

3. Tallmadge J. A. A withdrawal theory for Ellis model fluids.— *A I Ch E J.*, 1966, v. 12, N 5.
4. Adachi K., Spiers R. P., Wilkinson W. L. Free coating of viscoelastic and viscoplastic fluids onto a vertical surface.— *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, 1978, v. 3, N 3.
5. Ландау Л. Д. Собрание трудов. М.: Наука, 1969, т. 1.
6. Дерягин Б. В. О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосудов после их опорожнения, и теория нанесения фотоэмульсии при поливе киноплёнки.— *ДАН СССР*, 1943, т. 39, № 1.
7. Spiers R. P., Subbaraman C. V., Wilkinson W. L. Free coating of non-Newtonian liquids onto a vertical surface.— *Chem. Engng Sci.*, 1975, v. 30, N 4.
8. Groenvelde P., van Dortmund R. A. The shape of the air interface during the formation of viscous liquid films by withdrawal.— *Chem. Engng Sci.*, 1970, v. 25, N 10.
9. Шульман З. П., Байков В. И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979.
10. Spiers R. P., Subbaraman C. V., Wilkinson W. L. Free coating of a Newtonian liquid onto a vertical surface.— *Chem. Engng Sci.*, 1974, v. 29, N 3.
11. Hilderbrand R. E., Tallmadge J. A. A test of the withdrawal theory for Ellis fluids.— *Can. J. Chem. Engng*, 1968, v. 46, N 12.
12. Astarita G., Marrucci G., Palumbo G. Non-Newtonian gravity flow along inclined plane surface.— *Ind. Engng Sci. Fund.*, 1964, v. 3, N 4.
13. Carreau P. J., Bui Q. H., Leroux P. Wall effects in polymer flow on inclined plane.— *Rheol. Acta*, 1979, v. 18, N 5.
14. Dutta A., Mashelkar R. A. On slip effect in free coating of non-Newtonian fluids.— *Rheol. Acta*, 1982, v. 21, N 1.

Поступила 4/IV 1984 г.

УДК 532.78+532.542

НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ, ЗАСТЫВАЮЩЕЙ С ПОВЕРХНОСТИ ТРУБЫ, В УСЛОВИЯХ ДИССИПАТИВНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

С. В. Маклаков, А. М. Столин, С. И. Худяев

(Черноголовка)

Известны многие процессы в природе и технике, в которых течение жидкости и газов сопровождается фазовым превращением. Примером таких процессов могут служить аварийное переохлаждение трубопроводов [1], транспорт высокопарафинистых нефтей [2], движение магмы по дайке [3], обтекание тела высокоскоростным потоком газа [4] или имеющий аналогичное математическое описание электрический нагрев проводника в условиях фазового превращения [5]. В [4, 5] показано существенное влияние объемного тепловыделения на фазовый переход. Важная особенность в таких задачах связана с конкурирующим взаимодействием фазового перехода с химическим, джоулевым или диссипативным тепловыделением. Ранее рассматривалось влияние фазового перехода на критические условия теплового взрыва в плоской [6] и цилиндрической [7] области и его гидродинамического аналога при куэттовском течении [8].

В данной работе исследованы особенности фазового перехода в условиях напорного течения вязкой жидкости внутри круглой трубы бесконечной длины как в режиме течения с заданным градиентом давления, так и в режиме с заданным расходом. На стенке трубы задается либо постоянная температура, либо постоянный тепловой поток.

Показано, что во всей области параметров задача допускает стационарное решение. Определены стационарные профили температуры и скорости. В режиме с заданным градиентом давления и температурой на стенке в квазистационарном приближении дана диаграмма областей параметров, отвечающих характерным режимам течения: стационарным режимам с промежуточным положением фазовой границы, режимам закупорки трубы (полного фазового превращения) и режимам гидродинамического теплового взрыва [9]. Показано, что в случае заданного теплового потока на стенке режим с промежуточным положением фазовой границы отсутствует.

Исследованы особенности течения с заданным расходом. В этом случае всегда существует стационарный режим течения с промежуточным положением фазовой границы. При заданном тепловом потоке на стенке трубы возможно течение без твердой фазы. Получена расходно-напорная характеристика и обсуждается влияние на нее фазового перехода

1. Постановка задачи. Рассматривается фазовый переход первого рода в условиях напорного течения вязкой ньютоновской жидкости внутри трубы круглого сечения и бесконечной длины, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T_0 , меньшей, чем температура фазово-

го перехода T_* . В результате охлаждения жидкость затвердевает и образуется внутренняя поверхность раздела фаз $r = r_*$. Зависимость вязкости от температуры принимается по закону Аррениуса: $\eta = \eta_0 \exp(E/RT)$, где η_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации вязкого течения; R — универсальная газовая постоянная; T — температура.

Систему уравнений движения и теплового баланса с учетом диссипативного тепловыделения с граничными условиями можно записать в виде

$$(1.1) \quad r < r_*: \frac{1}{a_1} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\tau_*}{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial r};$$

$$(1.2) \quad \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_*) + b;$$

$$(1.3) \quad r > r_*: \frac{1}{a_2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r};$$

$$(1.4) \quad r = r_*: T = T_*, \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_*-0} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_*+0} - \rho_1 Q_* \frac{\partial r_*}{\partial t_*}, \quad v = 0;$$

$$(1.5) \quad r = 0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad r = r_1: T = T_{0z}$$

где r — текущий радиус; r_1 — радиус трубы; v — скорость жидкости; Q_* — теплота фазового перехода; $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2$ — соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности жидкой и твердой фаз; ρ_1 — плотность жидкости; τ_* — напряжение сдвига; $b = -\partial p/\partial z$ — градиент давления по длине трубы, который в дальнейшем принимается постоянным.

В безразмерных переменных

$$\Theta = \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad x = \frac{r}{r_1}, \quad \omega = \frac{\eta(T_*) v}{r_1^2 b}, \quad \tau = \frac{RT_*^2}{E} \frac{\lambda_1}{Q_* \rho_1 r_1^2} t_*, \quad x_* = \frac{r_*}{r_1}$$

и в приближении экспоненты по Франк-Каменецкому [10] ($RT_*/E \ll 1$) уравнения (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5) принимают вид

$$(1.6) \quad x < x_*: \varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 16\kappa \exp(-\Theta) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2;$$

$$(1.7) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp(-\Theta) \cdot x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + 1;$$

$$(1.8) \quad x > x_*: \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta}{\partial x};$$

$$(1.9) \quad x = x_*: \lambda \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=x_*+0} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=x_*-0} + \frac{\partial x_*}{\partial \tau}, \quad \Theta = 0, \quad \omega = 0;$$

$$(1.10) \quad x = 0: \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 1: \Theta = \Theta_0.$$

Параметры $\lambda, \kappa, \Theta_0, a, \varepsilon, \varepsilon_1$ и используемое ниже обозначение s определяются формулами

$$(1.11) \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \kappa = \frac{Er_1^4 b^2}{16RT_*^2 \lambda_1 \eta(T_*)}, \quad \Theta_0 = \frac{E}{RT_*^2} (T_0 - T_*),$$

$$a = \frac{a_2}{a_1}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda_1}{a_1 \rho_1 Q_*} \frac{RT_*^2}{E}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{\eta(T_*) Q_*} \frac{RT_*^2}{E}, \quad s = -\frac{\lambda \Theta_0}{2}.$$

Рассмотрим сначала стационарную задачу. Для решения стационарных уравнений (1.6)–(1.8) полезно сделать замену переменной, рекомендованную в [11, 12]: $\xi = x^2$. Тогда уравнения (1.6)–(1.8) с граничными

условиями (1.9), (1.10) после исключения градиента скорости имеют вид

$$(1.12) \quad \xi < \xi_* : \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} + \kappa \exp \Theta = 0;$$

$$(1.13) \quad \xi > \xi_* : \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} = 0;$$

$$(1.14) \quad \xi = \xi_* : \Theta = 0, \quad \Theta'_- = \lambda \Theta'_+;$$

$$(1.15) \quad \xi = 0 : d\Theta/d\xi = 0, \quad \xi = 1 : \Theta = \Theta_0,$$

где Θ'_- и Θ'_+ — предельные значения $d\Theta/d\xi$ слева и справа в точке $\xi = \xi_*$ ($\xi_* = x_*^2$).

Решение уравнений (1.11), (1.12) с граничными условиями (1.13), (1.14) найдено в [7]:

$$(1.16) \quad \xi_* < \xi < 1 : \Theta = \Theta_0 (1 - \ln \xi / \ln \xi_*);$$

$$(1.17) \quad 0 < \xi < \xi_* : \Theta = 2 \ln \left[\frac{4}{4 - q(1 - \xi^2/\xi_*^2)} \right], \quad \kappa \xi_*^2 = q(4 - q)/2;$$

$$(1.18) \quad \Theta'_- = -q/\xi_*, \quad \Theta'_+ = -\Theta_0/\xi_* \ln \xi_*, \quad q = -2s/\ln \xi_*.$$

Формулы (1.16)—(1.18) определяют решение задачи, причем параметр q может быть исключен согласно (1.18).

2. Режим течения с заданным градиентом давления. При течении жидкости с заданным градиентом давления можно предположить три пути развития процесса: известный из практики случай закупорки трубы (полное фазовое превращение), установившееся течение с промежуточным положением фазовой границы и гидродинамический тепловой взрыв (ГТВ). Этим термином в [9] названо явление потери стационарного решения задачи при достаточно больших градиентах давления. В дальнейшем [13] обращалось внимание на идеализированность теоретического анализа [9]. Однако, как было указано в [13], рассмотренная модель ГТВ [9] представляет интерес как предельный случай, позволяющий рассчитать для труб достаточно большой длины критические условия гидродинамического воспламенения (перехода от низкотемпературного режима с малым расходом к высокотемпературному режиму с большим расходом).

Отметим, что настоящая задача сводится к задаче о ГТВ [9] при температуре стенки T_0 , равной температуре фазового превращения T_* , т. е. $\Theta_0 = 0$. Очевидно, что предельный случай $\kappa \rightarrow \infty$ (достаточно большие тепловыделения) соответствует взрывному режиму. В другом предельном случае $\Theta_0 \rightarrow -\infty$ (большие степени охлаждения) реализуется режим закупорки.

Анализ решения (1.16)—(1.18) уравнений (1.12)—(1.15), описывающих стационарное распределение температуры жидкости при течении с заданным градиентом давления, получен в [7] в связи с вопросом о тепловом взрыве в условиях фазового перехода. Здесь мы приведем некоторые результаты из [7].

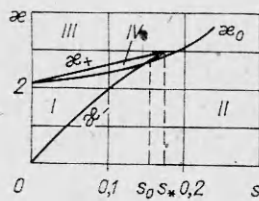
Подставив q из (1.18) в последнее выражение (1.17), можно получить зависимость параметра задачи κ от координаты фазового фронта ξ_* :

$$(2.1) \quad \kappa = 2(-s/\ln \xi_*)(2 + s/\ln \xi_*)/\xi_*^2.$$

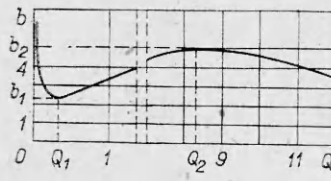
Последнее выражение в (1.17) дает два значения q :

$$(2.2) \quad q_{\pm} = 2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \kappa \xi_*^2/2} \right),$$

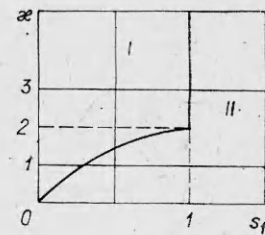
которым соответствуют два распределения температуры Θ_{\pm} , определенные первой формулой (1.17). Как известно из теории теплового взрыва [12, 14], только нижнее распределение Θ_- устойчиво относительно малых возмущений температуры.



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Значение κ в (2.1) должно быть положительным. Это определяет область изменения ξ_* : $0 < \xi_* < \exp(-s/2)$. Из формулы (2.1) видно, что $\kappa \rightarrow \infty$ при $\xi_* \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow 0$ при $\xi_* \rightarrow \exp(-s/2)$ и, следовательно, задача имеет решение при любом $\kappa > 0$, $s > 0$. Анализ (2.1) показывает [7], что при $0 < s < 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,172$ зависимость $\kappa(\xi_*)$ немонотонна и тем самым в некоторой области значений параметра κ решение неединственно. Границы области немонотонности κ_+ определяются следующими соотношениями (фиг. 1):

$$(2.3) \quad \kappa_+(s) = 2f_+(2 - f_+) \exp f_+;$$

$$(2.4) \quad \xi_{\pm} = \exp(-f_{\pm}/2);$$

$$(2.5) \quad f_{\pm} = (1 + s \pm \sqrt{(1 - s)^2 - 4s})/2.$$

При $s = s_* = 3 - 2\sqrt{2}$ значения κ_+ и κ_- сливаются, и при $s > s_*$ решение становится единственным. В области немонотонности зависимость $\kappa(\xi_*)$ убывает при $\xi_* < \xi_+$ и $\xi_* > \xi_-$ и возрастает при $\xi_+ < \xi_* < \xi_-$.

Исходя из физического смысла ξ_* (ξ_* должно увеличиваться при увеличении интенсивности тепловыделения, т. е. κ), можно предположить, что только возрастающая ветвь зависимости $\kappa(\xi_*)$ является устойчивой.

Представление о процессах в области неустойчивых стационарных состояний дает анализ уравнений в квазистационарном приближении, когда времена тепловой и гидродинамической релаксации существенно меньше характерного времени фазового превращения (см. [7]), т. е. выполняются условия $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ (см. (1.11)). В этом случае уравнение движения границы фазового фронта в безразмерных переменных имеет вид

$$(2.6) \quad \partial \xi_*/\partial \tau = 8 \left(s/\ln \xi_* + 1 - \sqrt{1 - \kappa \xi_*^2/2} \right),$$

а распределение температуры определяется формулами (1.16)–(1.18), причем следует учитывать лишь меньшее (устойчивое) распределение, получающееся из (1.17) при исключении q . Уравнение (2.6) несколько отличается от соответствующего уравнения в [7], однако также допускает достаточно полное качественное исследование. В частности, область возможных стационарных состояний сужается за счет отбрасывания неустойчивых относительно возмущений температуры стационарных профилей. В плоскости параметров κ и s область стационарных состояний квазистационарной задачи определяется неравенством $\kappa < \kappa_0 = 2 \exp(2s)$ (см. фиг. 1).

Объединяя результаты анализа стационарной и квазистационарной систем уравнений, можно сделать выводы.

1. В отличие от [9] настоящая задача (см. (1.6)–(1.10)) имеет стационарное решение при любом значении параметра κ . В области $s < s_*$, $\kappa_-(s) < \kappa < \kappa_+(s)$ решение, отвечающее $\xi_+(s) < \xi_* < \xi_-(s)$, оказывается устойчивым. В этой области зависимость (2.1) возрастающая. Убывающим участкам кривой (2.1) соответствуют неустойчивые решения. В области единственности (убывающая зависимость (2.1)) устойчивых стационарных состояний нет.

2. Нестационарные особенности течения определяются характером неустойчивости стационарных состояний. Если неустойчивость проявляется только относительно возмущений границы фаз, а относительно возмущений температуры и скорости стационарное решение остается устойчивым, то допустимо сформулированное выше квазистационарное приближение.

3. В квазистационарном приближении удается построить диаграмму областей характерных режимов течения (см. фиг. 1): *I* — устойчивые стационарные режимы с промежуточным положением границы фаз $\xi_+(s) < \xi_+ < \xi_-(s)$; *II* — закупорка трубы (полное фазовое превращение); *III* — гидродинамический тепловой взрыв; *IV* — общая часть областей *I* и *III*. Здесь существуют устойчивые стационарные состояния, однако начальные условия $\xi_* = 1$ при $\tau = 0$ не принадлежат к области их притяжения, и с этими начальными условиями развивается ГТВ.

4. Стационарные состояния с неустойчивыми температурными профилями не влияют на квазистационарное поведение решений. Они не являются стационарными точками для квазистационарной задачи.

3. Расходно-напорная характеристика и режим течения с заданным расходом. Рассчитаем расходно-напорную характеристику течения в условиях фазового перехода, т. е. зависимость градиента давления $b = -\partial p / \partial z$ от расхода Q .

Интегрируя второе уравнение (1.7), с учетом (1.17) получим

$$(3.1) \quad \omega = \frac{1}{\kappa \xi_*} \left\{ \frac{q}{4} - \frac{q \xi \xi_*}{q(\xi^2 - \xi_*^2) + 4\xi_*^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{q}{4-q}} \left[\arctg \sqrt{\frac{q}{4-q}} - \arctg \left(\frac{\xi}{\xi_*} \sqrt{\frac{q}{4-q}} \right) \right] \right\};$$

$$(3.2) \quad Q = \frac{\pi r_1^2}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{RT_*^2 \lambda_1}{\eta(T_*) E} q}.$$

Формула (3.2) совместно с (2.1) и (2.2) дает параметрическое задание расхода для случая с заданной температурой на стенке трубы (фиг. 2). В условиях фазового перехода эта характеристика качественно отличается от известной кривой для неизотермического течения [15]. Фазовый переход приводит к появлению новой убывающей ветви, на которой $b \rightarrow \infty$ при $Q \rightarrow 0$. Такая аномальная зависимость объясняется тем, что при малых расходах мало диссипативное тепловыделение и, следовательно, на стенках трубы «нарастает» толстый слой твердого вещества, что препятствует течению жидкости ($Q < Q_1$, фиг. 2). При больших расходах ($Q > Q_2$) сопротивление течению падает из-за больших разогревов в жидкости и сильной температурной зависимости вязкости (ср. [15]). Лишь при некоторых промежуточных значениях расхода ($Q_1 < Q < Q_2$) зависимость $b(Q)$ возрастающая. Эта ветвь соответствует устойчивым стационарным состояниям в режиме течения с заданным градиентом давления. При задании градиента давления меньше, чем b_1 , происходит закупорка трубы, а при $b > b_2$ развивается ГТВ (см. п. 2). В рамках квазистационарного приближения описываются также нестационарные процессы при $s > s_*$, когда расходно-напорная характеристика становится монотонно падающей.

Знание зависимости $b(Q)$ позволяет сделать некоторые выводы о режиме течения с заданным расходом. Введем безразмерный расход

$$(3.3) \quad \gamma = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \sqrt{\frac{E\eta(T_*)}{RT_*^2 \lambda_1}}.$$

Решение задачи определяется (1.16), (1.17), (2.1), (2.2), где κ является теперь искомой величиной, которая зависит от γ и находится из уравнения $\sqrt{\kappa} \gamma = -s/2 \ln \xi_*$.

В случае заданного расхода оба распределения температур Θ_{\pm} (см. (1.7), (2.2)) устойчивы (см. [16]), причем знак \pm в (2.2) следует брать при $\gamma > \exp(-s)/\sqrt{8}$ и $-$ при $\gamma < \exp(-s)/\sqrt{8}$. Зависимость положения фазового фронта от расхода получим из соотношения

$$\gamma = [(-s/8 \ln \xi_*) / (2 - s/\ln \xi_*)]^{1/2} \xi_*$$

Зависимость $\gamma(\xi_*)$ в интервале $0 < \xi_* < \exp(-s/2)$ — монотонно возрастающая функция, т. е. при любом заданном расходе существует единственное стационарное положение фазового фронта ξ_* ; причем ξ_* может принимать любое значение в интервале $0 < \xi_* < \exp(-s/2)$.

Отметим, что толщина «намерзшего» слоя монотонно уменьшается с увеличением расхода и слой твердого вещества на стенке трубы существует при сколь угодно больших расходах.

4. Случай заданного теплового потока на стенке трубы. В случае заданного теплового потока на стенке трубы ($r = r_1$: $\partial T/\partial r = \bar{q}_0$ или в безразмерных переменных $\xi = 1$: $\partial \Theta/\partial \xi = q_0$, $q_0 = \bar{q}_0 r_1 E/2RT_*^2$) решение системы уравнений (1.11)–(1.14) запишем в форме (см. [7] и (1.16)–(1.18))

$$(4.1) \quad \xi_* < \xi < 1: \Theta = -q_0 \ln(\xi_*/\xi);$$

$$(4.2) \quad 0 < \xi < \xi_*: \Theta = 2 \ln \left[\frac{2}{2 - s_1(1 - \xi^2/\xi_*^2)} \right]^*$$

$$\kappa \xi_*^2 = 2s_1(2 - s_1), \quad s_1 = -\frac{q_0 \Lambda}{2}.$$

Зависимость $\kappa(\xi_*)$ при этом монотонно падает и решение во всей области параметров оказывается неустойчивым. Квазистационарное уравнение движения границы раздела фаз (1.9) имеет вид

$$(4.3) \quad \partial \xi_*/\partial \tau = 8 \left(1 - s_1 - \sqrt{1 - \kappa \xi_*^2/2} \right).$$

На фиг. 3 граница, разделяющая области I (режим ГТВ) и II (закупорки трубы), определяется соотношениями

$$(4.4) \quad s_1 = 1 - \sqrt{1 - \kappa/2} \text{ при } \kappa < 2 \text{ и } s_1 = 1 \text{ при } \kappa \geq 2.$$

Уравнение (4.3) интегрируется, и из него можно получить время полной закупорки трубы при $\kappa < 2$:

$$(4.5) \quad 0 < s_1 < 2: \tau_{*1} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left[Y - \frac{(1 - s_1)}{\sqrt{s_1(2 - s_1)}} \ln \left| \frac{(2 - s_1) \operatorname{tg}(Y/2) - \sqrt{s_1(2 - s_1)}}{(2 - s_1) \operatorname{tg}(Y/2) + \sqrt{s_1(2 - s_1)}} \right| \right],$$

$$s_1 > 2: \tau_{*1} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left\{ Y - \frac{2(s_1 - 1)}{\sqrt{s_1(s_1 - 2)}} \operatorname{arctg} \left[\frac{(s_1 - 2) \operatorname{tg}(Y/2)}{\sqrt{s_1(s_1 - 2)}} \right] \right\},$$

$$Y = \arcsin \sqrt{\kappa/2}.$$

При $\kappa > 2$ процесс закупорки трубы разделим на два этапа: установление квазистационарных профилей температуры для $\xi_* > \xi_0$ ($\xi_0 = \sqrt{2/\kappa}$) и прохождение фазового фронта в квазистационарном режиме от ξ_0 до 0. Время первого этапа не удастся найти в квазистационарном приближении, однако можно определить время второго этапа τ_{*2} . Общее время закупорки будет всегда больше, чем τ_{*2} :

$$(4.6) \quad 0 < s_1 < 2: \tau_{*2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{(1 - s_1)}{\sqrt{s_1(2 - s_1)}} \ln \left| \frac{(2 - s_1) - \sqrt{s_1(2 - s_1)}}{(2 - s_1) + \sqrt{s_1(2 - s_1)}} \right| \right],$$

$$s_1 > 2: \tau_{*2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2(1 - s_1)}{\sqrt{s_1(s_1 - 2)}} \operatorname{arctg} \left[\frac{(s_1 - 2)}{\sqrt{s_1(s_1 - 2)}} \right] \right\}.$$

Выражения (4.5) и (4.6) имеют смысл лишь в области II (см. фиг. 3). В области I развивается гидродинамический тепловой взрыв. В развитии ГТВ также можно выделить две стадии: установление квазистационарных профилей скорости и температуры и развитие ГТВ в квазистационарном режиме. На первой стадии на стенках трубы успевает образоваться слой твердого вещества. На второй стадии температура жидкости увеличивается и слой твердого вещества начинает уменьшаться. Время второй стадии определим из (4.3):

$$(4.7) \quad \tau_{\text{взр}} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left\{ Y_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{(1-s_1)}{\sqrt{s_1(2-s_1)}} \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{[(2-s_1) - \sqrt{s_1(2-s_1)}] \left[(2-s_1) \operatorname{tg} \frac{Y_1}{2} + \sqrt{s_1(2-s_1)} \right]}{[(2-s_1) + \sqrt{s_1(2-s_1)}] \left[(2-s_1) \operatorname{tg} \frac{Y_1}{2} - \sqrt{s_1(2-s_1)} \right]} \right] \right\}$$

Здесь $Y_1 = \arcsin(\sqrt{\kappa/2} \xi_{*0})$; ξ_{*0} — минимальная координата фазового фронта, которая достигается на первой стадии нестационарного развития ГТВ. Эта величина не определяется в рамках квазистационарного приближения, поэтому формула (4.7) в отличие от (4.5) не позволяет рассчитать $\tau_{\text{взр}}$. Из нее, однако, можно сделать качественный вывод о существовании пределов применимости квазистационарного приближения $\tau_{\text{взр}} = 0$ при $\kappa \xi_{*0}^2/2 = 1$, а при $\kappa \xi_{*0}^2/2 > 1$ величина Y_1 и, следовательно, $\tau_{\text{взр}}$ теряют смысл. В этой области квазистационарное приближение невозможно: тепловой взрыв происходит на первой стадии нестационарного развития процесса. Область зависит, вообще говоря, от всех параметров задачи, в частности от теплоты фазового перехода Q_* . При этом она соответствует большим Q_* . Квазистационарное приближение, по-видимому, справедливо при промежуточных значениях Q_* , не слишком больших, чтобы соблюдалось условие $\kappa \xi_{*0}^2/2 < 1$, но и не слишком малых, чтобы соблюдались неравенства $\varepsilon \ll 1$ и $\varepsilon_1 \ll 1$ (см. (1.1)).

В режиме заданного расхода решение задачи задается соотношениями (4.1)–(4.3). Искомая величина κ определяется соотношением $\kappa = s_1^2/4\gamma$, где γ — безразмерный расход жидкости (3.3). В случае граничных условий второго рода удается найти расходно-напорную характеристику в явном виде $\partial p/\partial z = 2\pi\lambda_2 r_1 \bar{q}_0/Q$.

В отличие от изотермического течения ньютоновской жидкости, где градиент давления прямо пропорционален расходу, в данной задаче градиент давления оказывается обратно пропорциональным расходу, что объясняется совместным влиянием диссипативного разогрева и фазового перехода.

Зависимость γ от ξ_* оказывается монотонно возрастающей: $\gamma = \xi_*^2 [s_1/8(2-s_1)]^{1/2}$, причем в результате интенсивного тепловыделения может оказаться так, что в трубе будет только жидкость. В плоскости параметров γ, s_1 граница, разделяющая области течения с одной и двумя фазами, имеет вид $\gamma = \sqrt{s_1/8(2-s_1)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. О нагревании и плавлении твердого тела от трения. — ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Агапкин В. М., Кривошеин Б. А., Юфин В. А. Тепловой и гидравлический расчет трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1981.
3. Федотов С. А. О подъеме основных магм в земной коре и механизме трещинных базальтовых извержений. — Изв. АН СССР. Сер. геол., 1976, № 10.
4. Ozisik M. N., Mulligan J. C. Transient freezing of liquids in forced flow inside circular tubes. — Trans. ASME. J. Heat Transfer, 1969, v. 91, N 3.
5. Доровский В. И., Искольдский А. М., Роменский Е. И. О моделировании гидро-

- динамической стадии фазовых превращений при электрическом взрыве металлов. Препринт № 83—91. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1983.
6. Худяев С. И., Столин А. М., Маклаков С. В. Тепловой взрыв в условиях фазового превращения.— ФГВ, 1983, № 5.
 7. Худяев С. И., Столин А. М. Анализ условий самовоспламенения в цилиндрическом объеме при фронтальном фазовом превращении.— Хим. физика, 1984, № 9.
 8. Маклаков С. В., Столин А. М., Худяев С. И. Фазовый переход в условиях неизо-термического куэттовского течения жидкости.— ПМТФ, 1984, № 4.
 9. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепло-вом «взрыве».— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
 10. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
 11. Худяев С. И. Некоторые оценки собственных значений сферически-симметричных задач.— В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966.
 12. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
 13. Мержанов А. Г., Столин А. М. Гидродинамические аналоги явлений воспламене-ния и потухания.— ПМТФ, 1974, № 1.
 14. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
 15. Столин А. М. Неизотермическое течение жидкости в капилляре. Неизотерми-ческое течение жидкости в ротационном вискозиметре.— В кн.: Диффузия и вяз-кость полимеров. Методы измерения. М.: Химия, 1979.
 16. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотерми-ческом стационарном течении вязкой жидкости.— ПМТФ, 1965, № 5.

Поступила 5/IV 1984 г.

УДК 542.953+541.182/3

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА ДРОБЛЕНИЯ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. И. Логинов

(Москва)

Дробление капельной жидкости в турбулентном потоке дисперсионной среды является неотъемлемой частью всех технологических процессов, связанных с образо-ванием аэрозольных и эмульсионных систем. Для случая изотропной турбулентности, когда динамика процесса изменения распределения частиц дисперсной фазы по разме-рам $N(v, t)$ определяется только процессами их дробления, функция $N(v, t)$ есть реше-ние кинетического уравнения

$$(0.1) \quad \frac{\partial N(v, t)}{\partial t} = \int_v^{\infty} f(\omega) n(v, \omega) N(\omega, t) d\omega - f(v) N(v, t),$$

где $f(v)$ — частота дробления частиц в интервале размеров $(v, v + dv)$; $n(v, \omega)$ — ве-роятность образования частицы в интервале размеров $(v, v + dv)$ при дроблении час-тицы с размером в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$.

Цель данной работы — определение функций $f(v)$, $n(v, \omega)$, решение уравнения (0.1) и анализ полученных результатов. По сведениям автора, в такой постановке за-дача исследования динамики процесса дробления капельной жидкости ранее не рас-сматривалась.

1. Определение частоты дробления. Для нахождения функции $f(v)$ воспользуемся следующей моделью. Будем полагать, что дробление оди-ночной частицы в турбулентном потоке полностью определяется флюк-туациями диссипации энергии в ее окрестности. При этом если среднее по объему порядка размера частицы значение диссипации энергии пре-высит критическое значение $a(v)$, то произойдет акт дробления. В даль-нейшем считается, что распределение диссипации энергии в окрестности дробящейся капли равномерное со средним значением $\varepsilon(t)$.

Поскольку, согласно принятой модели, частоту дробления можно трактовать как вероятность пересечения случайным процессом $\varepsilon(t)$ уровня $a(v)$ за единицу времени при условии, что в момент начала отсчета време-