

давления по сравнению с экспериментальным, поэтому применение ее в рассматриваемых условиях представляется нецелесообразным.

Авторы выражают благодарность Г. Ф. Горбачевой за проведение численных расчетов.

Поступила 27 III 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Papetti R. A., Fujisaki M. The Rice and Walsh equation of state for Water.— «J. Appl. Phys.», 1968, vol. 39, N 12, p. 5412.
2. Замышляев Б. В., Менжулин М. Г. Интерполяционное уравнение состояния воды и водяного пара.— ИМТФ, 1971, № 3, с. 113.
3. Latter R. Temperature behavior of the Thomas—Fermi statistical model for atoms.— «Phys. Rev.», 1955, vol. 99, N 6, p. 1854.
4. Подурец М. А., Смаков Г. В., Трунин Р. Ф., Попов Л. В., Моисеев Б. Н. Сжатие воды сильными ударными волнами.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 2, с. 710.
5. Latter A., Latter R. Equation of state of water on the Thomas—Fermi model.— «J. Chem. Phys.», 1956, vol. 25, N 5, p. 1016.
6. Горбачева Г. Ф., Ельяшевич М. А., Романов Г. С., Скобля Н. С., Станциц Л. К. Расчет термодинамических свойств вещества по модели атома Томаса—Ферми.— «Вестн. БГУ», 1974, сер. 1, № 2, с. 62; Термодинамические свойства вещества по обобщенной статистической модели атома.— ТВТ, 1975, т. 13, № 1, с. 61.

УДК 531.663

#### ДЕФОРМАЦИЯ СВИНЦОВЫХ ДИСКОВ ПРИ УДАРЕ

В. К. Боболев, В. Л. Боднева, А. В. Дубовик

(Москва)

Рассматривается ударное воздействие с относительно малыми (1—3 м/с) скоростями на тонкий диск из несжимаемого вязкопластического материала, помещенный в зазор между параллельными шероховатыми поверхностями. Предполагается, что напряженное состояние прослойки близко к гидростатическому в течение времени удара, длительность которого ограничена вследствие упругой деформации элементов системы ударника. Математическая задача об определении полей напряжений, скоростей и температур в случае осесимметричной деформации диска сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Для некоторых случаев удара приведены численные расчеты, которые сравниваются с результатами опытов со свинцовыми образцами.

Случай плоской деформации прослойки из вязкопластического материала, помещенной между жесткими плитами, сдвигающимися с постоянной скоростью, рассмотрен в [1]. Напряженное состояние прослойки при том же условии о движении плит в случае осевой симметрии изучено в [2]. В данной работе принимается во внимание ударный характер нагружения и упругое сжатие элементов системы ударника, от которых зависят деформации и развивающееся давление удара.

Рассмотрим осевое сжатие тонкого ( $\delta_0 \ll R$ ,  $R$  — радиус;  $\delta_0$  — толщина) диска из вязкопластического материала, помещенного между параллельными шероховатыми плитами. После упрощений, следующих из малости отношения  $\delta/R$ , уравнения движения и неразрывности среды в

цилиндрической системе координат принимают вид

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{du}{dt}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{dv}{dt};$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

где  $u, v$  — компоненты скорости в радиальном и осевом направлениях соответственно;  $\sigma_i (i=r, \varphi, z)$ ,  $\tau_{rz}$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho$  — плотность материала.

Рассмотрим развитое вязкопластическое течение прослойки. Основываясь на картине напряженного состояния, найденной в [1] для случая плоской деформации, положим, что на контактных поверхностях касательные напряжения  $\tau_{rz}$  достигают предела текучести  $\tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$ , где  $\sigma_s$  — предел текучести при одноосном сжатии (считаем, что выполняется критерий текучести Мизеса). Положим, что внутри прослойки значения касательных напряжений много меньше нормальных.

Воспользуемся условием малости  $\delta/R$  и осредним по  $z$  в пределах от 0 до  $\delta$  уравнения движения (1). Учитывая, что при  $z=0, \delta$   $\tau_{rz} = \pm \tau_s$ , получаем

$$(2) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} - \frac{2\tau_s}{\delta} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi}{r} = \frac{d\bar{u}}{dt}.$$

В дальнейшем черточки над осредненными величинами опускаются.

Пусть  $w = \frac{d\delta}{dt} < 0$  — скорость осевого перемещения ударника. Полагая, что контактные поверхности остаются плоскими в течение времени удара, находим, что уравнение неразрывности удовлетворяется при следующих значениях средних по сечению слоя скоростей частиц

$$(3) \quad u = -\frac{wr}{2\delta}, \quad v = \frac{wz}{\delta}.$$

Известно [3], что для осесимметричного течения вязкопластического тела компоненты дивергента напряжений связаны с компонентами тензора скоростей деформации зависимостью

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \sigma'_i \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \left( \frac{\tau_s}{I} + \mu \right) \begin{pmatrix} D_i \\ D_{rz} \end{pmatrix};$$

$$D_r = D_\varphi = -\frac{1}{2} D_z = -\frac{w}{\delta}; \quad D_{rz} = 0; \quad I = -\frac{\sqrt{3}w}{\delta},$$

где  $\mu$  — пластическая вязкость материала, которая, как и  $\tau_s$ , в общем случае является функцией температуры, давления и скорости деформации [4].

Из (4) находим

$$(5) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z + \sigma_s - \frac{3\mu w}{\delta}.$$

Учитывая (1), (3) и (5), после интегрирования (2) при условии  $\sigma_r(R) = 0$  получаем

$$(6) \quad \sigma_r = \frac{2\tau_s}{\delta} (r - R) + \frac{\rho w^2 (r^2 - R^2)}{4\delta^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{d \ln |w|}{d \ln \delta} \right).$$

Среднее давление, действующее на ударник со стороны прослойки, выражено в виде

$$(7) \quad p = -\frac{2}{R^2} \int_0^R \sigma_z r dr = \sigma_s + \frac{2\tau_s R}{3\delta} - \frac{3\mu w}{\delta} + \frac{\rho w^2 R^2}{8\delta^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{d \ln |w|}{d \ln \delta} \right).$$

В (6), (7)  $\mu$  и  $\sigma_s$  следует рассматривать как эффективные значения вязкости и предела текучести вещества, осредненные по радиусу диска. Если последние не зависят от давления, температуры и скорости деформации, то можно полагать  $\mu = \mu_0$  и  $\sigma = \sigma_s^0$ . При  $\mu \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow 0$  из (7) находим значение среднего напряжения для жестко-пластического тела [4]. Считая, что контактные поверхности гладкие и второе слагаемое в (7) отсутствует, приходим к выражению, полученному в [2].

Рассмотрим случай удара по вязкопластической прослойке с относительно малыми скоростями  $|w_0|$ . Из (7) имеем

$$(8) \quad p = \sigma_s + \frac{2\tau_s R}{3\delta} - \frac{3\mu w}{\delta}.$$

Полагая, что перемещение центра тяжести ударника складывается из уменьшения толщины прослойки и упругого сжатия ударника, находим на основании закона Ньютона, что

$$(9) \quad \frac{d^2}{dt^2} (\delta - \delta_0 = \frac{pS}{k}) = \frac{pS}{M}, \quad S = \pi R^2.$$

Здесь  $k$  — суммарная жесткость элементов системы ударника, которая несколько зависит от энергии удара;  $M$  — масса ударника. При записи (9) считаем, что в момент  $t=0$  сжатие ударника незначительно по сравнению с толщиной диска, т. е. величина

$$d = \frac{\sigma_s S}{k\delta_0} \left( 1 + \frac{2R}{3\sqrt{3}\delta_0} - \frac{3\mu w_0}{\sigma_s \delta_0} \right) \ll 1.$$

Введем безразмерные переменные  $\tau = -w_0 t / \delta_0$ ,  $x = \delta_0 / \delta$ ,  $y = w / w_0$ ,  $P = p / \sigma_s$  и величины  $\alpha = \sigma_s S / k\delta_0$ ,  $\beta = \sigma_s S \delta_0 / M w_0^2$ ,  $\gamma = 2R / 3\sqrt{3}\delta_0$ ,  $\varepsilon = -3\mu w_0 / \sigma_s \delta_0$ .

Тогда параметры растекающейся при ударе прослойки можно определить из решения системы

$$(10) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} (x^{-1} - 1 - \alpha P) = \beta P, \quad P = 1 + \gamma x + \varepsilon xy,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x^2 y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -\beta(1 + \gamma + \varepsilon).$$

Система (10) приводится к дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$(11) \quad \alpha \varepsilon \frac{d}{dx} \left( y x^5 \frac{dy}{dx} \right) + y x^2 (\alpha \gamma x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 2\alpha \varepsilon x^3 y^3 + 2\alpha \gamma x^3 y^2 + \beta \varepsilon y x + \beta \gamma x + \beta = 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = -\beta(1 + \gamma + \varepsilon).$$

При  $\varepsilon = 0$  из (11) находим закон торможения ударника слоем жестко-пластического материала [5]

$$(12) \quad y = \frac{[(1 - \alpha \gamma)^2 - \alpha \beta \gamma^2 (x^2 - 1) - 2\beta \gamma \ln x - 2\alpha \beta \gamma (x - 1) - 2\beta (1 - x^{-1})]^{1/2}}{1 + \alpha \gamma x^2}.$$

В случае абсолютно жесткого ударника ( $\alpha = 0$ ) из (12) получаем

$$y = [1 - 2\beta\gamma \ln x - 2\beta(1 - x^{-1})]^{1/2}.$$

Перейдем к рассмотрению нагревания растекающейся прослойки. Для осесимметричного движения вязкопластической среды уравнение притока тепла при малой величине  $\delta/R$  имеет вид

$$(13) \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu I^2 + \tau_s I,$$

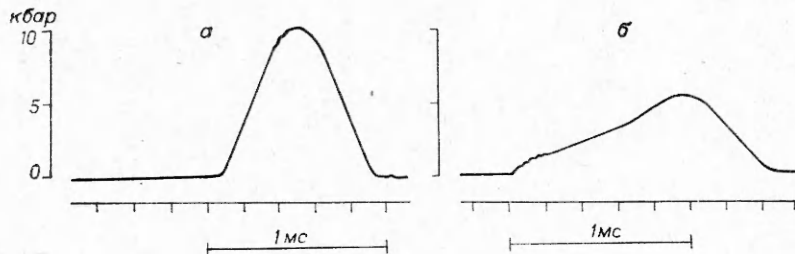
где  $\lambda$  и  $c_p$  — теплопроводность и удельная теплоемкость вещества. Если  $\rho c_p |w| \delta / 2\lambda \gg 1$ , то первым слагаемым в правой части (13) можно пренебречь практически вплоть до момента остановки ударника. Поставим задачу — вычислить максимальную величину температуры, осредненной по радиусу и толщине прослойки. Интегрируя (13) при условии  $T(\delta_0) = 0$ , получаем с учетом (4), что

$$(14) \quad T = T_1 + T_2 = \frac{\sigma_s}{\rho c_p} \ln x - \frac{3\mu w_0}{\rho c_p \delta_0} \int_1^x y(\xi) d\xi.$$

Здесь первое слагаемое  $T_1$  характеризует пластический разогрев среды, а второе  $T_2$  — вклад вязкого разогрева.

Система уравнений (10), (14) решалась численно на ЭВМ по стандартной программе методом Рунге—Кутты 4-го порядка. Точность расчета составляла 0,5—1%.

Обратимся к анализу экспериментальных данных, относящихся к удару по тонким дискам ( $\delta_0 = 1$  мм,  $R = 5$  мм) из технического свинца. Методика эксперимента аналогична описанной ранее в [6] в связи с исследованием закономерностей ударного разрушения тонких образцов из хрупких малопрочных материалов. Необходимые сведения о характере нагружения свинцовых дисков извлекались из анализа осциллограмм давление — время, полученных с помощью проволочного тензодатчика, а также путем измерения величины предельного сжатия прослойки  $x_h$  после удара. Исследуемые образцы помещались между плоскими торцами подшипниковых роликов диаметром 10 мм. Эксперименты проводились на вертикальном копре со свободно падающим грузом весом 10 кг, который наносил по роликам осевой удар со скоростью  $|w_0| = 1-3$  м/с.



Фиг. 1

На фиг. 1, а, б приведены осциллограммы записей давления при ударе в случае отсутствия вещества между роликами («холостой удар») и в опыте со свинцовым диском ( $|w_0| = 2$  м/с, метки времени — через 200 мкс). Наличие пластичной прослойки более чем в полтора раза увеличивает время удара и почти вдвое снижает максимальное давление. Из фиг. 1, б следует, что на кривой давление — время можно выделить

3 характерных участка. На коротком начальном участке длительностью  $t_1 \sim 100$  мкс наблюдается быстрый рост давления до величины около 1 кбар. Далее скорость роста давления несколько убывает и затем с момента  $t_2 \sim 600$  мкс вновь достигает приблизительно прежней величины. Указанный характер хода кривой может быть связан с тем, что в начале удара образец испытывает деформацию, близкую к упругой. При достижении предела текучести свинца во внутренней кольцевой зоне образец переходит в пластическое состояние [4]. С дальнейшим ростом давления пластическая зона расширяется, и с момента  $t_1$  практически во всей прослойке наступает развитое пластическое (вязкопластическое) течение. Среднее давление, соответствующее этому моменту, дается формулой (8). С уменьшением толщины диска сопротивление движению ударника быстро нарастает, и с момента  $t_2$  энергия груза преимущественно расходуется на сжатие элементов системы ударника. Дальнейший ход кривой на фиг. 1, б близко напоминает осциллограмму «холостого удара» (см. фиг. 1, а), причем время спада давления после максимальной величины  $p_m$  приблизительно одинаково в обоих случаях.

В табл. 1 представлены результаты измерений некоторых параметров удара в опытах со свинцовыми образцами. Здесь  $p_x$  и  $t_x$  — максимальное давление и время холодного удара;  $t_m$  — время достижения максимума давления  $p_m$  в опытах со свинцом. Расчеты, выполненные по (10) для случая  $\varepsilon=0$  (модель жестко-пластического тела), показывают (табл. 2), что измеренные значения  $p_m$  удовлетворительно совпадают с теоретическими, если положить значение  $\sigma_s=0,5$  кбар. Однако результаты расчетов  $x_k$  заметно расходятся с экспериментом.

Т а б л и ц а 1

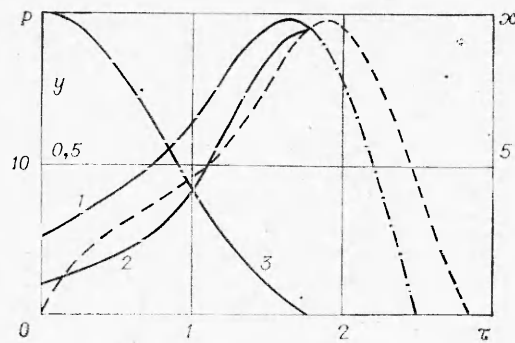
$ w_0 $ , м/с $k$ , кбар·см	1 130	1,5 150	2 150	3 160
$p_x$ , кбар	4,7	7,5	10,1	15,5
$t_x$ , мс	0,90	0,83	0,83	0,80
$p_m$ , кбар	1,6	2,8	5,3	12,3
$t_m$ , мс	0,96	1,07	0,94	0,75
$\ln x_k$	0,71	1,45	2,29	2,79

Т а б л и ц а 2

$ w_0 $ , м/с	1	1,5	2	3
$p_m$ , кбар	2,05	3,29	5,67	11,93
$t_m$ , мс	0,723	0,821	0,785	0,662
$\ln x_k$	0,478	1,065	1,681	2,475

Хорошее согласие рассчитанных и измеренных параметров удара наблюдается при расчете по модели вязкопластической среды (табл. 3), если для различных значений  $|w_0|$  использовать разные  $\sigma_s$  и  $\mu$ , оставляя их в рамках разумных величин, близких к найденным в эксперименте [2,7].

На фиг. 2 приведены рассчитанные из (10), (14) кривые изменения  $P$  (1),  $x$  (2) и  $y$  (3) в зависимости от  $\tau$  для случая  $|w_0|=2$  м/с ( $\alpha=0,0131$ ,  $\beta=0,0491$ ,  $\gamma=1,9245$ ,  $\varepsilon=2,4$ , так что  $d=0,0697$ ). Ход кривой  $P(\tau)$  близко совпадает с экспериментальной зависимостью (штрих), если принять



Фиг. 2

Таблица 3

$ w_0 $ , м/с	1	1,5	2	3
$\sigma_s$ , кбар	0,3	0,3	0,27	0,4
$\mu$ , П	$0,7 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$10^5$	$10^4$
$p_m$ , кбар	1,51	2,90	5,26	12,20
$t_m$ , мс	0,865	0,917	0,834	0,683
$\ln x_k$	0,708	1,487	2,240	2,738
$T_1$ , К	15,0	31,5	42,7	77,0
$T_2$ , К	23,8	68,6	178	105

неучитываемое в теории время начальной стадии удара  $\tau_1 = 0,2$  или  $t_1 = 0,1$  мс (участок кривой 1, показанный штрихпунктиром, построен по экспериментальным данным в предположении об упругой разгрузке элементов системы ударника).

В последовательности использованных в расчетах величин  $\sigma_s$  и  $\mu$ , которые являются осредненными в течение времени удара значениями предела текучести и вязкости материала прослойки, обнаруживается определенная закономерность. При малых скоростях удара 1—2 м/с

Таблица 4

$ w_0 $ , м/с	1,5	2	3
$k$ , кбар·см	1500	1500	1600
$p_m$ , кбар	3,06	7,02	30,96
$t_m$ , мс	0,805	0,696	0,474
$\ln x_k$	1,535	2,518	3,682

$\sigma_s$  и  $\mu \sim \text{const}$  и изменяются лишь в случае  $|w_0| = 3$  м/с, когда заметно увеличивается диапазон давлений и возрастает роль диссипативных эффектов. Так, если при расчете величины  $T$  для последнего случая использовать значение  $\mu = 10^5$  П, то вместо температуры  $105^\circ$  (табл. 3) получим температуру  $329^\circ$ , которая совпадает с температурой плавления свинца (при нормальном давлении). Поэтому представляется возможным связать увеличение  $\sigma_s$  при возрастании  $|w_0|$  преимущественно с упрочнением свинца, а уменьшение  $\mu$  — с нагреванием прослойки. Насколько важно принимать во внимание деформацию элементов системы ударника, видно из табл. 4, в которой приведены параметры удара, рассчитанные с величинами  $\sigma_s$  и  $\mu$ , указанными в табл. 3, но при условии, что коэффициент жесткости  $k$  ударника имеет значение 10 кбар·см.

Поступила 31 X 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников В. П. О сдавливании вязкопластического слоя жесткими плитами. — «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1963, № 4.
2. Haddow J. V. The compression of a thin disc. — «Int. J. Mech. Sci.», 1965, vol. 7, N 10.
3. Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М., изд. Моск. ун-та, 1970.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
5. Дубовик А. В., Боболев В. К. Предельное сжатие жидкой и пластической прослойки при соударении упругих тел. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 6.
6. Афанасьев Г. Т., Боболев В. К., Дубовик А. В. Деформация и разрушение тонкого диска при сжатии. — ПМТФ, 1971, № 3.
7. Справочник металлста. Т. 3. М., «Машиностроение», 1959.