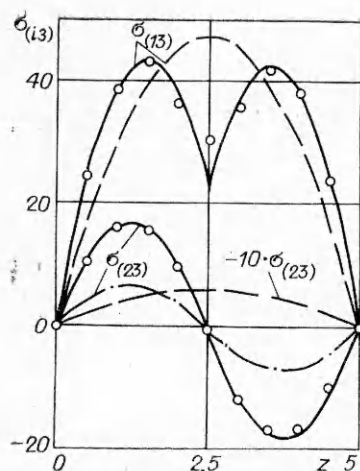
$$(3.3) \quad \frac{1}{A_1} \frac{d\mathbf{Y}}{d\alpha_1} = \mathbf{F}(\alpha_1, \mathbf{Y})$$

(выражения для компонент вектора  $\mathbf{F}$  здесь не приводятся). Первые  $2N + 3$  уравнений системы (3.3) следуют из уравнений равновесия (2.7) с учетом равенства  $S_{(ij)} = T_{(ij)}$ , другая группа из  $2N + 3$  уравнений непосредственно вытекает из деформационных соотношений (3.1). Поперечные удельные усилия  $Q_{(i)}^{(h)}$ , фигурирующие в правых частях системы (3.3), могут быть выражены через компоненты вектора решений с помощью интегральных соотношений упругости (2.8).

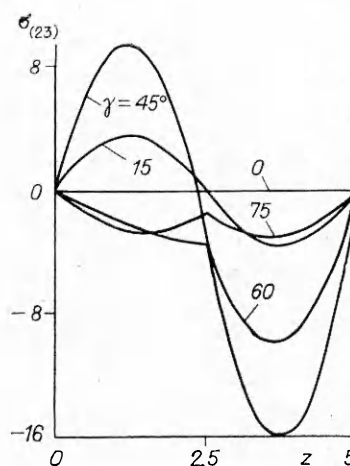
Алгоритм численного решения сформулированной задачи был реализован в виде набора стандартных процедур на алгоритмическом языке ПЛ/1(0). Все численные расчеты выполнены на ЭВМ ЕС 1060.

4. В качестве примера рассмотрим перекрестно армированную цилиндрическую оболочку, один из торцов которой перемещается на заданное расстояние  $u_0$ . Слои уложены антисимметричным образом с углами армирования  $\gamma_k = (-1)^{k-1}\gamma$ . Задачу численно реализуем для двухслойной оболочки с геометрическими параметрами  $h = 5$  мм,  $R_0 = l = 100$  мм ( $R_0$  — радиус,  $l$  — длина оболочки), изготовленной из борозпоксидного композита. Механические характеристики композита представлены в [10]. Полагаем, что торцы оболочки жестко заделаны, а осевое перемещение  $u_0 = 1$  мм.

На рис. 1 показано распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета в сечении оболочки, расположенном на расстоянии 10 мм от торца, при угле армирования  $\gamma = 30^\circ$ . Численные результаты, представленные сплошными кривыми, получены путем интегрирования нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3). Штриховые кривые соответствуют расчетам на основе теории оболочек типа Тимошенко [8], штрихпунктирные — уточненной теории Тимошенко [9], в основу которой также положена статическая гипотеза (1.7), однако порядок разрешающих уравнений в этой теории не зависит от числа слоев. Точками нанесены результаты решения задачи методом конечных элементов [11], где оболочка рассматривалась с позиций нелинейной теории упругости. Как видим, напряжения  $\sigma_{(13)}$  распределены по толщине пакета по закону, близкому к параболическому, однако на границе раздела слоев наблюдается значительное отклонение от закона квадратной параболы. Что касается напряжений  $\sigma_{(23)}$ , то они вообще имеют непараболический характер распределения, который постулируется в подавляющем большинстве уточненных теорий многослойных оболочек. В рассматриваемой задаче закон их распределения весьма близок к синусоидальному. При этом порядок величин  $\sigma_{(13)}$ ,  $\sigma_{(23)}$  одинаков, что указывает на большой вклад эффекта анизотропии в общую картину напряженно-деформированного состояния перекрестно армированной оболочки. Любопытно отметить, что уточненная теория Тимошенко [9] достаточно хорошо характеризует закон распределения поперечных касательных напряжений  $\sigma_{(13)}$ . Полученные значения этих напряжений так близки к найденным с помощью разработанной здесь теории, что с точностью до масштаба изображения совпадают.



Р и с. 1



Р и с. 2

В заключение проанализируем характер изменения эпюр поперечных касательных напряжений  $\sigma_{(23)}$  в зависимости от угла армирования  $\gamma$ . Численные результаты представлены на рис. 2. Видно, что эпюры напряжений  $\sigma_{(23)}$  существенно зависят от угла армирования, причем качественные изменения претерпевает сам характер распределения этих напряжений по толщине оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жесткими заполнителями при конечных прогибах // ПМТФ.— 1964.— № 5.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.
3. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек // ПМ.— 1976.— Т. 12, № 11.
4. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 5.
5. Куликов Г. М. К теории многослойных пологих оболочек конечного прогиба // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 3.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // ДАН СССР.— 1984.— Т. 275, № 5.
7. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек.— Л.: Изд-во ЛГУ. 1964.— Т. 2.
8. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Численное решение задач статики геометрически нелинейных анизотропных многослойных оболочек вращения // Механика композит. материалов.— 1981.— № 3.
9. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Расчет радиальных шин на основе обобщенной теории Тимошенко // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 4.
10. Куликов Г. М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // ПМ.— 1986.— Т. 22, № 12.
11. Носатенко П. Я. Исследование геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек вращения методом конечных элементов.— М., 1984.— Деп. в ВИНТИ 21.03.84, № 1526—84.

Поступила 26/VI 1987 г.

УДК 539.3

### ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ РУЛОНИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко  
(Новосибирск)

1. В [1] рассмотрена прямая задача определения напряженного состояния цилиндрической трубы, полученной рулонированием тонкой гибкой оболочки. Упругопластическая модель деформирования таких