

УДК 532.5.013.4, 537.84

УСТОЙЧИВОСТЬ НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. В. Проскурин

Алтайский государственный технический университет, 656038 Барнаул, Россия
E-mail: k210@list.ru

С использованием системы уравнений магнитной гидродинамики для несжимаемой жидкости исследована устойчивость течения между коаксиальными цилиндрами, возникающего под действием продольного градиента давления, в случае когда однородное магнитное поле направлено вдоль оси цилиндров. С использованием метода дифференциальной прогонки исследованы зависимости критических чисел Рейнольдса от величины электропроводности и напряженности внешнего магнитного поля. Установлено существование двух диапазонов значений электропроводности, в которых стабилизирующее влияние магнитного поля является наиболее существенным. Выявлено скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса и отщепление от нейтральных кривых замкнутых областей неустойчивости.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, устойчивость течений, электропроводящая вязкая жидкость, метод дифференциальной прогонки.

DOI: 10.15372/PMTF20200602

Введение. Исследования устойчивости течений в магнитном поле проводятся в течение длительного времени и представляют большой интерес при построении общей теории ламинарно-турбулентного перехода течений вязкой жидкости в каналах, изучении бифуркаций решений уравнения Навье — Стокса. Большое количество работ посвящено изучению устойчивости течения в плоском канале при наличии поперечного магнитного поля (течения Гартмана) начиная с основополагающей работы [1] и заканчивая новыми исследованиями [2–4]. Исследования устойчивости плоского течения при наличии продольного магнитного поля проводились в работах [5–11]. Устойчивость течения в коаксиальном канале при наличии продольного магнитного поля исследовалась в работе [12], в которой рассматривался случай малого влияния магнитного поля и узкого зазора между цилиндрами.

Целью настоящей работы является исследование линейной устойчивости рассматриваемого течения в широком диапазоне значений электропроводности жидкости при существенном влиянии магнитного поля. При этом предполагается изучить влияние на устойчивость кривизны канала в случае большой по сравнению с диаметром внутреннего цилиндра, ширины зазора. Результаты данного исследования могут представлять интерес при изучении ламинарно-турбулентного перехода в магнитогидродинамических течениях

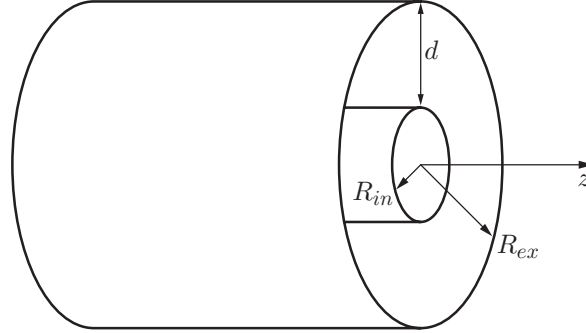


Рис. 1. Схема коаксиального канала

в цилиндрической геометрии, когда начальный рост возмущений является линейным, а также при постановке экспериментов и интерпретации их результатов.

1. Постановка задачи. Исследуемая конфигурация состоит из двух коаксиальных цилиндров (рис. 1). Ось z цилиндрической системы координат совпадает с осью цилиндров, r, φ — радиальная и азимутальная координаты. Между цилиндрами находится вязкая электропроводящая жидкость, которая течет под действием продольного градиента давления и профиль скорости которой является стационарным:

$$U = ar^2 + b \ln(r) + c,$$

$$a = \frac{2 \ln(1 + 1/\xi)}{1 + 2\xi - (1 + 2\xi + 2\xi^2) \ln(1 + 1/\xi)}, \quad b = -a \frac{1 + 2\xi}{\ln(1 + 1/\xi)}, \quad c = a \frac{\ln(\xi)(1 + 2\xi)}{\ln(1 + 1/\xi)}.$$

Здесь $\xi = R_{in}/d$ — параметр, определяющий геометрию задачи; U — продольная компонента скорости.

Система уравнений магнитной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{H},$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left(p + \text{Al} \frac{H^2}{2} \right) + \text{Al} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0,$$

где $\text{Re}_m = V_m d (4\pi\sigma/c^2)$ — магнитное число Рейнольдса; $\text{Al} = H_0^2 / (4\pi\rho V_m^2)$ — число Альфвена; $\text{Re} = V_m d / \nu$ — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость; d — ширина зазора между цилиндрами (принята в качестве масштаба длины); σ — электропроводность жидкости; V_m — среднерасходная скорость (принята в качестве масштаба скорости); c — скорость света; ρ — плотность жидкости; H_0 — напряженность внешнего магнитного поля (принята в качестве масштаба напряженности магнитного поля). В расчетах использовалось также магнитное число Прандтля $\text{Pr}_m = \text{Re}_m / \text{Re}$, прямо пропорциональное электропроводности. Выбор числа Гартмана в качестве параметра, определяющего влияние магнитного поля, как это сделано в работе [12], был бы менее удачен, так как $\text{Al} = Ha^2 / (\text{Pr}_m \text{Re}^2)$ и при увеличении Pr_m на несколько порядков уменьшается стабилизирующее влияние магнитных сил.

Решение системы уравнений (1) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad P = P_0 + q, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}, \mathbf{H}_0, P_0$ — стационарное решение; $\mathbf{v}, \mathbf{h}, q$ — возмущения скорости, магнитного поля и давления. Подставляя (2) в уравнения (1) и полагая возмущения малыми, получаем

линеаризованную систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}_0 &= (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U} &= -\nabla P + \text{Al}(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + \text{Al}(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{H}_0 + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решения системы (3) будем искать в виде

$$\{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} e^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (4)$$

где $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$ — амплитуды скорости; h_r, h_φ, h_z — амплитуды напряженности магнитного поля; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ — азимутальное волновое число; α — осевое волновое число; $C = X + iY$ — комплексная фазовая скорость. В случае если $Y > 0$, возмущение нарастает.

Подставляя (4) в (3), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд возмущений

$$D\omega_r = -q' + \text{Al}\alpha h_r + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{(r\omega_r)'}{r} \right)' - \frac{2\gamma}{r} \omega_\varphi \right]; \quad (5)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q' + \text{Al}\alpha h_\varphi + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right]; \quad (6)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + i\alpha \text{Al} h_z + \frac{1}{\text{Re}} \frac{(r\omega_z)'}{r}; \quad (7)$$

$$\Omega h_r = i\alpha \omega_r + \frac{1}{\text{Re}_m} \left[\left(\frac{(rh_r)'}{r} \right)' - \frac{2\gamma}{r} h_\varphi \right]; \quad (8)$$

$$\Omega h_\varphi = i\alpha \omega_\varphi + \frac{1}{\text{Re}_m} \left[\left(\frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right]; \quad (9)$$

$$\Omega h_z = i\alpha \omega_z + h_r U' + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{(rh_z)'}{r}; \quad (10)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma \omega_\varphi - i\alpha \omega_z; \quad (11)$$

$$\frac{(rh_r)'}{r} = -\gamma h_\varphi - i\alpha h_z,$$

где

$$D = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{\text{Re} r^2} + \frac{\alpha^2}{\text{Re}}, \quad \Omega = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{\text{Re}_m r^2} + \frac{\alpha^2}{\text{Re}_m}, \quad \gamma = \frac{im}{r}.$$

Порядок уравнения (5) понижается с помощью уравнения непрерывности (11). Имеем

$$\begin{aligned} D\omega_r &= -q' + \text{Al}\alpha h_r + \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{im}{r} \omega_\varphi' + \frac{im}{r^2} \omega_\varphi - i\alpha \omega_z' - \frac{2im}{r^2} \omega_\varphi \right), \\ D\omega_r &= -q' + \text{Al}\alpha h_r - \frac{1}{\text{Re}} \left(i\alpha \omega_z' + \frac{im}{r^2} (r\omega_\varphi)' \right). \end{aligned}$$

Используя уравнение $\text{div } \mathbf{h} = 0$, преобразуем уравнение (8) аналогичным образом. Тогда система (5)–(11) принимает вид

$$D\omega_r = -q' + i\text{Al}\alpha h_r - \frac{1}{\text{Re}} \left[i\alpha \omega_z' + \frac{\gamma}{r} (r\omega_\varphi)' \right]; \quad (12)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q + iAl\alpha h_\varphi + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{r\omega_\varphi}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right]; \quad (13)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + iAl\alpha h_z + \frac{1}{\text{Re}} \frac{(r\omega_z)'}{r}; \quad (14)$$

$$\Omega h_r = i\alpha\omega_r - \frac{1}{\text{Re}_m} \left[i\alpha h_z' + \frac{\gamma}{r} (rh_\varphi)' \right]; \quad (15)$$

$$\Omega h_\varphi = i\alpha\omega_\varphi + \frac{1}{\text{Re}_m} \left[\left(\frac{rh_\varphi}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right]; \quad (16)$$

$$\frac{i}{\alpha} \frac{(rh_r)'}{r} = h_z - \frac{i\gamma}{\alpha} h_\varphi; \quad (17)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z. \quad (18)$$

Для дальнейшего упрощения задачи введем новые функции

$$B = r\omega_r, \quad \Psi = rh_\varphi, \quad K = r\omega_\varphi, \quad M = \frac{\Psi'}{r} = \frac{(rh_\varphi)'}{r},$$

$$Z = r\omega_z', \quad S = rh_r, \quad \Phi = \frac{K'}{r} = \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}.$$

Тогда система (12)–(18) записывается следующим образом:

$$\frac{D}{r} B = -q' + \frac{i\alpha Al}{r} S - \frac{i\alpha}{r \text{Re}} Z - \frac{\gamma}{\text{Re}} \Phi,$$

$$\frac{D}{r} K = -\gamma q + \frac{i\alpha Al}{r} \Psi + \frac{1}{\text{Re}} \Phi' + \frac{2\gamma}{r^2 \text{Re}} B,$$

$$D\omega_z + U' \frac{B}{r} = -i\alpha q + i\alpha Al h_z + \frac{1}{r \text{Re}} Z',$$

$$\frac{\Omega}{r} S = \frac{i\alpha}{r} B - \frac{i\alpha}{\text{Re}_m} h_z' - \frac{\gamma}{\text{Re}_m} M, \quad \frac{\Omega}{r} \Psi = \frac{i\alpha}{r} K + \frac{1}{\text{Re}_m} M' + \frac{2\gamma}{\text{Re}_m r^2} S,$$

$$\frac{i}{\alpha r} S' = h_z - \frac{i\gamma}{\alpha r} \Psi, \quad \frac{B'}{r} = -\frac{\gamma}{r} K - i\alpha\omega_z, \quad \omega_z' = \frac{Z}{r}, \quad K' = \Phi r, \quad \Psi' = Mr.$$

Представим эти соотношения в матричном виде

$$\mathbf{W}' = M_1 \mathbf{W} + M_2 \mathbf{V}; \quad (19)$$

$$\mathbf{V}' = M_3 \mathbf{W} + M_4 \mathbf{V}, \quad (20)$$

$$\mathbf{W} = \{B, K, \omega_z, M, S\}, \quad \mathbf{V} = \{q, \Phi, Z, h_z, \Psi\},$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — матрицы коэффициентов. Граничные условия для скорости на твердых непроницаемых стенках имеют вид $\mathbf{v} = 0$. Стенки канала полагаются идеально электропроводящими. Из условия непрерывности нормальной компоненты магнитного поля следует, что на стенке канала $h_r = 0$, а из условия непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля следует $(rh_\varphi)'/r = 0$. Запишем граничные условия в виде

$$\mathbf{W} = 0 \quad \text{при} \quad r = \xi, \xi + 1. \quad (21)$$

Система уравнений (19), (20) с граничными условиями (21) позволяет решить задачу на собственные значения C .

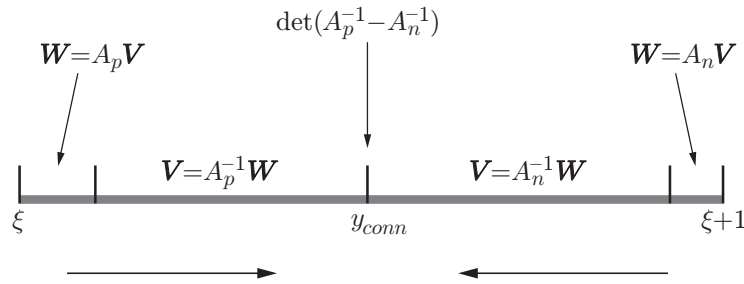


Рис. 2. Схема прогонки

2. Численный метод. Численное исследование задачи (19)–(21) затруднено, поскольку она содержит малый параметр Re^{-1} при старшей производной. Собственные функции такой задачи могут быстро осциллировать и иметь большие градиенты. Поэтому для решения задачи о гидродинамической устойчивости требуются либо специальные численные методы, например метод ортогонализации Годунова, либо ненасыщаемые численные методы. В настоящей работе применялся простой, универсальный и эффективный метод дифференциальной прогонки [13, 14], широко использовавшийся для решения задачи о гидродинамической устойчивости [15].

Метод дифференциальной прогонки заключается в том, что вводятся уравнения для подпространства решений

$$\mathbf{W} = A(y)\mathbf{V} \quad (22)$$

(A — матрица размером 5×5). Выражение (22) называется схемой прогонки. Поскольку на границе канала заданы граничные условия $\mathbf{W} = 0$, имеет место условие $A = 0$. Как и в работе [10], вводится обращенная схема прогонки

$$\mathbf{V} = A^{-1}\mathbf{W}, \quad (23)$$

которая использовалась в средней части канала, тогда как вблизи границ использовалась зависящая от граничных условий схема (22). В точках смены прогоночных соотношений проводилось обращение матрицы A . Схема прогонки показана на рис. 2.

Дифференцируя (22), (23), с использованием (19), (20) находим

$$A' = M_1 A + M_2 - A(M_3 A + M_4); \quad (24)$$

$$(A^{-1})' = M_4 A^{-1} + M_3 - A^{-1}(M_2 A^{-1} + M_1). \quad (25)$$

Уравнения (24), (25) интегрировались численно от границ канала к промежуточной точке y_{conn} , в которой выполняется условие непрерывности векторов \mathbf{V} и \mathbf{W} :

$$(A_p^{-1} - A_n^{-1})\mathbf{W} = 0, \quad (26)$$

где индексы p и n соответствуют матрицам A^{-1} , полученным путем интегрирования, проводимого от разных границ канала. Поскольку \mathbf{W} не равно тождественно нулю, условие разрешимости (26) можно записать в виде

$$\det(A_p^{-1}(C) - A_n^{-1}(C)) = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) решается с помощью итерационных методов, в настоящей работе использовался метод секущих.

3. Результаты вычислений. На рис. 3 приведена зависимость критического числа Рейнольдса от параметра ξ при $\text{Pr}_m = 0,01$, $\text{Al} = 0,001$ для азимутальных мод $m = 0, 1, 2, 3$. При $\xi = 4$ зазор между цилиндрами достаточно узкий и критические числа Рейнольдса

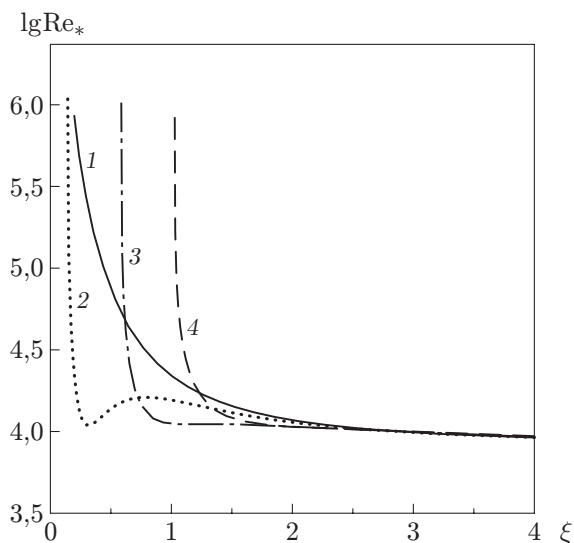


Рис. 3

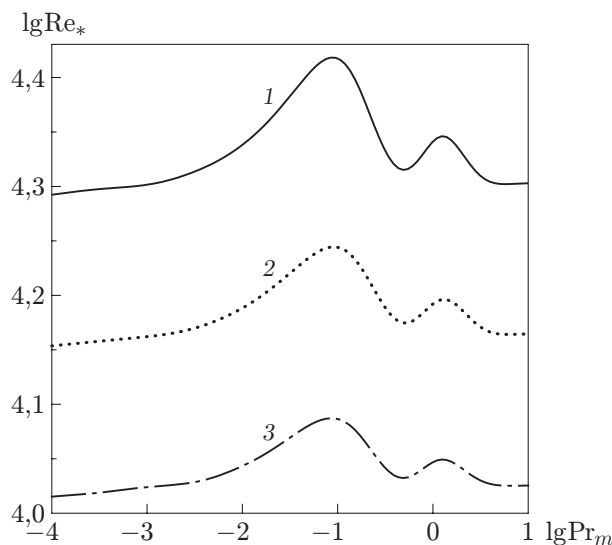


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от параметра ξ при $Pr_m = 0,01$, $Al = 0,001$ для различных азимутальных мод:

1 — $m = 0$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2$, 4 — $m = 3$

Рис. 4. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от магнитного числа Pr_m при $\xi = 1$, $Al = 0,001$ для различных азимутальных мод:

1 — $m = 0$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2$

для различных азимутальных мод приблизительно равны. Этот случай близок к случаю плоского течения Пуазейля, рассмотренному в работах [9–11]. При уменьшении значения ξ критические числа Рейнольдса для моды $m = 0$ монотонно увеличиваются. При этом моды $m = 1, 2$ становятся более опасными. Критические числа Рейнольдса для моды $m = 1$ при уменьшении параметра ξ имеют минимум при $\xi \approx 0,3$. При $\xi \rightarrow 0$ моды $m = 0, 1$ резко увеличиваются и течение становится устойчивым к малым возмущениям. В случае $m = 2$ такого выраженного минимума не наблюдается, при уменьшении ξ критические числа Рейнольдса меняются сначала медленно, а при $\xi < 1$ — быстро. Мода $m = 3$ аналогичным образом увеличивается при $\xi < 1,5$. Таким образом, при $\xi < 1$ неустойчивость течения определяется азимутальными модами $m = 1, 2$.

Рассмотрим зависимость критического числа Рейнольдса от магнитного числа Прандтля при $\xi = 1$, $Al = 0,001$ (рис. 4). При $Pr_m = 10$ кривые являются горизонтальными, что соответствует предельному случаю $Pr_m \rightarrow \infty$, а в случае $Pr_m = 10^{-4}$, близком к предельному случаю $Pr_m \rightarrow 0$, эти кривые имеют малый наклон. При $\lg Pr_m \approx -1$, $\lg Pr_m \approx 0,1$ кривые критических зависимостей имеют максимумы. В этих областях магнитное поле наиболее сильно подавляет развитие возмущений.

На рис. 5 приведена зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от числа Альфвена Al при $\xi = 1$, $\lg Pr_m = -1$ для азимутальных мод $m = 0, 1, 2$. Штриховкой на примере моды $m = 0$ показано положение области неустойчивости. Видно, что на начальном участке критические зависимости возрастают. Когда число Альфвена превышает некоторое значение, свое для каждой моды, скорость возрастания резко уменьшается. Далее, при некотором значении Al_* , кривые критических зависимостей начинают разворачиваться в направлении уменьшения числа Альфвена. Для моды $m = 2$ кривая вскоре становится практически вертикальной.

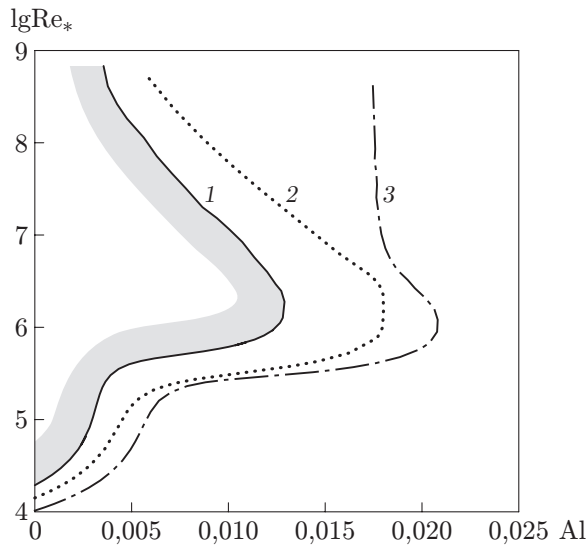


Рис. 5

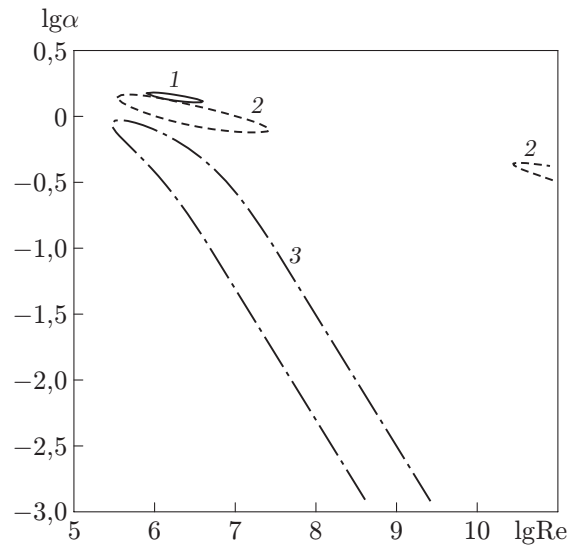


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от числа Альфвена Al при $\xi = 1$, $\lg Pr_m = -1$ для различных азимутальных мод:

1 — $m = 0$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2$; заштрихованная область — область неустойчивости

Рис. 6. Нейтральные зависимости при $Al = 0,012$, $\xi = 1$, $\lg Pr_m = -1$ для различных азимутальных мод:

1 — $m = 0$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2$

На рис. 6 приведены нейтральные зависимости при $Al = 0,012$, $\xi = 1$, $\lg Pr_m = -1$. Мода $m = 0$ образует замкнутую область неустойчивости, т. е. при значениях числа Рейнольдса больше некоторого значения течение становится устойчивым по отношению к малым осесимметричным возмущениям. Для моды $m = 1$ такая область неустойчивости также существует. При $Re > 10^{10}$ азимутальная мода $m = 1$ имеет вторую область роста. Для азимутальной моды $m = 2$ замкнутых нейтральных кривых не существует, при увеличении числа Рейнольдса область неустойчивости смещается в направлении малых α .

Заключение. В работе исследована устойчивость течения при промежуточном значении радиуса внутреннего цилиндра $\xi = 1$, при котором течение достаточно далеко как от плоского течения [9–11], так и от течения в случае внутреннего цилиндра очень малого радиуса, когда все азимутальные моды являются устойчивыми или имеют очень большие критические числа Рейнольдса. Рассмотрены зависимости критического числа Рейнольдса от магнитного числа Прандтля, пропорционального электропроводности. Установлено, что при $Pr_m > 10$, $Pr_m < 10^{-4}$ значения критического числа Рейнольдса близки к его значениям в предельных случаях $Pr_m \rightarrow \infty$, $Pr_m \rightarrow 0$ соответственно. Выявлены диапазоны значений магнитного числа Прандтля, при которых течение наиболее чувствительно к стабилизирующему влиянию магнитного поля. В этих диапазонах при увеличении напряженности магнитного поля критические числа Рейнольдса скачкообразно увеличиваются и существуют замкнутые нейтральные кривые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1955. V. 233. P. 105–125.

2. **Takashima M.** The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field // Fluid Dynamics Res. 1996. V. 17, N 6. P. 293–310.
3. **Gerard-Varet D.** Amplification of small perturbations in a Hartmann layer // Phys. Fluids. 2002. V. 14, N 4. P. 1458–1467.
4. **Yang Z., Hussain Z., Hussanan A., et al.** Instability of magnetohydrodynamic flow of Hartmann layers between parallel plates // AIP Adv. 2019. V. 9, N 5. 055003.
5. **Hunt J. C. R.** On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1966. V. 293. P. 342–358.
6. **Stuart J. T.** On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a co-planar magnetic field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1954. V. 221. P. 189–206.
7. **Велихов Е. П.** Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 36, № 4. С. 1192–1202.
8. **Ko Sung-Hwan.** On the stability of plane Poiseuille flow with a finite conductivity in an aligned magnetic field // J. Fluid Mech. 1968. V. 33, N 3. P. 433–443.
9. **Proskurin A. V., Sagalakov A. M.** A new branch of instability of the magnetohydrodynamic Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34, N 3. P. 199–201.
10. **Проскурин А. В., Сагалаков А. М.** Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 45–53.
11. **Proskurin A. V., Sagalakov A. M.** Stability of the Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field // Tech. Phys. 2012. V. 57, N 5. P. 608–614.
12. **Патудин В. М.** Автоколебания в МГД-течениях / В. М. Патудин, А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев, Н. И. Яворский. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007.
13. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 3. С. 542–545.
14. **Сапожников В. А.** Численное решение задач гидродинамической устойчивости: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1970.
15. **Гольдштик М. А.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.

*Поступила в редакцию 17/III 2020 г.,
после доработки — 13/IV 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.*
